

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

EDOUARD GOURSAT

**Sur une équation de Monge à deux variables indépendantes**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 4, n° 1 (1935), p. 15-33

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1935\\_2\\_4\\_1\\_15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_1_15_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR UNE ÉQUATION DE MONGE À DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES

par EDOUARD GOURSAT (Paris).

## I.

1 - Dans deux articles publiés il y a quelques années <sup>(4)</sup>, j'ai signalé plusieurs cas particuliers où une équation de MONGE à deux variables indépendantes de la forme :

$$(1) \quad \Omega = \sum A_{ik} dx_i dx_k = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

où les coefficients  $A_{ik}$  sont des fonctions des quatre variables  $x_1, x_2, x_3, x_4$  satisfaisant aux conditions  $A_{ik} + A_{ki} = 0$ , peut être intégrée *explicitement*, de telle sorte que les 4 variables  $x_i$  s'expriment par des fonctions déterminées de deux variables auxiliaires  $u, v$ , d'une fonction arbitraire de ces deux variables et de ses dérivées partielles jusqu'à un ordre fini. L'équation (1) est équivalente à l'équation :

$$(1') \quad \sum A_{ik} \frac{D(x_i, x_k)}{D(u, v)} = 0;$$

je conserverai cependant la forme symbolique (1) dont je me suis déjà servi dans les articles cités, et je renverrai, pour ce qui concerne les règles du calcul de ces formes symboliques, à mon ouvrage, *Leçons sur le Problème de Pfaff*, (chap. III).

Les cas d'intégrabilité que j'ai signalés se ramènent à trois :

*Premier cas.* - La forme du second degré  $\Omega$  est le produit symbolique de deux formes linéaires  $\Omega = \omega_1 \omega_2$  où l'on a posé :

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i dx_i, \quad \omega_2 = \sum_{i=1}^4 \beta_i dx_i,$$

les coefficients  $\alpha_i, \beta_i$  pouvant être des fonctions quelconques des variables  $x_i$ . Il faut et il suffit pour cela que les coefficients  $A_{ik}$  vérifient la relation :

$$(2) \quad A_{12}A_{34} + A_{13}A_{42} + A_{14}A_{23} = 0;$$

si cette condition est satisfaite, les formes  $\omega_1, \omega_2$  se déterminent par des calculs linéaires, et l'intégration de l'équation

$$\Omega = \omega_1 \omega_2 = 0$$

---

<sup>(4)</sup> Bulletin des Sciences Mathématiques, t. LII, 1928, pp. 382-408, t. LIII, 1929, pp. 196-212.

se ramène à l'intégration de l'équation de PFAFF

$$(3) \quad \omega_1 + \lambda \omega_2 = 0,$$

à cinq variables  $x_1, x_2, x_3, x_4, \lambda$ .

*Deuxième cas.* - La forme  $\Omega$  admet un *facteur intégrant* et l'équation  $\Omega=0$  peut être ramenée, par un changement de variables, à la forme canonique

$$(4) \quad dPdX + dQdY = 0,$$

$X, Y, P, Q$  étant quatre fonctions distinctes des variables  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . Cette équation s'intègre encore immédiatement, car, si l'on prend pour variables indépendantes  $X$  et  $Y$ , elle devient

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial Q}{\partial X}$$

et l'on en déduit

$$P = \frac{\partial F}{\partial X}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial Y},$$

$F(X, Y)$  étant une fonction arbitraire. Je laisse de côté le cas, bien facile à traiter, où il y aurait une relation entre les variables  $X$  et  $Y$ .

*Troisième cas.* - L'équation  $\Omega=0$  peut être ramenée, par un changement de variables, à la forme

$$(5) \quad dz_3 dz_4 + f(z_1, z_3) dz_1 dz_2 = 0.$$

Si l'on prend pour variables indépendantes  $z_1$  et  $z_3$ , par exemple, cette équation s'écrit, en posant

$$z_1 = x, \quad z_3 = y, \quad z_2 = u, \quad z_4 = v,$$

pour supprimer les indices,

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = f(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}.$$

J'ai montré, dans le second article cité plus haut, comment on peut exprimer  $u$  et  $v$  au moyen des deux variables  $x, y$ , d'une fonction arbitraire de ces deux variables, et de ses dérivées du premier et du second ordre. Je rappellerai succinctement, en modifiant quelques détails du calcul, la méthode indiquée. Soient  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  un système de deux fonctions satisfaisant à la relation (6). Associons à ces deux fonctions  $u$  et  $v$  deux autres fonctions  $U$  et  $V$  déterminées par les deux équations

$$(7) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial \log f}{\partial x} U + \frac{\partial U}{\partial x} \\ v = f \frac{\partial U}{\partial y} + V. \end{cases}$$

En substituant les nouvelles expressions de  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  dans la condition (6), celle-ci devient

$$(8) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = f \frac{\partial^2 \log f}{\partial x \partial y} U.$$

On en tire

$$(9) \quad U = \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{f \frac{\partial^2 \log f}{\partial x \partial y}}$$

pourvu que  $\frac{\partial^2 \log f}{\partial x \partial y}$  ne soit pas nul. En substituant cette valeur de  $U$  dans les formules (7), on obtient pour les deux fonctions  $u$  et  $v$  des expressions linéaires par rapport à la fonction arbitraire  $V(x, y)$  et à ses dérivées partielles du premier et du second ordre.

*Remarque.* - La méthode suppose que  $\frac{\partial^2 \log f}{\partial x \partial y}$  n'est pas nul, c'est-à-dire que  $f$  n'est pas le produit d'une fonction  $X$  de  $x$  par une fonction  $Y$  de  $y$ . S'il en est ainsi <sup>(2)</sup>, l'équation (6) peut s'écrire :

$$\frac{1}{X} \frac{\partial v}{\partial x} = Y \frac{\partial u}{\partial y}$$

ou encore

$$\frac{\partial v}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial y'}$$

$x'$  et  $y'$  étant les deux nouvelles variables  $\int X dx, \int \frac{dy}{Y}$ .

2. - Il nous reste à examiner comment on reconnaît si une équation donnée  $\Omega = 0$  peut être ramenée par un changement de variables à l'une des formes (4) ou (5). Nous supposons bien entendu que la relation (2) n'est pas vérifiée. Ce problème se résout aisément par l'introduction d'une forme de PFAFF  $\omega$  <sup>(3)</sup>, qui est un covariant de la forme symétrique gauche  $\Omega$ . Cette forme  $\omega$  est définie par l'identité

$$(10) \quad \Omega' + \Omega \omega = 0,$$

$\Omega'$  étant la forme dérivée de  $\Omega$ , et  $\Omega \omega$  le produit symbolique des deux formes  $\Omega$  et  $\omega$ . On a

$$\Omega' = \sum dA_{ik} dx_i dx_k$$

ou en développant

$$(11) \quad \begin{aligned} \Omega' = & \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \\ & + \left( \frac{\partial A_{21}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{42}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{14}}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_4 dx_2 \\ & + \left( \frac{\partial A_{13}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{41}}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_3 dx_4 \\ & + \left( \frac{\partial A_{43}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{24}}{\partial x_3} \right) dx_3 dx_2 dx_4. \end{aligned}$$

<sup>(2)</sup> Dans ce cas particulier, on peut prendre pour  $U$  une fonction arbitraire, et pour  $V$  une fonction de la seule variable  $y$ .

