ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEONIDA TONELLI

Su gli integrali del calcolo delle variazioni in forma ordinaria

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 3, nº 3-4 (1934), p. 401-450

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_3-4_401_0>

SU GLI INTEGRALI DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI IN FORMA ORDINARIA

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

In una bella Memoria, inserita in questi « Annali », E. J. MCSHANE (1) si è occupato dei teoremi di esistenza per il minimo degli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni, in forma ordinaria,

$$(1) \qquad \int_a^b f(x, y, y')\,dx,$$

aggiungendo, a quelli già conosciuti, notevoli risultati, sia per il caso relativo alle curve piane, sia per quello relativo alle curve di uno spazio ad un numero qualsiasi di dimensioni. Riattaccandosi ad un'idea del LEWY (2), Egli ha associato ad ogni integrale della forma (1) un conveniente integrale in forma parametrica, dallo studio del quale ha dedotto quanto lo interessava relativamente all'integrale (1). L'integrale associato non soddisfa, in generale, alle condizioni degli integrali in forma parametrica che ordinariamente si considerano nel Calcolo delle Variazioni e pertanto il MCSHANE, per raggiungere il suo scopo, ha dovuto premettere un largo studio del nuovo integrale introdotto, ed è giunto così a presentare sotto un nuovo aspetto la teoria della semicontinuità degli integrali sia nella forma parametrica che in quella ordinaria.

I teoremi di esistenza per il minimo stabiliti dal MCSHANE escludono sistematicamente alcuni tipi importanti di integrali: gli integrali quasi regolari che non sono seminormali, quelli la cui funzione $f(x, y, y')$ ha, per $y' \to +\infty$ e per $y' \to -\infty$, comportamenti diversi (ad esempio, $f(x, y, y') \equiv \varphi(x, y)e^{y'}$), e quelli nei quali la $f(x, y, y')$ ha la forma $\varphi(x, y)\sqrt{1+y'^2}$, con $\varphi(x, y)$ dipendente effettivamente dalla x.

Ho voluto perciò esaminare anche questi tipi e sono stato così condotto a diversi nuovi teoremi che mi sembra rispondano bene allo scopo.

Di qui trae origine la presente Memoria, la quale rielabora tutta la teoria rela-

(1) E. J. MCSHANE: *Existence theorems for ordinary problems of the Calculus of Variations.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. III (1934), pp. 181-211, 287-315).

(2) H. LEWY: *Über die Methode der Differenzengleichungen zur Lösung von Variations- und Randwertproblemen.* (Mathematische Annalen, B. 98 (1927), pp. 107-124).

tiva all'esistenza del minimo per gli integrali (1) e, *limitandosi alle curve del piano*, contiene risultati che, in particolare, racchiudono tutti quelli, a me noti, che si riferiscono a questo argomento e non derivano direttamente dai classici teoremi sui minimi relativi. Alcune osservazioni e alcuni lemmi generali stabiliti dal McSHANE permettono poi di vedere in quale misura e in quale forma le proposizioni da me ottenute per le curve piane si estendono alle curve dello spazio ad n (>2) dimensioni. Ma di ciò non mi occupo per non rendere troppo lunga questa Memoria.

* * *

Non mi sono servito dell'integrale associato del McSHANE: ho preferito, invece, di attenermi al mio vecchio metodo di svolgere la teoria degli integrali in forma ordinaria in modo del tutto indipendente da quella degli integrali in forma parametrica. Ho potuto così trattare casi per i quali il metodo del McSHANE non sembra utilizzabile; e in tutti quelli studiati dal McSHANE, ho potuto mostrare che, scelta una successione minimizzante $y_1(x)$, $y_2(x)$,...., queste funzioni risultano tutte equicontinue, anzi, tranne nel caso del secondo dei teoremi d'esistenza del McSHANE, ho provato che queste $y_n(x)$ sono tutte equiassolutamente continue.

Relativamente al primo dei teoremi d'esistenza dati dal McSHANE, ho dimostrato che esso è perfettamente equivalente a quello di M. NAGUMO [3], che contiene come caso particolare la proposizione da me esposta a p. 282 del Vol. II dei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Del secondo teorema d'esistenza del McSHANE, ho dato una generalizzazione; e del terzo e del quarto, che il McSHANE aveva provati per campi rettangolari a lati paralleli agli assi delle coordinate, ho mostrato la validità in campi molto generali, che comprendono tutti quelli che più comunemente si presentano nelle applicazioni.

Passando agli integrali quasi-regolari *non* seminormali, va osservato che di questi integrali vi sono due tipi particolarmente interessanti, che conviene studiare separatamente: quello in cui le linee sulle quali viene a cessare per l'integrale la proprietà di essere seminormale sono delle rette parallele all'asse delle y, e quello in cui le linee indicate sono, invece, rappresentabili nella forma $y=\varphi(x)$, con $\varphi(x)$ funzione assolutamente continua. Per il primo tipo, avevo già dato un teorema d'esistenza nel 1932 [4]: ora ottengo un risultato molto più generale che mi sembra esauriente. Per il secondo, dò un teorema generale che contiene una notevole proposizione stabilita recentemente da B. MANIÀ [5].

---

(3) M. NAGUMO: *Über die gleichmässige Summierbarkeit und ihre Anwendung auf ein Variationsproblem.* (Japanese Journal of Mathematics, Vol. VI (1929), pp. 173-182).

(4) L. TONELLI: *Un teorema di Calcolo delle Variazioni.* (Rend. R. Accademia dei Lincei, 1932 (1° sem.), pp. 417-423).

(5) B. MANIÀ: *Un teorema di Calcolo delle Variazioni.* (Rend. R. Accademia dei Lincei, 1933 (2° sem.), pp. 478-483).

Quando il comportamento della funzione integranda $f(x, y, y')$, per $y' \to +\infty$, è diverso da quello per $y' \to -\infty$, per ottenere risultati di una certa importanza occorre allontanarsi dai procedimenti seguiti nei casi cui abbiamo già accennato, e conviene sfruttare la considerazione delle estremali. Per questa via sono giunto ad una proposizione (n.° 28) che ne estende un'altra da me già data nei miei *Fondamenti*, e che ha un carattere di grande generalità, perchè poggia su una condizione a cui sottostanno moltissimi integrali. Seguendo la stessa via ho ottenuto anche un teorema (n.° 31) per gli integrali della forma $\int \varphi(x, y)\sqrt{1+y'^2}dx$ i quali (se la $\varphi(x, y)$ dipende effettivamente dalla x) sono i più notevoli fra quelli che sfuggono alla condizione cui dianzi accennavo.

* * *

I teoremi d'esistenza per il minimo saranno qui stabiliti alcuni per tutte le classi complete di curve ordinarie di un dato campo A, altri soltanto per quelle classi complete più comuni, come quella di tutte le curve ordinarie di un campo A che congiungono due dati punti o due dati insiemi di punti. E in tutti i casi, uno solo eccettuato (n.° 30), supporrò sempre che il campo A, che contiene le curve considerate, sia limitato. Dei campi illimitati mi sono occupato solamente nel teorema del n.° 30, perchè null'altro di nuovo avrei avuto da aggiungere alle condizioni di passaggio dai campi limitati a quelli illimitati già indicate da me nei miei *Fondamenti* (Vol. II, p. 307 e seguenti), e, in forma più generale, dal MCSHANE nella sua Memoria citata. Le condizioni date dal MCSHANE si possono ottenere senza alcuna difficoltà indipendentemente dalla considerazione degli integrali parametrici associati.

Ho anche tralasciato qui di occuparmi degli integrali per i quali la funzione integranda non si mantiene finita. Tali integrali furono da me studiati, nella forma parametrica, nei miei *Fondamenti* (Vol. II, p. 72 e seguenti), con un metodo che, con opportuni complementi, si applica anche agli integrali in forma ordinaria e permette, quando si sfruttino i risultati della presente Memoria, di giungere a diversi teoremi d'esistenza, uno dei quali è esplicitamente stabilito nel lavoro del MCSHANE già citato. Voglio però osservare che il più importante risultato in questo ordine di idee è quello relativo al problema della brachistocrona, problema che trovasi già completamente risoluto nei miei *Fondamenti* (Vol. II, p. 405 e seguenti), nella forma parametrica e quindi anche in quella ordinaria, perchè la curva minimante ottenuta per la prima forma è rappresentabile mediante un'equazione $y=y(x)$, con $y(x)$ funzione assolutamente continua. D'altronde, per integrali come quello che si presenta nel problema della brachistocrona, si può provare con un semplice ragionamento, e indipendentemente dalla conoscenza della soluzione, che (almeno per i campi più comuni) ogni soluzione del problema posto in forma parametrica lo è pure per la forma ordinaria.

* * *

Nel § 1 della presente Memoria ho esposto quanto riguarda la semicontinuità degli integrali che dovremo studiare.

Nei miei *Fondamenti* diedi già diverse dimostrazioni della semicontinuità degli integrali quasi-regolari nella forma ordinaria. Di queste, una, la meno generale (perchè applicabile soltanto a quegli integrali quasi-regolari per i quali la $f(x, y, y')$ diventa infinita, per $|y'| \to \infty$, di ordine superiore ad 1) fu estesa alle curve di uno spazio ad un numero qualsiasi di dimensioni da L. M. GRAVES ([6]); un'altra dimostrazione più generale (perchè valida per qualsiasi integrale quasi-regolare) non è estendibile agli spazi ad un qualsiasi numero di dimensioni, e l'impossibilità della sua estensione è per così dire ben naturale, perchè, mentre nel caso delle curve piane, in forma ordinaria, ogni integrale quasi-regolare è semicontinuo, nel caso delle curve dello spazio a tre dimensioni ciò non è più vero (come ha osservato il MCSHANE) e la semicontinuità può stabilirsi soltanto aggiungendo, all'ipotesi che l'integrale sia quasi-regolare, qualche altra condizione, come per esempio che l'integrale sia anche seminormale. Nel passaggio dal piano allo spazio a tre dimensioni si presenta così, per gli integrali in forma ordinaria, la medesima differenza che, nello stesso piano, fu già da me posta in luce tra la forma ordinaria e quella parametrica. Il MCSHANE, nel suo lavoro a cui ci siamo più volte riferiti, servendosi degli integrali parametrici associati a quelli in forma ordinaria, ha dimostrato la semicontinuità degli integrali quasi-regolari seminormali, per curve in uno spazio ad un numero qualsiasi di dimensioni.

Ritornando alle dimostrazioni della semicontinuità contenute nei miei *Fondamenti*, devo rilevare che, oltre alle due cui già ho accennato, ve n'è una terza per gli integrali in forma ordinaria (relativi a curve piane). Tale dimostrazione fu esposta per la semicontinuità su una data curva, in un caso che comprende, in particolare, gli integrali quasi-regolari normali; e qui mostrerò che essa si applica a tutti gli integrali quasi-regolari seminormali. È notevole che questa dimostrazione — che ritengo una delle più semplici che possano essere immaginate — è valida senz'altro per gli integrali in forma ordinaria che dipendono dalle curve di uno spazio ad un numero qualsiasi di dimensioni; ed è valida anche per gli integrali in forma parametrica. Essa, infine, permette di ridurre al minimo le ipotesi sulla derivabilità della funzione $f(x, y, y')$; ed in particolare, elimina completamente, per gli integrali quasi-regolari seminormali, l'ipotesi dell'esistenza della derivata parziale $f_{y'x}$, che io avevo ammessa nei *Fondamenti*.

([6]) L. M. GRAVES: *On the Existence of the Absolute Minimum in space Problems of the Calculus of Variations.* (Annals of Mathematics, Vol. 28 (1927), pp. 153-170).

CAPITOLO I.
La semicontinuità.

1. - Definizioni e ipotesi.

Il *campo* A, del piano (x, y), che considereremo in ciò che segue, sarà semplicemente un insieme di punti, del detto piano, contenente tutti i suoi punti di accumulazione (posti al finito). Per ogni punto (x, y) di A e per qualunque valore (reale) finito di y', immagineremo definita una funzione (reale) $f(x, y, y')$, finita e continua insieme con la sua derivata parziale $f_{y'}(x, y, y')$ (7).