<sup>(3)</sup> Voir ma note des Comptes-Rendus, t. 191, 1930, p. 1403.

Soit

$$\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + a_4 dx_4;$$

l'identité (10) conduit à quatre équations linéaires en  $a_1, a_2, a_3, a_4$

$$(12) \quad \begin{aligned} A_{23}a_1 + A_{31}a_2 + A_{12}a_3 + 0 \cdot a_4 + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_2} &= 0, \\ A_{42}a_1 + A_{14}a_2 + 0 \cdot a_3 + A_{21}a_4 + \frac{\partial A_{21}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{42}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{14}}{\partial x_2} &= 0, \\ A_{34}a_1 + 0 \cdot a_2 + A_{41}a_3 + A_{13}a_4 + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{41}}{\partial x_3} &= 0, \\ 0 \cdot a_1 + A_{43}a_2 + A_{24}a_3 + A_{32}a_4 + \frac{\partial A_{43}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_4} + \frac{\partial A_{24}}{\partial x_3} &= 0. \end{aligned}$$

Le déterminant des coefficients des inconnues est identique au déterminant de PFAFF :

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{31} & A_{23} \\ A_{21} & 0 & A_{14} & A_{42} \\ A_{13} & A_{41} & 0 & A_{34} \\ A_{32} & A_{24} & A_{43} & 0 \end{vmatrix} = (A_{12}A_{34} + A_{13}A_{42} + A_{14}A_{23})^2$$

qui par hypothèse n'est pas nul. La forme de PFAFF  $\omega$  est donc bien déterminée par l'identité (10) et il serait facile d'écrire les expressions générales des coefficients  $a_i$ , où figurent les coefficients  $A_{ik}$  et leurs dérivées partielles du premier ordre. La forme  $\omega$  sera appelée par la suite la forme linéaire *associée* à  $\Omega$ . Il est évident que c'est un covariant de  $\Omega$ , puisqu'il en est ainsi de la forme  $\Omega'$ .

Quand on multiplie tous les coefficients  $A_{ik}$  par un facteur  $\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , la forme  $\omega$  augmente d'une différentielle exacte. Posons en effet  $\Omega_1 = \lambda\Omega$ ; on en déduit

$$\Omega_1' = d\lambda\Omega + \lambda\Omega'$$

ou, en tenant compte de l'identité (10),

$$\Omega_1' = \frac{d\lambda}{\lambda} \Omega_1 - \Omega_1 \omega$$

ce qu'on peut encore écrire

$$(10') \quad \Omega_1' + \Omega_1(\omega - d \log \lambda) = 0.$$

La forme linéaire  $\omega_1$  associée à  $\Omega_1$  est donc égale à  $\omega - d \log \lambda$ . Ainsi, *quand on remplace  $\Omega$  par  $\lambda\Omega$ , la forme associée  $\omega$  est remplacée par  $\omega - d \log \lambda$ .*

Il suit de là que pour que la forme  $\Omega$  admette un facteur intégrant  $\mu$ , c'est-à-dire un facteur  $\mu$  tel que le produit  $\mu\Omega$  soit une forme dérivée, la forme associée  $\omega$  doit être une différentielle exacte. Supposons en effet que l'on ait  $(\mu\Omega)' = 0$ , l'identité fondamentale (10) devient :

$$\Omega d\mu - \mu\Omega\omega = 0,$$

ou  $\mu\Omega(d \log \mu - \omega) = 0$ . Puisque par hypothèse  $\Omega$  n'admet pas de diviseur linéaire,

on doit avoir  $\omega = d \log \mu$ . Donc, pour que la forme  $\Omega$  admette un facteur intégrant, il faut et il suffit que la forme associée soit une différentielle exacte.

Cette condition est suffisante car, si l'on a  $\omega = dv$ , le calcul précédent prouve que la forme  $\Omega_1 = e^v \Omega$  sera une forme dérivée.

Cet énoncé comprend aussi le cas où la forme  $\Omega$  est elle-même une forme dérivée; dans ce cas, en effet, on peut prendre  $\mu = 1$ , et la forme  $\omega$  est identiquement nulle.

L'énoncé précédent donne en même temps la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation symbolique  $\Omega = 0$  puisse être ramenée à la forme canonique (4). Les opérations nécessaires pour effectuer cette réduction sont les suivantes. Le facteur intégrant  $\mu$  ayant été obtenu par une quadrature, la forme  $\Omega_1 = \mu \Omega$  est identique au covariant bilinéaire d'une forme de PFAFF  $\omega_2$  dont les coefficients s'obtiennent par des quadratures (4). Cette forme  $\omega_2$  ayant été mise sous forme canonique  $PdX + QdY$ , la forme dérivée, qui est identique à  $\Omega_1$ , est elle-même  $dPdX + dQdY$ , et la réduction cherchée est effectuée.

Mais on peut éviter l'introduction de la forme de PFAFF auxiliaire  $\omega_2$ . En effet,  $f$  et  $g$  étant deux fonctions quelconques, de  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ,  $\Omega_1 + dfdg$  est aussi une forme dérivée, et l'on peut choisir d'une infinité de façons  $f$  et  $g$  de telle sorte que  $\Omega_1 + dfdg$  soit le produit symbolique de deux formes linéaires. On peut prendre par exemple  $g = x_1$  et  $f$  est déterminée par une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre. Connaissant une intégrale particulière  $f$  de cette équation, la forme  $\Omega_1 + dfdx_1$  est le produit symbolique de deux formes de PFAFF  $\omega_3, \omega_4$ ; d'autre part, cette forme étant aussi une forme dérivée est égale à un produit symbolique  $dUdV$ . On a donc l'égalité symbolique

$$\omega_3 \omega_4 = dUdV$$

ce qui exige que les deux équations  $\omega_3 = 0, \omega_4 = 0$  forment un système complètement intégrable, et l'intégration de ce système fera connaître  $U$  et  $V$ . Toutes ces intégrations étant supposées effectuées, l'équation  $\Omega = 0$  est bien ramenée à la forme canonique (4).

3. - Supposons maintenant que, par un changement de variables combiné avec la multiplication de tous les coefficients  $A_{ik}$  par un même facteur, l'équation  $\Omega = 0$  puisse être ramenée à la forme (5)

$$\Omega_1 = dz_3 dz_4 + f(z_1, z_3) dz_1 dz_2 = 0.$$

On a alors

$$\Omega_1' = \frac{\partial f}{\partial z_3} dz_1 dz_2 dz_3$$

---

(4) Voir: *Leçons sur le Problème de Pfaff*, chap. III, p. 105.

et par suite la forme de PFAFF associée  $\omega_1$  se réduit à un seul terme

$$\omega_1 = - \frac{\partial \log f}{\partial z_3} dz_3;$$

si la fonction  $f$  n'est pas le produit d'une fonction de  $z_1$  par une fonction de  $z_3$  comme nous le supposons (cf. n.º 1, remarque)  $\frac{\partial \log f}{\partial z_3}$  dépend de la variable  $z_1$ , et la forme  $\omega_1$  est de classe deux.

D'autre part, quand on remplace  $\Omega_1$  par  $\mu\Omega_1$ , on sait que la forme associée  $\omega_1$  est remplacée par  $\omega_1 - d \log \mu$ . Par conséquent, *pour qu'une équation  $\Omega=0$  puisse être ramenée à la forme intégrable (5) par un changement de variables, il est nécessaire que la forme de Pfaff associée  $\omega$  soit de classe deux ou de classe trois.*

Pour démontrer la reciproque, il suffit de considérer le cas où la forme  $\omega$  est de classe deux, car on passe du cas où  $\omega$  est de classe trois au cas où  $\omega$  est de classe deux en multipliant tous les coefficients de  $\Omega$  par un même facteur. Nous pouvons aussi supposer cette forme  $\omega$  de classe deux ramenée à la forme canonique  $x_2 dx_1$ . Soit, d'une façon générale

$$\Omega = \sum A_{ik} dx_i dx_k$$

une forme symbolique à un nombre quelconque de variables telle que l'on ait identiquement

$$(13) \quad \Omega' + \Omega(x_2 dx_1) = 0.$$

De cette identité on déduit, en égalant à zéro la forme dérivée du premier membre

$$\Omega'(x_2 dx_1) + \Omega dx_2 dx_1$$

ou, en remplaçant  $\Omega'$  par  $-\Omega(x_2 dx_1)$ ,

$$-(\Omega)(x_2 dx_1)^2 + \Omega dx_2 dx_1 = 0.$$

Le carré symbolique  $(x_2 dx_1)^2$  étant nul, on doit donc avoir  $\Omega dx_1 dx_2 = 0$ , et un terme quelconque de  $\Omega$  doit contenir un au moins des facteurs  $dx_1, dx_2$ .

Soit

$$\begin{aligned} \Omega = & A_{12} dx_1 dx_2 + (A_{13} dx_1 dx_3 + \dots + A_{1n} dx_1 dx_n) \\ & + (A_{23} dx_2 dx_3 + \dots + A_{2n} dx_2 dx_n), \end{aligned}$$

les coefficients  $A_{ik}$  étant des fonctions des  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . La forme dérivée  $\Omega'$  étant divisible, d'après l'identité (13), par  $dx_1 dx_2$ , ne peut contenir aucun produit symbolique de l'une des formes  $dx_1 dx_i dx_h, dx_2 dx_i dx_h$ , les nombres  $i$  et  $h$  étant supérieurs à 2. Les coefficients  $A_{ih}$  doivent donc vérifier les relations :

$$\frac{\partial A_{1i}}{\partial x_h} = \frac{\partial A_{1h}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial A_{2i}}{\partial x_h} = \frac{\partial A_{2h}}{\partial x_i} \quad (i > 2, h > 2).$$

On a donc

$$\begin{aligned} A_{13}dx_3 + \dots + A_{1n}dx_n &= dU - \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2, \\ A_{23}dx_3 + \dots + A_{2n}dx_n &= dV - \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial V}{\partial x_2} dx_2, \end{aligned}$$

$U$  et  $V$  étant des fonctions des variables  $x_i$ , et la forme  $\Omega$  peut encore s'écrire :

$$\Omega = B_{12}dx_1dx_2 + dx_1dU + dx_2dV$$

Les quatre fonctions  $x_1, x_2, U, V$ , doivent être distinctes ; dans le cas contraire,  $dx_1, dx_2, dU, dV$  seraient des combinaisons linéaires de trois formes de PFAFF, et  $\Omega$  serait le produit symbolique de deux formes linéaires. On peut donc par un choix convenable des variables, poser  $U=x_4, V=x_3$ , et par suite

$$\Omega = B_{12}dx_1dx_2 + dx_1dx_4 + dx_2dx_3$$

La forme dérivée  $\Omega'$  est  $dB_{12}dx_1dx_2$ , et la relation (13) devient

$$(13') \quad dB_{12}dx_1dx_2 + x_2dx_1dx_2dx_3 = 0.$$

On doit donc avoir

$$\frac{\partial B_{12}}{\partial x_3} = -x_2, \quad \frac{\partial B_{12}}{\partial x_i} = 0, \quad \text{pour } i > 3$$

et par suite

$$\begin{aligned} B_{12} &= -x_2x_3 + \varphi(x_1, x_2), \\ \Omega &= (\varphi(x_1, x_2) - x_2x_3)dx_1dx_2 + dx_1dx_4 + dx_2dx_3. \end{aligned}$$

En remplaçant  $x_4$  par  $x_4 - \int \varphi(x_1, x_2)dx_2$ , on obtient finalement pour  $\Omega$  une forme canonique

$$\Omega = dx_1dx_4 + dx_2dx_3 - x_2x_3dx_1dx_2$$

que l'on peut encore écrire

$$\Omega = dx_1dx_4 + e^{-x_1x_2}dx_2d(x_3e^{x_1x_2}).$$

En remplaçant enfin  $x_3e^{x_1x_2}$  par  $x_3$ , on parvient encore à une forme canonique à deux termes :

$$(14) \quad \Omega = dx_1dx_4 + e^{-x_1x_2}dx_2dx_3.$$

En résumé, toute forme symbolique  $\Omega$  du second degré qui n'est pas le produit de deux formes de Pfaff, et qui satisfait à la relation

$$\Omega' + \Omega\omega = 0,$$

$\omega$  étant une forme de Pfaff de classe deux, peut être ramenée à la forme (14) par un choix convenable de variables.

Si  $\omega$  a été mis sous forme canonique  $x_2dx_1$ , la suite des calculs qui précédent prouve que la réduction de  $\Omega$  à la forme canonique (14) n'exige que des quadratures.



En prenant pour variables indépendantes  $x=x_1$ ,  $y=x_2$ , et pour fonctions,  $x_3=v$ ,  $x_4=u$ , l'équation  $\Omega=0$  devient

$$(15) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^{xy} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Suivant la méthode générale indiquée plus haut, posons

$$\begin{aligned} u &= yU + \frac{\partial U}{\partial x} \\ v &= e^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} + V; \end{aligned}$$

la relation (15) devient  $\frac{\partial V}{\partial x} = e^{xy}U$ . On en tire  $U = e^{-xy} \frac{\partial V}{\partial x}$ , et par suite tous les systèmes de deux fonctions  $u$  et  $v$  satisfaisant à la relation (15) sont donnés par les formules

$$(16) \quad \begin{cases} u = e^{-xy} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ v = V - x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$V(x, y)$  étant une fonction arbitraire.

4. - En résumé, pour que l'équation symbolique (1) puisse être ramenée à la forme (5), et par suite intégrée explicitement, au moyen d'un changement de variables, *il faut et il suffit que la forme linéaire associée  $\omega$  soit de classe deux ou de classe trois*. Soit  $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 + a_4 dx_4$  cette forme et  $\omega'$  la forme dérivée

$$\omega' = \sum a_{ik} dx_i dx_k.$$

Pour que  $\omega$  soit de classe deux ou de classe trois, il faut et il suffit que le déterminant de PFAFF formé avec les coefficients  $a_{ik}$  soit nul, sans que tous ses éléments soient nuls (<sup>5</sup>). Cette condition étant supposée vérifiée, pour ramener l'équation  $\Omega=0$  à la forme canonique

$$dx_1 dx_4 + e^{-x_1 x_2} dx_2 dx_3 = 0,$$

il faut d'abord ramener la forme associée  $\omega$  à une des formes canoniques  $y_2 dy_1$ ,  $y_2 dy_1 + dy_3$ , suivant que cette forme est de classe deux ou de classe trois. Si  $\omega$  est de classe trois, et si on l'a mise sous forme canonique  $y_2 dy_1 + dy_3$  la forme de PFAFF  $\omega_1$  associée à  $\Omega_1 = e^{y_2} \Omega$  sera  $y_2 dy_1$  (n.° 2). On peut donc se borner à considérer le cas où  $\omega$  est de classe deux, et les calculs du paragraphe précédent montrent que les variables  $x_3, x_4$ , qui figurent dans la forme réduite (14) se déterminent par des quadratures seulement, lorsque l'on a  $\omega = x_2 dx_1$ .