Diremo *curva ordinaria* C una curva appartenente al campo A, rappresentabile nella forma

$$C: \quad y=y(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

con $y(x)$ funzione assolutamente continua in (a, b) e tale che, in tutto questo intervallo, risulti integrabile (nel senso del LEBESGUE) la funzione $f(x, y(x), y'(x))$; e porremo

$$I_C \equiv \int_C f(x, y, y')dx \equiv \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx.$$

Diremo che I_C è un integrale *quasi-regolare positivo* se, in ogni punto (x, y) del campo A, la $f_{y'}(x, y, y')$, come funzione della sola y', è sempre non decrescente; e se, inoltre, in nessun punto (x, y) di A, la $f_{y'}(x, y, y')$ è costante per tutti i valori di y', diremo che I_C è *quasi-regolare positivo seminormale*; infine, se per ogni (x, y) di A, la $f_{y'}(x, y, y')$ è funzione sempre crescente della y', diremo che I_C è *quasi-regolare positivo normale.*

2. - Lemma.

Se I_C è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, per ogni punto (x_0, y_0) di A e per ogni valore y_0', si può determinare (almeno) una terna di numeri p, q, ϱ, con $\varrho>0$, in modo che, in tutti i punti (x, y) di A distanti da (x_0, y_0) non più di ϱ, sia

$$f(x, y, y') > p + qy', \tag{2}$$

per tutti gli y', e

$$f(x, y, y') < p + qy' + \varepsilon, \tag{3}$$

per gli y' tali che $|y'-y_0'| \leqslant \varrho$ (8).

Consideriamo, nel piano (y', u) la figurativa

$$u = f(x_0, y_0, y') \tag{4}$$

(7) Relativamente all'ipotesi fatta sulla derivata $f_{y'}$ vedansi le osservazioni dei n.i 4 e 7.

(8) Per gli integrali quasi-regolari positivi normali, questo lemma è contenuto in quello dei miei *Fondamenti*, Vol. I, p. 407.

della $f(x, y, y')$, relativa al punto (x_0, y_0). Nel punto M della figurativa, corrispondente al valore y_0' di y', sia t la tangente alla figurativa stessa. Per essere I_C quasi-regolare positivo, la figurativa non ha punti al disotto di t.

Supponiamo, in primo luogo, che la figurativa e t abbiano in comune il solo punto M. Allora, se

$$u = p_1 + qy'$$

è l'equazione di t, sarà, per ogni $y' \neq y_0'$,

$$f(x_0, y_0, y') > p_1 + qy'.$$

Inoltre, per la continuità della $f(x, y, y')$, fissato un $\varepsilon > 0$, potremo scegliere un $\varrho_1 > 0$ in modo che, per ogni y' tale che $|y' - y_0'| \leq \varrho_1$, risulti

$$f(x_0, y_0, y') < p_1 + qy' + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Posto $p = p_1 - \frac{\varepsilon}{2}$, avremo anche, per tutti gli y' or ora indicati,

$$p + qy' < f(x_0, y_0, y') < p + qy' + \varepsilon. \tag{6}$$

Sempre per la continuità della $f(x, y, y')$, potremo anche scegliere un ϱ tale che sia $0 < \varrho < \varrho_1$, e

$$p + qy' < f(x, y, y') < p + qy' + \varepsilon, \tag{7}$$

per tutti i punti (x, y) di A distanti da (x_0, y_0) non più di ϱ e per tutti gli y' soddisfacenti alla $|y' - y_0'| \leq \varrho_1$.

Detti M' e M'' i punti della figurativa (4) corrispondenti rispettivamente ai valori $y_0' - \varrho_1$ e $y_0' + \varrho_1$ di y', indichiamo con r' e r'' i raggi uscenti da M e passanti rispettivamente per M' e M''; indichiamo poi con t' la retta di equazione

$$u = p + qy'.$$

Le rette a cui appartengono r' e r'' hanno coefficienti angolari rispettivamente minore e maggiore di quello di t'. Perciò, se ϱ è sufficientemente piccolo, le rette analoghe a quelle contenenti r' e r'', e relative alla figurativa corrispondente al punto (x, y), distante da (x_0, y_0) non più di ϱ, hanno ancora coefficienti angolari rispettivamente minore e maggiore di quello di t', e di conseguenza i raggi analoghi a r' e r'', corrispondenti a (x, y), restano tutti al disopra della retta t'. Quindi anche la parte della figurativa, corrispondente a (x, y), che è relativa ai valori di y' degli intervalli $(-\infty, y_0' - \varrho_1)$, $(y_0' + \varrho_1, +\infty)$, resta al disopra di t', vale a dire, per y' esterno all'intervallo $(y_0' - \varrho_1, y_0' + \varrho_1)$, è

$$f(x, y, y') > p + qy'.$$

Questa disuguaglianza, insieme con la (7) prova le (2) e (3).

Supponiamo ora che la tangente t abbia in comune con la figurativa (4) più di un punto. In questo caso, i punti comuni a t ed alla curva (4) costituiranno tutto un segmento rettilineo (che può anche essere infinito, senza però comprendere tutta la t) di cui indicheremo con (y_1', y_2') la proiezione ortogonale sull'asse delle y'. Se y_1' e y_2' sono ambedue finiti, basterà ripetere il ragionamento fatto nel caso precedente, sostituendovi, al segmento $(y_0'-\varrho_1, y_0'+\varrho_1)$, il segmento $(y_1'-\varrho_1, y_2'+\varrho_1)$. Se, invece, uno dei due y_1' e y_2' è infinito, e supposto, per fissare le idee, che sia $y_2'=+\infty$ (onde y_1' finito), determinato ϱ_1 in modo che, per ogni $y'\geqslant y_1'-\varrho_1$, valga la (5) e quindi anche la (6), si faccia ruotare la t', intorno al punto $(y_0', p+qy_0')$, in modo da diminuirne il coefficiente angolare e in modo anche che, detta $\bar{t}$ la nuova posizione assunta da t' e scritta l'equazione di $\bar{t}$ nella forma