Prenons par exemple l'équation

$$(17) \quad = dx_1 dx_4 + f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 dx_3 = 0$$

(<sup>5</sup>) *Leçons sur le Problème de Pfaff*, chap. I, p. 31.

qui peut être regardée comme une forme réduite de l'équation (1). On a dans ce cas :

$$\Omega' = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 + \frac{\partial f}{\partial x_4} dx_2 dx_3 dx_4$$

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial u}{\partial x_4} dx_4,$$

en posant  $u = \log f$ . Si les quatre fonctions  $x_1, x_4, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_4}$  sont distinctes,  $\omega$  est de quatrième classe, et mise sous forme canonique. Pour que  $\omega$  soit de classe inférieure à quatre, il faut et il suffit que ces quatre fonctions ne soient pas distinctes. La fonction  $u$  doit donc satisfaire à la condition

$$\frac{D\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_4}, x_1, x_4\right)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} = 0$$

c'est-à-dire à l'équation aux dérivées partielles

$$(18) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_4} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_4} = 0$$

qui admet les deux intégrales intermédiaires

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_4} = F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, x_1, x_4\right), \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} = \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}, x_2, x_3\right), \end{cases}$$

$F$  et  $\Phi$  étant des fonctions arbitraires.

L'intégrale générale de l'équation (18) est représentée par le système des deux équations <sup>(6)</sup>

$$(20) \quad \begin{cases} u = f(x_1, x_2, \alpha) + g(x_3, x_4, \alpha) \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial g}{\partial \alpha}, \end{cases}$$

$\alpha$  étant une variable auxiliaire,  $f$  et  $g$ , deux fonctions arbitraires. L'équation (18) est toujours vérifiée si  $u$  ne renferme que trois au plus des quatre variables  $x_i$ . Il en résulte qu'une équation de MONGE de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial x} + f(x, y, z, u) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

est toujours intégrable explicitement, si l'une des variables  $x, y, z, u$  ne figure pas dans  $f$ .

## II.

5. - Pour donner une application du résultat général qui vient d'être établi, je reprends un problème de la théorie des congruences de droites, dont je me

<sup>(6)</sup> Bulletin de la Société Mathématiques, t. 27, 1899, p. 27.

suis déjà occupé dans l'un des articles cités plus haut (<sup>7</sup>). Sur une droite quelconque  $\Delta$  de l'espace, représentée par les équations

$$(21) \quad x = az + p, \quad y = bz + q$$

on choisit, par une construction arbitraire, un point  $I$  dont la coordonnée  $z$  a pour expression

$$(22) \quad z = \frac{f(a, b, p, q)}{2},$$

$f(a, b, p, q)$  étant une fonction de  $a, b, p, q$  qui dépend de la loi qui détermine le point  $I$  de chaque droite. La recherche des congruences de droites telles que le milieu du segment focal sur chaque génératrice de la congruence soit précisément le point  $I$  de cette génératrice conduit à l'intégration de l'équation symbolique

$$(23) \quad \Omega = dadq + dpdb + f(a, b, p, q)dadb = 0.$$

Par exemple, si le point  $I$  de la droite  $\Delta$  est l'un des points d'intersection de  $\Delta$  avec une surface  $\Sigma$ , le problème revient à la recherche des congruences ayant  $\Sigma$  pour surface moyenne. J'ai déjà étudié le cas où cette équation (23) peut être ramenée par un changement de variables, à la forme intégrable (4).

Pour compléter ce travail, je me propose encore de trouver tous les cas où l'équation (23) peut être ramenée à la forme intégrable (5). Il faut d'abord former la forme associée  $\omega$ ; on a

$$(24) \quad \Omega' = \frac{\partial f}{\partial p} dadbdp + \frac{\partial f}{\partial q} dadbdq$$

et on en déduit facilement l'expression de  $\omega$ ,

$$(25) \quad \omega = \frac{\partial f}{\partial p} da + \frac{\partial f}{\partial q} db.$$

Pour que cette forme soit de classe inférieure à quatre, il faut et il suffit qu'il y ait une relation entre  $\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q}, a, b$ , c'est-à-dire que le jacobien

$$\frac{D\left(a, b, \frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial q}\right)}{D(a, b, p, q)}$$

soit nul, ce qui conduit à la condition

$$(26) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\right)^2 = 0$$

que l'on peut énoncer comme il suit :

---

(<sup>7</sup>) Bulletin des Sciences Mathématiques, t. LII, 1928, pp. 392-408.

La surface  $S$  représentée par l'équation

$$(S) \quad z = f(a, b, p, q),$$

où  $p, q, z$  sont les coordonnées cartésiennes d'un point,  $a$  et  $b$  des paramètres quelconques, doit être une surface développable.

On peut remplacer cette condition par la suivante. Les coordonnées du point  $I$  sont, pour des valeurs données, de  $a, b, p, q$ ,

$$z = \frac{f(a, b, p, q)}{2}, \quad x = az + p, \quad y = bz + q.$$

La surface  $(\Sigma)$  lieu du point  $I$  lorsque  $p$  et  $q$  varient arbitrairement,  $a$  et  $b$  restant constants, a donc pour équation

$$(\Sigma) \quad 2z = f(a, b, x - az, y - bz).$$

On passe donc de la surface  $(S)$  à la surface  $(\Sigma)$  par une transformation homographique. Si l'une de ces surfaces est développable, il en est de même de l'autre. On peut donc énoncer le résultat comme il suit: *Pour que l'équation (23) puisse être ramenée à la forme intégrable (5), il faut et il suffit que la surface  $\Sigma_{ab}$  décrite par le point  $I$  lorsque  $a$  et  $b$  conservent des valeurs constantes, soit une surface développable, quelles que soient les valeurs des constantes  $a$  et  $b$ .*

Pour avoir une fonction  $f(a, b, p, q)$  satisfaisant à cette condition, il suffit de faire correspondre à chaque direction de droites, de coefficients angulaires  $a$  et  $b$ , une surface développable  $\Sigma_{ab}$ , et de prendre pour le point  $I$  sur la droite  $x = az + p$ ,  $y = bz + q$ , un des points d'intersection de cette droite avec la surface  $\Sigma_{ab}$ . En particulier, si la surface développable  $\Sigma_{ab}$  est la même, quels que soient  $a$  et  $b$ , on en conclut que *la recherche des congruences de droites admettant pour surface moyenne une surface développable donnée conduit à une équation intégrable de la forme (5).*

Le raisonnement prouve de plus que c'est le seul cas où ce problème conduit à une équation de la forme (5).