$$u=\bar{p}+\bar{q}y',$$

risulti

$$f(x_0, y_0, y')>\bar{p}+\bar{q}y'$$

per tutti gli y', e

$$f(x_0, y_0, y')<\bar{p}+\bar{q}y'+\varepsilon$$

per tutti gli y' dell'intervallo $(y_1'-\varrho_1, y_0'+\varrho_1)$. Si faccia anche in modo che il coefficiente angolare di $\bar{t}$ risulti maggiore di quello della retta che passa per il punto M e per il punto M' della figurativa corrispondente al valore $y_1'-\varrho_1$ di y'. Allora, scelto un ϱ tale che sia $0<\varrho<\varrho_1$ e

$$(7') \qquad \bar{p}+\bar{q}y'<f(x, y, y')<\bar{p}+\bar{q}y'+\varepsilon$$

per tutti i punti (x, y) di A distanti da (x_0, y_0) non più di ϱ e per tutti gli y' dell'intervallo $(y_1'-\varrho_1, y_0'+\varrho_1)$, e indicati con r' e r'' i raggi uscenti da M e passanti rispettivamente per M' e per il punto M'' della curva (4) corrispondente a $y'=y_0'+\varrho_1$, poichè i coefficienti angolari delle rette su cui giacciono questi raggi sono rispettivamente minore e maggiore di quello di $\bar{t}$, ne risulta, come più sopra, che, se ϱ è sufficientemente piccolo, per ogni punto (x, y) di A distante da (x_0, y_0) non più di ϱ, la parte della corrispondente figurativa relativa agli intervalli $(-\infty, y_1'-\varrho_1)$, $(y_0'+\varrho_1, +\infty)$ resta al disopra di $\bar{t}$, vale a dire è

$$f(x, y, y')>\bar{p}+\bar{q}y'$$

per y' esterno all'intervallo $(y_1'-\varrho_1, y_0'+\varrho_1)$, il che, insieme con la (7') prova il nostro enunciato.

3. - Teorema di semicontinuità.

Se I_C è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, esso è semicontinuo inferiormente (9).

Sia

$$C_0: \quad y=y_0(x), \qquad a_0\leqslant x\leqslant b_0,$$

una curva ordinaria e proponiamoci di dimostrare che l'integrale I_C è semicontinuo inferiormente su tale curva.

(9) Cfr. *Fondamenti*, Vol. I, p. 397, ove però è supposta l'esistenza e la continuità della derivata parziale $f_{y'x}$, ipotesi che qui viene completamente abbandonata.

In virtù del lemma del n.° 2 e di un noto ragionamento, possiamo scomporre la C_0 in un numero finito di archi: $C_{0,1}$, $C_{0,2}$,...., $C_{0,m}$, e determinare m terne di numeri p_r, q_r, ϱ_r $(r=1,2,....,m)$, con $\varrho_r>0$, in modo da aversi

$$f(x,y,y')>p_r+q_r y'$$

per tutti i possibili valori di y' e per tutti i punti (x,y) di A distanti non più di ϱ_r dall'arco $C_{0,r}$. Poniamo

$$f^{(r)}(x,y,y')\equiv f(x,y,y')-(p_r+q_r y')$$
$$I_C^{(r)}\equiv\int_C f(x,y,y')dx-\int_C (p_r+q_r y')dx.$$

Sia ora

$$C:\quad y=y(x),\qquad a\leqq x\leqq b,$$

una qualsiasi curva ordinaria appartenente propriamente all'intorno (ϱ) della C_0, con ϱ minore della metà del più piccolo dei ϱ_r $(r=1,2,....,m)$ e tale che il segmento (a,b) contenga nel suo interno le proiezioni ortogonali sull'asse delle x degli archi $C_{0,2}$, $C_{0,3}$,...., $C_{0,m-1}$. Spezziamo la C in m archi: C_1, C_2,...., C_m, mediante i punti che si proiettano ortogonalmente sull'asse delle x sulle proiezioni degli estremi degli archi $C_{0,2}$,...., $C_{0,m-1}$. Avremo allora

$$I_C-I_{C_0}=\sum_{r=1}^{m}(I_{C_r}^{(r)}-I_{C_{0,r}}^{(r)})+\sum_1^m\left\{\int_{C_r}(p_r+q_r y')dx-\int_{C_{0,r}}(p_r+q_r y')dx\right\},$$

e, preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, risulterà, se ϱ è sufficientemente piccolo,

$$I_C-I_{C_0}>\sum_1^m(I_{C_r}^{(r)}-I_{C_{0,r}}^{(r)})-\varepsilon. \tag{8}$$

Teniamo presente che su C_r e $C_{0,r}$ è sempre $f^{(r)}>0$, per tutti gli y'. Indichiamo con δ_r la proiezione ortogonale di $C_{0,r}$ sull'asse delle x, e con E_r un insieme chiuso di punti di δ_r il quale non contenga nè a_0 nè b_0, soddisfi alla disuguaglianza

$$\int_{\delta_r-E_r}f^{(r)}(x,y_0,y_0')dx<\varepsilon$$

e sia tale che in esso la derivata $y_0'(x)$ esista sempre finita e sia continua sull'insieme stesso.

Consideriamo un punto $\bar{x}$ di E_r. Applicando il lemma del n.° 2 all'integrale $I^{(r)}$ (che è quasi-regolare seminormale come I), possiamo determinare quattro numeri $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{\varrho}>0$, $\bar{\lambda}>0$, in modo che sia

$$f^{(r)}(x,y,y')>\bar{p}+\bar{q}y',$$

per qualsiasi y' e per tutti i punti (x,y) di A distanti non più di $\bar{\varrho}$ dall'arco della C_0

che ha per proiezione ortogonale, sull'asse delle x, il segmento $(\bar{x}-\bar{\lambda}, \bar{x}+\bar{\lambda})$, e che sia anche