6. - La recherche des congruences admettant pour surface moyenne une surface donnée  $(\Sigma)$  conduit directement à une équation de MONGE de la forme (1). Soient en effet  $X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)$ , les coordonnées d'un point  $M$  de  $(\Sigma)$ , exprimées au moyen de deux paramètres variables  $u, v$ . A ce point  $M$  associons une droite  $\Delta$  passant par ce point et de paramètres directeurs  $a(u, v), b(u, v), c(u, v)$ . Ces droites  $\Delta$  forment une congruence, et les points focaux d'une génératrice se déterminent par la méthode classique.

Soient

$$\xi = X + a\varrho, \quad \eta = Y + b\varrho, \quad \zeta = Z + c\varrho$$

les coordonnées d'un point focal. Les conditions

$$\frac{d\xi}{a} = \frac{d\eta}{b} = \frac{d\zeta}{c} = k + d\rho,$$

donnent, en développant les différentielles,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial u} + \rho \frac{\partial a}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial X}{\partial v} + \rho \frac{\partial a}{\partial v}\right) dv - ka &= 0, \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial u} + \rho \frac{\partial b}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial Y}{\partial v} + \rho \frac{\partial b}{\partial v}\right) dv - kb &= 0, \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial u} + \rho \frac{\partial c}{\partial u}\right) du + \left(\frac{\partial Z}{\partial v} + \rho \frac{\partial c}{\partial v}\right) dv - kc &= 0, \end{aligned}$$

et l'élimination de  $du$ ,  $dv$ ,  $k$ , conduit à une équation du second degré en  $\rho$ , qui détermine les points focaux,

$$(27) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} + \rho \frac{\partial a}{\partial u}, & \frac{\partial X}{\partial v} + \rho \frac{\partial a}{\partial v}, & a \\ \frac{\partial Y}{\partial u} + \rho \frac{\partial b}{\partial u}, & \frac{\partial Y}{\partial v} + \rho \frac{\partial b}{\partial v}, & b \\ \frac{\partial Z}{\partial u} + \rho \frac{\partial c}{\partial u}, & \frac{\partial Z}{\partial v} + \rho \frac{\partial c}{\partial v}, & c \end{vmatrix} = 0$$

ou en ordonnant par rapport à  $\rho$ ,

$$(27') \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial u}, & \frac{\partial a}{\partial v}, & a \\ \frac{\partial b}{\partial u}, & \frac{\partial b}{\partial v}, & b \\ \frac{\partial c}{\partial u}, & \frac{\partial c}{\partial v}, & c \end{vmatrix} \rho^2 + \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u}, & \frac{\partial a}{\partial v}, & a \\ \frac{\partial Y}{\partial u}, & \frac{\partial b}{\partial v}, & b \\ \frac{\partial Z}{\partial u}, & \frac{\partial c}{\partial v}, & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v}, & \frac{\partial a}{\partial u}, & a \\ \frac{\partial Y}{\partial v}, & \frac{\partial b}{\partial u}, & b \\ \frac{\partial Z}{\partial v}, & \frac{\partial c}{\partial u}, & c \end{vmatrix} \right\} \rho + \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u}, & \frac{\partial X}{\partial v}, & a \\ \frac{\partial Y}{\partial u}, & \frac{\partial Y}{\partial v}, & b \\ \frac{\partial Z}{\partial u}, & \frac{\partial Z}{\partial v}, & c \end{vmatrix} = 0.$$

Pour que la surface  $(\Sigma)$  soit la surface moyenne de la congruence  $(G)$  formée par les droites  $\Delta$ , il faut et il suffit que les paramètres directeurs  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de  $\Delta$  vérifient la relation

$$(28) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u}, & \frac{\partial a}{\partial v}, & a \\ \frac{\partial Y}{\partial u}, & \frac{\partial b}{\partial v}, & b \\ \frac{\partial Z}{\partial u}, & \frac{\partial c}{\partial v}, & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial v}, & \frac{\partial a}{\partial u}, & a \\ \frac{\partial Y}{\partial v}, & \frac{\partial b}{\partial u}, & b \\ \frac{\partial Z}{\partial v}, & \frac{\partial c}{\partial u}, & c \end{vmatrix}.$$

On vérifie immédiatement que cette condition ne change pas quand on multiplie  $a$ ,  $b$ ,  $c$  par un même facteur quelconque  $\psi(u, v)$ , ce qui était du reste évident *a priori*. L'équation (28) ne renferme donc que deux fonctions inconnues, les rapports de deux des coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  au troisième. Si par exemple, on suppose  $c=1$ , on a entre les deux fonctions  $a(u, v)$ ,  $b(u, v)$  et les variables  $u$ ,  $v$  une relation qui, multipliée par  $du dv$ , est de la forme (1).

D'après les résultats du n.º 5, on sait que cette équation est intégrable explicitement lorsque  $(\Sigma)$  est une surface développable. Les paragraphes suivants donnent les formules explicites qui résolvent le problème. On laisse de côté le cas bien connu où la surface  $(\Sigma)$  est un plan; si l'on a pris ce plan pour plan des  $xy$ , l'équation (23) est mise immédiatement sous la forme intégrable

$$dadq + dpdb = 0,$$

qui est un cas particulier de la forme canonique (4).

Nous supposons d'abord que la surface  $(\Sigma)$  n'est ni un cône, ni un cylindre. Soient  $x(s), y(s), z(s)$ , les coordonnées d'un point  $m$  de l'arête de rebroussement  $\Gamma$ ,  $s$  étant l'arc de cette courbe. Les lettres  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma'', R, T$  ayant la signification habituelle, les coordonnées d'un point  $M$  de  $(\Sigma)$  sont représentées par les formules

$$(29) \quad X = x(s) + l\alpha, \quad Y = y(s) + l\beta, \quad Z = z(s) + l\gamma,$$

les variables indépendantes étant  $s$  et  $l$ . Pour n'introduire que des inconnues ayant une signification géométrique simple, nous poserons

$$(30) \quad \begin{cases} \alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha' + \nu\alpha'', \\ \beta = \lambda\beta + \mu\beta' + \nu\beta'', \\ \gamma = \lambda\gamma + \mu\gamma' + \nu\gamma''; \end{cases}$$

$\lambda, \mu, \nu$  sont proportionnels aux cosinus des angles que fait la parallèle à la droite  $\Delta$  menée par  $m$  avec la tangente, la normale principale et la binormale à  $\Gamma$  en ce point  $m$ . En remplaçant dans les formules (27) et (28)  $u$  et  $v$  par  $s$  et  $l$  respectivement, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} &= \alpha + l \frac{\alpha'}{R}, & \frac{\partial Y}{\partial s} &= \beta + l \frac{\beta'}{R}, & \frac{\partial Z}{\partial s} &= \gamma + l \frac{\gamma'}{R}, \\ \frac{\partial X}{\partial l} &= \alpha, & \frac{\partial Y}{\partial l} &= \beta, & \frac{\partial Z}{\partial l} &= \gamma, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s} &= \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial s} + \alpha' \frac{\partial \mu}{\partial s} + \alpha'' \frac{\partial \nu}{\partial s} + \lambda \frac{\alpha'}{R} - \mu \left( \frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha''}{T} \right) + \nu \frac{\alpha'}{T}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial l} &= \alpha \frac{\partial \lambda}{\partial l} + \alpha' \frac{\partial \mu}{\partial l} + \alpha'' \frac{\partial \nu}{\partial l}, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

En portant les valeurs précédentes dans l'équation (27') et en multipliant tous les déterminants qui figurent dans le résultat par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{vmatrix} = 1,$$

l'équation en  $\varrho$  qui détermine les points focaux prend la forme assez simple, où ne figurent que  $s, l, R, T, \lambda, \mu, \nu$ ,

$$(31) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial s} - \frac{\mu}{R}, & \frac{\partial \lambda}{\partial l}, & \lambda \\ \frac{\partial \mu}{\partial s} + \frac{\lambda}{R} + \frac{\nu}{T}, & \frac{\partial \mu}{\partial l}, & \mu \\ \frac{\partial \nu}{\partial s} - \frac{\mu}{T}, & \frac{\partial \nu}{\partial l}, & \nu \end{vmatrix} \varrho^2 + \left\{ \begin{vmatrix} 1, & \frac{\partial \lambda}{\partial l}, & \lambda \\ \frac{l}{R}, & \frac{\partial \mu}{\partial l}, & \mu \\ 0, & \frac{\partial \nu}{\partial l}, & \nu \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1, & \frac{\partial \lambda}{\partial s} - \frac{\mu}{R}, & \lambda \\ 0, & \frac{\partial \mu}{\partial s} + \frac{\lambda}{R} + \frac{\nu}{T}, & \mu \\ 0, & \frac{\partial \nu}{\partial s} - \frac{\mu}{T}, & \nu \end{vmatrix} \right\} \varrho - \frac{l\nu}{R} = 0.$$

Si  $\nu=0, \varrho=0$  est racine de l'équation (31) et le point  $M$  est un point focal pour la génératrice  $\Delta$  qui passe par ce point. Ce résultat s'explique de lui-même car la relation  $\nu=0$  exprime que  $\Delta$  est dans le plan tangent à la développable  $(\Sigma)$ , qui est alors une des focales de la congruence. Pour que  $\varrho=0$  soit racine double de l'équation (31), il faut de plus que l'on ait  $\mu=0$ , et l'équation (31) se réduit à une identité. Mais, dans ce cas singulier, la droite  $\Delta$  est confondue avec la tangente à la courbe  $\Gamma$ , et ces droites ne forment plus une congruence.

On doit donc supposer  $\nu \neq 0$ , et l'on peut prendre pour  $\nu$  la valeur  $\nu=1$ . L'équation (31) devient alors

$$(32) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial s} - \frac{\mu}{R}, & \frac{\partial \lambda}{\partial l}, & \lambda \\ \frac{\partial \mu}{\partial s} + \frac{\lambda}{R} + \frac{1}{T}, & \frac{\partial \mu}{\partial l}, & \mu \\ -\frac{\mu}{T}, & 0, & 1 \end{vmatrix} \varrho^2 + \left\{ \frac{\partial \mu}{\partial l} - \frac{l}{R} \frac{\partial \lambda}{\partial l} - \frac{\partial \mu}{\partial s} - \frac{\lambda}{R} - \frac{1+\mu^2}{T} \right\} \varrho - \frac{l}{R} = 0.$$

Pour que la surface  $(\Sigma)$  soit la surface moyenne de la congruence  $(G)$  des droites  $\Delta$ , il faut et il suffit que  $\lambda$  et  $\mu$  soient des fonctions des variables  $s$  et  $l$ , vérifiant la relation

$$(33) \quad \frac{\partial \mu}{\partial s} - \frac{\partial \mu}{\partial l} + \frac{1+\mu^2}{T} + \frac{\lambda}{R} + \frac{l}{R} \frac{\partial \lambda}{\partial l} = 0.$$

Ces fonctions  $\lambda$  et  $\mu$  ont la signification géométrique suivante; on a

$$(34) \quad \lambda = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_3}, \quad \mu = \frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_3},$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  désignant les angles que fait la parallèle à  $\Delta$  menée par  $m$ , avec la tangente, la normale principale et la binormale à l'arête de rebroussement  $\Gamma$  au point  $m$ .

7. - Si l'on multiplie le premier membre de l'équation (33) par  $dsdl$ , on obtient une équation symbolique, qui se ramène très facilement à la forme (5). En effet, cette équation (33) peut s'écrire

$$(35) \quad \frac{D\left(s, \frac{\lambda}{R} - \mu\right)}{D(s, l)} + (1+\mu^2) \frac{D\left(\text{arc tg } \mu + \int \frac{ds}{T}, l\right)}{D(s, l)} = 0.$$

Posons

$$\sigma = \int \frac{ds}{T}, \quad \frac{\lambda l}{R} - \mu = t, \quad \theta = \text{arc tg } \mu + \sigma;$$

en multipliant le premier membre de l'équation (35) par  $dsdl$  et divisant tous les termes par  $1 + \mu^2 = \frac{1}{\cos^2(\theta - \sigma)}$  on arrive à l'équation symbolique

$$(36) \quad \Omega = d\theta dl + \cos^2(\theta - \sigma) ds dt = 0$$

qui est bien de la forme (5), car  $\sigma$  est fonction de la seule variable  $s$ .

Dans cette équation, on peut prendre pour variables indépendantes  $\theta$  et  $s$  à moins que  $\mu$  ne soit une fonction de la seule variable  $s$ ;  $\mu = f(s)$ . L'équation (33) devient alors

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{\lambda l}{R} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial s} + \frac{1 + \mu^2}{T} = 0,$$

et on déduit par une nouvelle intégration, par rapport à  $l$ ,

$$\frac{\lambda l}{R} + \left( \frac{\partial \mu}{\partial s} + \frac{1 + \mu^2}{T} \right) l = \varphi(s)$$

$\varphi(s)$  étant une nouvelle fonction arbitraire de  $s$ . On obtient ainsi des congruences de droites, admettant ( $\Sigma$ ) pour surface moyenne et dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable,  $f(s)$  et  $\varphi(s)$ . L'interprétation géométrique est facile. Puisque  $\mu$  est indépendante de  $l$ , toutes les droites  $\Delta$  issues des différents points d'une tangente  $mt$  à l'arête de rebroussement  $\Gamma$  sont situées dans un plan  $P$  passant par  $mt$  et différent du plan osculateur. Lorsque le point  $m$  décrit  $\Gamma$ , ce plan  $P$  enveloppe une autre surface développable ( $\Sigma_1$ ) qu'il touche suivant une droite  $D$ , différente de la tangente à  $\Gamma$ . Cette surface ( $\Sigma_1$ ) est une des focales de la congruence ( $G$ ). Pour avoir la seconde nappe, il suffit de remarquer que les droites  $\Delta$ , situées dans un même plan  $P$  forment une surface développable (réduite à un plan) et le second foyer est le point de contact de cette droite avec son enveloppe  $E$ . Le point de rencontre de la droite  $\Delta$  avec  $mt$  devant être sur  $mt$ , la courbe  $E$  est telle que le milieu du segment déterminé sur cette tangente par le point de contact et le point de rencontre avec la droite  $D$  soit précisément le point de rencontre de cette tangente avec  $mt$ . Cette propriété caractérise les paraboles tangentes à la droite  $mt$  au point de rencontre de  $mt$  avec la droite  $D$ , et ayant  $D$  pour direction diamétrale. On est ainsi conduit à la définition géométrique suivante des congruences ( $G$ ): par chaque tangente  $mt$  à l'arête de rebroussement de ( $\Sigma$ ) on fait passer un plan  $P$  (différent du plan osculateur à  $\Gamma$ ). Ce plan enveloppe une autre surface développable ( $\Sigma_1$ ) qu'il touche en tous les points d'une droite  $D$ . On considère une parabole  $E$  tangente à  $mt$  au point de rencontre de cette droite avec  $D$ , et ayant ses diamètres parallèles à  $D$ . Les tangentes à cette parabole engendrent, lorsque le point  $m$  décrit  $\Gamma$ , une congruence  $G$  admettant ( $\Sigma$ ) pour surface moyenne. Si la parabole  $E$  se réduit à la droite  $D$



elle-même, les génératrices de la congruence situées dans le plan  $P$  sont parallèles à cette droite, et les deux points focaux sont rejetés à l'infini.