$$f^{(r)}(x, y_0(x), y_0'(x)) < \bar{p}+\bar{q}y_0'(x)+\varepsilon$$

per ogni x di E_r soddisfacente alla disuguaglianza $|x-\bar{x}| \leq \bar{\lambda}$. Siccome E_r è *chiuso*, potremo ricoprirlo con un numero finito di intervalli analoghi a $(\bar{x}-\bar{\lambda}, \bar{x}+\bar{\lambda})$. Indichiamo con $\bar{p}_{r,\nu}, \bar{q}_{r,\nu}, \bar{\varrho}_{r,\nu}$ $(\nu=1, 2,\ldots, N_r)$ le terne $\bar{p}, \bar{q}, \bar{\varrho}$, corrispondenti agli intervalli così scelti. Da questi intervalli sopprimiamo quelle parti che eventualmente uscissero dal minimo segmento contenente E_r; con altre opportune soppressioni possiamo ridurci ad un numero finito di intervalli $\omega_{r,1}, \omega_{r,2},\ldots, \omega_{r,S_r}$, non sovrapponentisi, ricoprenti tutto E_r e in modo che, detto E_r' l'insieme dei punti di tutti questi $\omega_{r,s}$ non appartenenti ad E_r, risulti

$$m(E_r') < \frac{\varepsilon}{M_r}, \qquad \int_{E'_r} |y_0'(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{M_r},$$

dove M_r indica un numero superiore al massimo dei moduli $|\bar{p}_{r,\nu}|$, $|\bar{q}_{r,\nu}|$, per $\nu=1, 2,\ldots, N_r$. Indichiamo con $p_{r,s}$ e $q_{r,s}$ i numeri $\bar{p}_{r,\nu}$ e $\bar{q}_{r,\nu}$ che corrispondono a quello degli intervalli $(\bar{x}-\bar{\lambda}, \bar{x}+\bar{\lambda})$ scelti per ricoprire E_r a cui appartiene interamente $\omega_{r,s}$; indichiamo con $C_{0,r,s}$ e $C_{r,s}$ gli archi delle curve C_0 e C che hanno $\omega_{r,s}$ per proiezione ortogonale sull'asse delle x. Avremo allora, se ϱ è sufficientemente piccolo,

$$\sum_{s=1}^{S_r} I^{(r)}_{C_{r,s}} > \sum_{s=1}^{S_r} \int_{C_{r,s}} (p_{r,s}+q_{r,s}y')\,dx$$

ed anche, essendo sempre, su C_r, $f^{(r)}>0$,

$$I^{(r)}_{C_r} > \sum_{s=1}^{S_r} \int_{C_{r,s}} (p_{r,s}+q_{r,s}y')\,dx. \tag{9}$$

Avremo, inoltre, indicando con $E_{r,s}$ e $E'_{r,s}$ le parti di E_r e E_r' contenute in $\omega_{r,s}$,

$$I^{(r)}_{C_{0,r}} = \sum_{s=1}^{S_r} \int_{E_{r,s}} f^{(r)}(x, y_0, y_0')\,dx + \int_{\delta_r - E_r} f^{(r)}(x, y_0, y_0')\,dx,$$

con

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{S_r} \int_{E_{r,s}} f^{(r)}(x, y_0, y_0')\,dx &< \sum_{s=1}^{S_r} \int_{E_{r,s}} (p_{r,s}+q_{r,s}y_0')\,dx + \varepsilon m(E_r) \\
&< \sum_{s=1}^{S_r} \int_{C_{0,r,s}} (p_{r,s}+q_{r,s}y_0')\,dx + M_r \sum_{s=1}^{S_r} \left[m(E'_{r,s}) + \int_{E'_{r,s}} |y_0'|\,dx\right] + \varepsilon m(E_r) \\
&< \sum_{s=1}^{S_r} \int_{C_{0,r,s}} (p_{r,s}+q_{r,s}y_0')\,dx + \varepsilon(2+m(E_r)),
\end{aligned}$$

onde

$$(10)\qquad I^{(r)}_{C_{0,r}} < \sum_{s=1}^{S_r} \int_{C_{0,r,s}} (p_{r,s} + q_{r,s} y_0')dx + \varepsilon(3 + m(E_r)).$$

Dalle (8), (9), (10), segue

$$I_C - I_{C_0} > \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{S_r} \left\{ \int_{C_{r,s}} (p_{r,s} + q_{r,s} y')dx - \int_{C_{0,r,s}} (p_{r,s} + q_{r,s} y_0')dx \right\} - \varepsilon(1 + 3m + b_0 - a_0)$$

e quindi, se ϱ è sufficientemente piccolo,

$$I_C - I_{C_0} > -\varepsilon(2 + 3m + b_0 - a_0);$$

e siccome ε è arbitrario ed m è indipendente da ε, la semicontinuità di I su C_0 è dimostrata.

4. - Osservazioni.

I. - La dimostrazione del n.° precedente vale anche nel caso in cui non si faccia l'ipotesi dell'esistenza della derivata parziale $f_{y'}$. Essa sussiste supponendo soltanto che la $f(x, y, y')$ sia continua e che la sua figurativa, per ogni punto (x, y) del campo A, sia una curva concava verso l'alto, senza mai ridursi ad una retta ([10]).

II. - Il teorema del n.° precedente può anche essere stabilito applicando dapprima il ragionamento ivi fatto agli integrali quasi-regolari positivi normali e deducendo poi la semicontinuità di I_C da quella dell'integrale

$$(11)\qquad \int_C \{ f(x, y, y') + \sigma\sqrt{1 + y'^2} \} dx$$

$(\sigma > 0)$ mediante l'uso della proposizione che daremo più oltre al n.° 15 ([11]).

III. - Dal teorema del n.° 3 segue facilmente che:

Se I_C è un integrale quasi-regolare positivo, esso è semicontinuo inferiormente in ogni classe K di curve ordinarie C tutte di lunghezza inferiore ad uno stesso numero L.

([10]) Recentemente G. BOULIGAND (*Essai sur l'unité des méthodes directes*, Mém. de la Société Royale des Sciences de Liège, 3e Série, t. XIX, 1934) ha dato un'elegante dimostrazione di natura geometrica della semicontinuità degli integrali in forma parametrica $\int_C F(x, y, x', y')ds$, sotto l'ipotesi che questi integrali siano definiti positivi, con la $F(x, y, x', y')$ continua e avente la figurativa concava, in senso stretto, verso l'alto. Anche la dimostrazione della semicontinuità per gli integrali quasi-regolari definiti positivi, da me data nel Vol. I, p. 262 e seguenti, dei *Fondamenti*, vale indipendentemente dall'ipotesi dell'esistenza delle derivate parziali $F_{x'}$, $F_{y'}$: basta in essa sostituire queste derivate con le corrispondenti derivate destre, la cui esistenza è una semplice conseguenza dell'ipotesi che la figurativa della F sia concava.