Remarquons que la construction précédente s'applique sans modification à toutes les surfaces réglées, développables ou non, et permet d'obtenir des congruences de droites, dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable, admettant cette surface pour surface moyenne.

Plus généralement, soit  $(S)$  une surface quelconque. Associons lui une surface développable  $(\Sigma_1)$  et soit  $C$  la section de la surface  $(S)$  par un plan tangent à  $(\Sigma_1)$  suivant une génératrice  $D$ . Les courbes  $E$  de ce plan telles que le segment déterminé sur une tangente à  $E$  par le point de contact et le point de rencontre avec la droite  $D$  ait son milieu sur  $C$  sont déterminées par une quadrature et dépendent d'une constante arbitraire. Dans chaque plan tangent à  $(\Sigma_1)$  prenons une de ces courbes, et considérons les tangentes à ces courbes planes. Ces tangentes forment une congruence admettant  $(S)$  pour surface moyenne. Les congruences ainsi obtenues dépendent de *trois* fonctions arbitraires d'une variable.

8. - Prenons maintenant le cas général où  $\mu$  ne se réduit pas à une fonction de la seule variable  $s$ . En choisissant  $s$  et  $\theta$  pour variables indépendantes et divisant le premier membre de l'équation (36) par  $dsd\theta$ , elle devient

$$(37) \quad \frac{\partial l}{\partial s} - \cos^2(\theta - \sigma) \frac{\partial t}{\partial \theta} = 0.$$

Conformément à la méthode générale expliquée au n.º 1, posons dans cette équation

$$(38) \quad \begin{cases} t = \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{2}{T} \operatorname{tg}(\theta - \sigma) U, \\ l = \cos^2(\theta - \sigma) \frac{\partial U}{\partial \theta} + F \end{cases}$$

et remplaçons  $t$  et  $l$  par ces expressions dans l'équation (37). Elle devient

$$U = \frac{T}{2} \frac{\partial F}{\partial s}$$

et la solution générale de l'équation (37) est représentée par les formules

$$(39) \quad \begin{cases} t = \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial s} + \operatorname{tg}(\theta - \sigma) \right] \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{T}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}, \\ l = F(s, \theta) + \frac{T}{2} \cos^2(\theta - \sigma) \frac{\partial^2 F}{\partial s \partial \theta} \end{cases}$$

$F(s, \theta)$  étant une fonction arbitraire des deux variables  $s$  et  $\theta$ . Connaissant les fonctions  $l$  et  $t$  des variables  $s$  et  $\theta$  on a ensuite  $\mu$  et  $\lambda$  par les formules

$$(40) \quad \mu = \operatorname{tg}(\theta - \sigma), \quad \lambda = \frac{R}{i} (\mu + t).$$

Pour que les formules précédentes donnent une véritable solution du problème,

proposé, il faut encore que  $l$  ne soit pas une fonction de la seule variable  $s$ . Dans ce cas particulier, si  $l=f(s)$ , on déduit de l'équation (37) que l'on a

$$t=f'(s) \operatorname{tg}(\theta-\sigma) + \varphi(s).$$

Le lieu du point  $M$  est une courbe  $C$  de la surface  $(\Sigma)$ , et il est facile de vérifier que le point  $M$  appartient à une infinité de droites de la congruence  $(G)$  formant un plan tangent en  $M$  à la courbe  $C$ . Les points focaux sur chaque génératrice passant par le point  $M$  sont confondus avec le point  $M$ . La solution ainsi obtenue peut être considérée comme un cas singulier de la solution générale.

Remarquons que  $T$  figure seul dans les formules (39) et par suite les expressions générales de  $t$  et de  $l$  ne dépendent pas de  $R$ . Il s'ensuit que si l'on connaît une solution du problème pour une surface développable  $(\Sigma)$  dont l'arête de rebroussement  $I$  a pour rayons de courbure et de torsion  $R$  et  $T$ , on peut en déduire immédiatement une solution du problème pour une surface développable  $(\Sigma_1)$ , pour laquelle  $T$  a la même valeur. Soient en effet,  $\lambda(\theta, s)$ ,  $\mu(\theta, s)$  une solution du problème pour la surface  $(\Sigma)$ ; si  $R_1$  est le rayon de courbure de l'arête de rebroussement de  $(\Sigma_1)$  les formules (40) montrent aussitôt que les fonctions

$$\lambda_1(\theta, s) = \frac{R_1}{R} \lambda(\theta, s), \quad \mu_1(\theta, s) = \mu(\theta, s)$$

donnent une solution du problème pour la surface  $(\Sigma_1)$ . On peut donc prendre pour  $R$  une valeur choisie arbitrairement, par exemple une valeur constante quelconque.

Le résultat est particulièrement simple si la fonction  $F$  est indépendante de  $s$ . La solution est fournie par les formules :

$$l = F(\theta), \quad t = 0, \quad \mu = \operatorname{tg}(\theta - \sigma), \\ \lambda = \frac{R}{l} \operatorname{tg}(\theta - \sigma).$$

9. - Prenons maintenant le cas où la surface développable est un cône  $(T)$  dont on peut supposer le sommet à l'origine. Soit  $I$  une courbe gauche dont les tangentes sont parallèles aux génératrices du cône  $(T)$ . Les lettres  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma'', R, T$  ayant la même signification que dans les paragraphes précédents, les coordonnées  $X, Y, Z$ , d'un point de  $(T)$  ont pour expressions

$$X = l\alpha, \quad Y = l\beta, \quad Z = l\gamma,$$

et, pour éviter toute ambiguïté, nous poserons

$$a = \lambda_1\alpha + \mu_1\alpha' + \nu_1\alpha'', \quad b = \lambda_1\beta + \mu_1\beta' + \nu_1\beta'', \quad c = \lambda_1\gamma + \mu_1\gamma' + \nu_1\gamma''.$$