([11]) Questo artifizio fu già da me sfruttato, in condizioni analoghe, nei *Fondamenti*, Vol. I, p. 293.

Infatti, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, si ponga $\sigma = \varepsilon : 2L$ e si consideri l'integrale (11), il quale risulta quasi-regolare positivo normale, ed al quale è perciò applicabile il teorema del n.° 3. Allora, fissata una curva C_0 di K, si può determinare un $\varrho > 0$ in modo che ogni curva C di K appartenente propriamente all'intorno (ϱ) della C_0 verifichi la disuguaglianza

$$\int_C \{f + \sigma\sqrt{1+y'^2}\}\, dx - \int_{C_0} \{f + \sigma\sqrt{1+y'^2}\}\, dx > -\frac{\varepsilon}{2}$$

vale a dire

$$I_C - I_{C_0} > -\frac{\varepsilon}{2} - \sigma \int_C \sqrt{1+y'^2}\, dx > -\varepsilon.$$

5. - Integrali soltanto quasi-regolari positivi.

Supponiamo che la $f(x, y, y')$ sia, per tutti i valori di y', definita anche in un campo A' contenente A nel suo *interno*, e in modo che, per tutti i punti (x, y) di A' e per qualsiasi y', essa risulti sempre finita e continua insieme con la derivata parziale $f_{y'}$; supponiamo, inoltre, che in A e in A' e per tutti gli y' esista sempre finita e continua anche la derivata parziale $f_{y'x}$ [12]. Abbiamo allora che:

Se I_C è un integrale quasi-regolare positivo, esso è semicontinuo inferiormente [13].

Infatti, posto, in tutto A' e per ogni y',

$$\bar{f}(x, y, y') \equiv f(x, y, y') - \{f(x, y, 0) + y' f_{y'}(x, y, 0)\},$$

$$\bar{I}_C \equiv \int_C \bar{f}(x, y, y')\, dx,$$

questo nuovo integrale risulta anch'esso quasi-regolare positivo, ed ê, inoltre, sempre

$$\bar{f}(x, y, y') \geqq 0, \qquad \bar{f}(x, y, 0) = 0.$$

Ripetendo per $\bar{I}_C$ un ragionamento fatto nei *Fondamenti*, Vol. I, pp. 272-274, a proposito degli integrali in forma parametrica, si ottiene senza difficoltà che $\bar{I}_C$ è semicontinuo inferiormente. E siccome la differenza

$$I_C - \bar{I}_C = \int_C \{f(x, y, 0) + y' f_{y'}(x, y, 0)\}\, dx \tag{12}$$

è un integrale continuo (*Fondamenti*, Vol. I, p. 389), ne viene la semicontinuità di I_C [14].

---

[12] Queste nuove ipotesi fatte sulla $f(x, y, y')$ vengono ammesse solamente per il presente n.°.

[13] Cfr. loc. cit. in [3]. La proposizione che ora stabiliremo non si estende agli integrali I_C relativi a curve C di uno spazio a più di due dimensioni, come risulta da un'osservazione fatta dal McShane (loc. cit in [1]), pp. 210-211).

[14] Le nuove ipotesi sulla $f(x, y, y')$, fatte in questo n.°, intervengono soltanto per affer-

6. - Estensione della semicontinuità.

Ritornando alle ipotesi fatte sulla $f(x, y, y')$ nel n.° 1, vogliamo ora estendere la proprietà della semicontinuità a curve su cui la $f(x, y, y')$ non sia integrabile.

Sia, dunque,
$$\Gamma_0: \quad y = y_0(x), \qquad a_0 \leqslant x \leqslant b_0,$$
una curva appartenente al campo A, con $y_0(x)$ assolutamente continua in (a_0, b_0), e dimostriamo che:

Se I_C è un integrale quasi-regolare positivo seminormale e se la $f(x, y_0(x), y_0'(x))$ non è integrabile in (a_0, b_0), preso ad arbitrio un numero H, si può sempre determinarne un altro $\varrho > 0$ in modo che, ogni curva ordinaria C appartenente propriamente all'intorno (ϱ) della Γ_0 soddisfi alla disuguaglianza
$$I_C > H \quad (^{15}). \tag{13}$$

Basterà ripetere con qualche variante il ragionamento fatto nel n.° 3.

Riprendiamo la considerazione degli archi $\Gamma_{0,r}$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$, che qui sostituiscono i $C_{0,r}$, e degli integrali $I^{(r)}$. Deve esistere almeno uno degli archi $\Gamma_{0,r}$, che indicheremo con $\Gamma_{0,\nu}$, su cui la $f^{(\nu)}$ non risulta integrabile. Per R sufficientemente grande, detto G_ν l'insieme dei punti dell'intervallo δ_ν (dell'asse delle x su cui si proietta $\Gamma_{0,\nu}$) in cui la $y_0'(x)$ esiste finita e tale che $|y_0'(x)| \leqslant R$, si avrà pertanto
$$\int_{G_\nu} f^{(\nu)}(x, y_0, y_0')dx > H + 1 + \left| \sum_{r=1}^{m} \int_{\Gamma_{0,r}} (p_r + q_r y_0')dx \right|.$$

Sia E_ν un componente chiuso di G_ν, non contenente nè a_0 nè b_0, sul quale la $y_0'(x)$ risulti continua e tale che
$$\int_{E_\nu} f^{(\nu)}(x, y_0, y_0')dx > H + 1 + \left| \sum_{r=1}^{m} \int_{\Gamma_{0,r}} (p_r + q_r y_0')dx \right|. \tag{14}$$

Conservando ai simboli lo stesso significato del n.° 3, con la sola variante per E_ν (e con la sostituzione di C_0 con Γ_0), potremo scrivere così
$$I_C - \int_{E_\nu} f^{(\nu)}(x, y_0, y_0')dx = \sum_{r=1}^{m} \left\{ I_{C_r}^{(r)} + \int_{C_r} (p_r + q_r y')dx \right\} - \int_{E_\nu} f^{(\nu)}(x, y_0, y_0')dx$$
$$> I_{C_\nu}^{(\nu)} + \sum_{r=1}^{m} \int_{C_r} (p_r + q_r y')dx - \int_{E_\nu} f^{(\nu)}(x, y_0, y_0')dx$$

---

mare che il secondo membro di (12) è un integrale continuo. Le sole ipotesi del n.° 1 non permetterebbero di affermare questa continuità (cfr. *Fondamenti*, Vol. I, pp. 390-392).

(15) Cfr. *Fondamenti*, Vol. I, p. 443, ove però è supposta l'esistenza e la continuità della derivata $f_{y'x}$.

e quindi, per ϱ sufficientemente piccolo,

$$I_C-\int_{\dot{E}_\nu} f^{(\nu)}(x,y_0,y_0')\,dx > I_{C_\nu}^{(\nu)}+\sum_{r=1}^{m}\int_{\dot{\Gamma}_{0,r}}(p_r+q_r y_0')\,dx-\varepsilon-\int_{\dot{E}_\nu} f^{(\nu)}(x,y_0,y_0')\,dx.$$

Ma è, da un lato,

$$I_{C_\nu}^{(\nu)}>\sum_{s=1}^{S_\nu}\int_{\dot{C}_{\nu,s}}(p_{\nu,s}+q_{\nu,s}y')\,dx,$$

e dall'altro

$$\begin{aligned}\int_{\dot{E}_\nu} f^{(\nu)}(x,y_0,y_0')\,dx&=\sum_{s=1}^{S_\nu}\int_{\dot{E}_{\nu,s}} f^{(\nu)}(x,y_0,y_0')\,dx\\ &<\sum_{s=1}^{S_\nu}\int_{\dot{\Gamma}_{0,\nu,s}}(p_{\nu,s}+q_{\nu,s}y_0')\,dx+\varepsilon(2+m(E_\nu)),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}I_C-\int_{\dot{E}_\nu} f^{(\nu)}(x,y_0,y_0')\,dx&>\sum_{s=1}^{S_\nu}\left\{\int_{\dot{C}_{\nu,s}}(p_{\nu,s}+q_{\nu,s}y')\,dx-\int_{\dot{\Gamma}_{0,\nu,s}}(p_{\nu,s}+q_{\nu,s}y_0')\,dx\right\}\\ &+\sum_{r=1}^{m}\int_{\dot{\Gamma}_{0,r}}(p_r+q_r y_0')\,dx-\varepsilon(3+b_0-a_0).\end{aligned}$$

Per ϱ sufficientemente piccolo, la somma relativa all'indice s risulta minore, in modulo, di ε e si ha pertanto, tenendo presente la (14),

$$I_C>H+1-\varepsilon(4+b_0-a_0)$$

e quindi la (13), per essere ε arbitrario.

7. - Osservazioni.

I. - Per il teorema del n.° precedente si può ripetere quanto è detto nelle osservazioni I, II, III, del n.° 4 a proposito del teorema del n.° 3. In particolare, *il teorema del n.° 6 vale indipendentemente dall'ipotesi che I_C sia seminormale, quando ci si limiti ad una classe di curve ordinarie tutte di lunghezza inferiore ad uno stesso numero.*

II. - Il teorema del n.° 6 si estende a tutti gli integrali quasi-regolari positivi in modo analogo a quanto si è fatto nel n.° 5 per il teorema del n.° 3.

Capitolo II.

Il minimo per le classi complete di curve.

8. - Campo A_L.

In ciò che segue, il *campo A* (del n.° 1) quando sarà supposto *limitato* verrà indicato con A_L.

9. - Teorema I.

Supposto: 1°) *che l'integrale I_C sia quasi-regolare positivo;*

2°) *che esista una funzione $\Phi(z)$ definita in* $(0, +\infty)$, *inferiormente limitata, tale che $\Phi(z):z \to +\infty$, per $z \to +\infty$ e per la quale si abbia, in tutto il campo limitato A_L,*

$$f(x, y, y') \geqslant \Phi(|y'|);$$

in ogni classe completa ([16]) *K di curve ordinarie C, appartenenti ad A_L, esiste il minimo assoluto di I_C* ([17]).

Considerata una classe completa K di curve ordinarie C appartenenti ad A_L, per ognuna di queste curve abbiamo

$$I_C \geqslant \int_C \Phi(|y'|)dx \geqslant -|\Phi_0|D,$$

dove Φ_0 indica il limite inferiore (che abbiamo supposto finito) di $\Phi(z)$ in $(0, +\infty)$, e D è la massima delle differenze fra le ascisse dei punti di A_L. Pertanto, il limite inferiore i di I_C in K risulta finito.

Sia

$$C_1, \quad C_2, \ldots, \quad C_n, \ldots \tag{15}$$

una successione di curve di K, minimizzante per I_C, tale cioè che soddisfi, per ogni n, alla disuguaglianza

$$I_{C_n} \leqslant i + \frac{1}{n} \quad ([18]),$$

e proviamo che, posto

$$C_n: \quad y = y_n(x), \qquad a_n \leqslant x \leqslant b_n,$$

le $y_n(x)$ sono tutte equiassolutamente continue.

Scelto ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, consideriamo un qualsiasi gruppo $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_m, \beta_m)$, di intervalli non sovrapponentisi, in numero finito, di (a_n, b_n). Indichiamo con Y' un numero positivo tale che, per $|y'| \geqslant Y'$, sia

$$\Phi(|y'|) : |y'| > 2(|i| + 1) : \varepsilon,$$

e dividiamo i punti degli (α_r, β_r) $(r = 1, 2, \ldots, m)$ in due insiemi E_1 e E_2, ponendo

---

([16]) *Fondamenti*, Vol. II, p. 281.

([17]) Questa proposizione è dovuta a M. NAGUMO (*Über die gleichmässige Summierbarkeit und ihre Anwendung auf ein Variationsproblem.* Japanese Journal of Mathematics, Vol. VI, 1929, pp. 173-182) e costituisce una generalizzazione di quella contenuta nei *Fondamenti*, Vol. II, p. 282.