On a

$$\frac{\partial X}{\partial s} = \frac{l\alpha'}{R}, \quad \frac{\partial Y}{\partial s} = \frac{l\beta'}{R}, \quad \frac{\partial Z}{\partial s} = \frac{l\gamma'}{R}, \quad \frac{\partial X}{\partial l} = \alpha, \quad \frac{\partial Y}{\partial l} = \beta, \quad \frac{\partial Z}{\partial l} = \gamma,$$

et les expressions de  $\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial l}, \dots$ , se déduisent immédiatement de celles qui ont été écrites plus haut en remplaçant  $\lambda, \mu, \nu$  par  $\lambda_1, \mu_1, \nu_1$ , et l'équation (31) devient, par une suite de transformations tout à fait analogues aux précédentes :

$$(31) \text{ bis } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} - \frac{\mu_1}{R}, \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial l}, \quad \lambda_1 \\ \frac{\partial \mu_1}{\partial s} + \frac{\lambda_1}{R} + \frac{\nu_1}{T}, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial l}, \quad \mu_1 \\ \frac{\partial \nu_1}{\partial s} - \frac{\mu_1}{T}, \quad \frac{\partial \nu_1}{\partial l}, \quad \nu_1 \end{array} \right\} \varrho^2 + \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial l}, \quad \lambda_1 \\ \frac{l}{R}, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial l}, \quad \mu_1 \\ 0, \quad \frac{\partial \nu_1}{\partial l}, \quad \nu_1 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial s} - \frac{\mu_1}{R}, \quad \lambda_1 \\ 0, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial s} + \frac{\lambda_1}{R} + \frac{\nu_1}{T}, \quad \mu_1 \\ 0, \quad \frac{\partial \nu_1}{\partial s} - \frac{\mu_1}{T}, \quad \nu_1 \end{array} \right\} \varrho - \frac{l\nu_1}{R} = 0.$$

Pour que le cône ( $T$ ) soit la surface moyenne de la congruence formée par les droites  $\Delta$ , il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{l}{R} \left[ \nu_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial l} - \lambda_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial l} \right] + \nu_1 \left[ \frac{\partial \mu_1}{\partial s} + \frac{\lambda_1}{R} + \frac{\nu_1}{T} \right] - \mu_1 \left[ \frac{\partial \nu_1}{\partial s} - \frac{\mu_1}{T} \right] = 0.$$

On ne peut avoir  $\nu_1 = 0$ , car on en déduirait  $\mu_1 = 0$ , et la droite  $D$  se confondrait avec la génératrice du cône ( $T$ ). On peut donc supposer  $\nu_1 = 1$ , et la condition précédente devient :

$$(33) \text{ bis } \quad \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{l\lambda_1}{R} \right) + (1 + \mu_1^2) \frac{\partial}{\partial s} \left( \text{arc tg } \mu_1 + \int \frac{ds}{T} \right) = 0.$$

Cette nouvelle équation se ramène à la forme déjà étudiée (33) en posant

$$(41) \quad \frac{l\lambda_1}{R} = \frac{l\lambda}{R} - \mu, \quad \mu_1 = \mu.$$

Ces formules permettent de déduire de toute solution du problème pour la surface développable ( $\Sigma$ ) une solution du même problème pour le cône directeur de cette surface et inversement.

10. - Lorsque la surface développable est un cylindre, on peut prendre pour axe des  $z$  une parallèle aux génératrices du cylindre, et représenter la surface par les formules

$$(42) \quad X = x(s), \quad Y = y(s), \quad Z = l,$$

$s$  étant l'arc de la section droite. En désignant par  $\alpha, \beta$  les cosinus directeurs de la tangente à la section droite, par  $\alpha', \beta'$ , les cosinus directeurs de la direction positive sur la normale, par  $R$  le rayon de courbure, on a toujours les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial s} = \alpha, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{\alpha'}{R}, \quad \frac{\partial Y}{\partial s} = \beta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{\beta'}{R}, \\ \frac{\partial z}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial \alpha'}{\partial s} = -\frac{\alpha}{R}, \quad \frac{\partial \beta'}{\partial s} = -\frac{\beta}{R}. \end{aligned}$$

Quant aux paramètres directeurs d'une droite  $D$  de la congruence, on peut les représenter par

$$\begin{aligned} a &= \lambda_2 \alpha + \mu_2 \alpha', \\ b &= \lambda_2 \beta + \mu_2 \beta', \\ c &= \nu_2. \end{aligned}$$

Pour que le cylindre représenté par les équations (42) soit la surface moyenne de la congruence, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \alpha \frac{\partial \lambda_2}{\partial l} + \alpha' \frac{\partial \mu_2}{\partial l}, & \alpha \lambda_2 + \alpha' \mu_2 \\ \beta, & \beta \frac{\partial \lambda_2}{\partial l} + \beta' \frac{\partial \mu_2}{\partial l}, & \beta \lambda_2 + \beta' \mu_2 \\ 0, & \frac{\partial v_2}{\partial l}, & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0, & \alpha \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} + \alpha' \frac{\partial \mu_2}{\partial s} + \lambda_2 \frac{\alpha'}{R} - \mu_2 \frac{\alpha}{R}, & \alpha \lambda_2 + \alpha' \mu_2 \\ 0, & \beta \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} + \beta' \frac{\partial \mu_2}{\partial s} + \lambda_2 \frac{\beta'}{R} - \mu_2 \frac{\beta}{R}, & \beta \lambda_2 + \beta' \mu_2 \\ 1, & \frac{\partial v_2}{\partial s}, & v_2 \end{vmatrix}$$

ou en multipliant par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & 0 \\ \alpha', & \beta', & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1, & \frac{\partial \lambda_2}{\partial l}, & \lambda_2 \\ 0, & \frac{\partial \mu_2}{\partial l}, & \mu_2 \\ 0, & \frac{\partial v_2}{\partial l}, & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} - \frac{\mu_2}{R}, & \lambda_2 \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial s} + \frac{\lambda_2}{R}, & \mu_2 \end{vmatrix}.$$

En développant, on est conduit à l'équation

$$(43) \quad v_2 \frac{\partial \mu_2}{\partial l} - \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial l} + \lambda_2 \frac{\partial \mu_2}{\partial s} - \mu_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} + \frac{\lambda_2^2 + \mu_2^2}{R} = 0.$$

On ne peut supposer  $v_2 = 0$ ; l'équation devient en effet, en faisant  $v_2 = 0$

$$\lambda_2 \frac{\partial \mu_2}{\partial s} - \mu_2 \frac{\partial \lambda_2}{\partial s} + \frac{\lambda_2^2 + \mu_2^2}{R} = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \text{arc tg } \frac{\mu_2}{\lambda_2} \right) + \frac{1}{R} = 0.$$

Cette équation exprime que toutes les droites de la congruence situées dans le plan d'une section droite du cylindre sont parallèles; les deux points focaux sont rejetés à l'infini.

Ce cas singulier écarté, on peut prendre  $v_2 = 1$ , et l'équation (43) peut s'écrire

$$(44) \quad \frac{\frac{\partial \mu_2}{\partial l}}{\mu_2^2} = \left( 1 + \frac{\lambda_2^2}{\mu_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial s} \left( \text{arc tg } \frac{\lambda_2}{\mu_2} - \int \frac{ds}{R} \right).$$

Pour identifier cette équation avec l'équation (33), il suffit de poser

$$\frac{1}{\mu_2} = \frac{\lambda l}{R} - \mu, \quad T = -\frac{1}{R}, \quad \mu = \frac{\lambda_2}{\mu_2}.$$

On est donc toujours conduit à une équation de la forme (37). Ce rapprochement conduit aussi à des interprétations géométriques que je laisse de côté.