([18]) In tutta la presente Memoria, considereremo sempre, per semplicità, le successioni minimizzanti di curve; ma i ragionamenti che faremo si potranno ripetere immediatamente per le successioni minimizzanti di insiemi di curve, analogamente a quanto è stato fatto nei *Fondamenti*, Vol. II.

in E_1 tutti quelli in cui la $y_n'(x)$ esiste finita e in modulo minore di Y', e in E_2 tutti gli altri. Avremo allora

$$\left|\sum_{r=1}^{m}\{y_n(\beta_r)-y_n(\alpha_r)\}\right| \leqq \sum\int_{\alpha_r}^{\beta_r}|y_n'|\,dx \leqq Y'm(E_1)+\frac{\varepsilon}{2(|i|+1)}\int_{E_2}\Phi(|y_n'|)dx$$

$$\leqq Y'\sum(\beta_r-\alpha_r)+\frac{\varepsilon}{2(|i|+1)}\{I_{C_n}-\Phi_0 m(E_1)\}$$

$$\leqq \left\{Y'+|\Phi_0|\frac{\varepsilon}{2}\right\}\sum(\beta_r-\alpha_r)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Perciò, posto $\delta=\varepsilon:\{2Y'+|\Phi_0|\varepsilon\}$, per tutti i gruppi di intervalli (α_r, β_r) indicati, i quali soddisfino alla $\sum(\beta_r-\alpha_r)\leqq\delta$, è

$$\left|\sum_{r=1}^{m}\{y_n(\beta_r)-y_n(\alpha_r)\}\right|\leqq\varepsilon,$$

il che prova l'equiassoluta continuità delle $y_n(x)$.

Si può dunque estrarre dalla (15) un'altra successione

$$C_1',\quad C_2',\ldots,\quad C_n',\ldots,$$

con

$$I_{C_n'}\leqq i+\frac{1}{n}, \tag{16}$$

uniformemente convergente verso una curva

$$C_0:\quad y=y_0(x),\qquad a\leqq x\leqq b,$$

appartenente al campo A_L, con $y_0(x)$ assolutamente continua. E siccome l'integrale I_C è quasi-regolare positivo, ed anche seminormale (in virtù della condizione 2°) dell'enunciato del teorema), dalla (16) e dalla proposizione del n.° 6 segue che la funzione $f(x, y_0(x), y_0'(x))$ è integrabile su (a_0, b_0) e che perciò la C_0 è una curva ordinaria, la quale (per essere K una classe completa) appartiene a K. Ancora dalla (16) e dal teorema del n.° 3, segue poi

$$I_{C_0}=i,$$

il che dimostra il teorema.

10. - Teorema II.

Supposto: 1°) *che I_C sia quasi-regolare positivo;*

2°) *che, in ciascun punto (x, y) del campo limitato A_L, sia, per $|y'|\to\infty$,*

$$\left|\frac{f(x,y,y')}{y'}\right|\to\infty; \tag{17}$$

in ogni classe completa K di curve ordinarie C appartenenti ad A_L, esiste il minimo assoluto di I_C.

La dimostrazione di questo teorema, dovuto a McSHANE ([19]), risulterà senz'altro da quanto proveremo nel n.° seguente.

11. - Equivalenza dei teoremi I e II.

Le condizioni 1°) *e* 2°) *del teorema del n.° 9 sono equivalenti a quelle* 1°) *e* 2°) *del teorema del n.° 10.*

È evidente che supposte verificate le condizioni del teorema del n.° 9 risultano soddisfatte anche quelle del teorema del n.° 10. Basta dunque provare la reciproca.

Supponiamo perciò verificate le condizioni del teorema del n.° 10 e osserviamo, in primo luogo, che, per esse, in ogni punto (x, y) di A_L, la $f_{y'}(x, y, y')$ risulta funzione non decrescente di y' e tale che $f_{y'} \to +\infty$, per $y' \to +\infty$, e $f_{y'} \to -\infty$, per $y' \to -\infty$.

Indichiamo, per ogni y', con $\Phi_1(y')$ il minimo valore di $f(x, y, y')$ in tutto A_L, e mostriamo che, per $y' \to +\infty$, è

$$\frac{\Phi_1(y')}{y'} \to +\infty. \tag{18}$$

Supponiamo, infatti, che ciò non sia vero. Esisterà allora un H positivo, sufficientemente grande, tale che, per ogni intero positivo n, si abbia almeno un valore y_n' soddisfacente alle disuguaglianze

$$y_n' > n, \qquad \frac{\Phi_1(y_n')}{y_n'} < H.$$

In corrispondenza a y_n' avremo almeno un punto (x_n, y_n) di A_L in cui sarà $f(x_n, y_n, y_n') = \Phi_1(y_n')$ e quindi

$$\frac{f(x_n, y_n, y_n')}{y_n'} < H; \tag{19}$$

e avremo pure, in A_L, almeno un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ tale che, in ogni suo intorno cadano sempre dei punti (x_n, y_n) di indice n comunque grande. Ma, in virtù della (17) e della $f_{y'} \to +\infty$ per $y' \to +\infty$, avremo, se p è un numero positivo sufficientemente grande,

$$f(\bar{x}, \bar{y}, p) > Hp, \qquad f_{y'}(\bar{x}, \bar{y}, p) > H,$$

e quindi, in tutti i punti (x, y) di A_L appartenenti ad un intorno sufficientemente piccolo di $(\bar{x}, \bar{y})$,

$$f(x, y, p) > Hp, \qquad f_{y'}(x, y, p) > H,$$

ed anche, se $y' \geqslant p$,

$$f_{y'}(x, y, y') > H.$$

([19]) Loc. cit. in ([1]), (pag. 298).

Nell'intorno indicato di $(\bar{x}, \bar{y})$ è pertanto, se $y' > p$,

$$\frac{f(x, y, y') - f(x, y, p)}{y' - p} > H,$$

onde

$$f(x, y, y') > Hy',$$

e all'intorno detto non possono perciò (per la (19)) appartenere i punti (x_n, y_n) con $n > p$.

La (18) è così dimostrata e nello stesso modo si prova che è, per $y' \to -\infty$,

$$\frac{\Phi_1(y')}{y'} \to -\infty.$$

Osserviamo ora che la $\Phi_1(y')$ è una funzione inferiormente limitata, perchè, determinato un $y_0' > 0$ tale che, per ogni $|y'| \geqq y_0'$ sia $\Phi_1(y') \geqq 1$, il limite inferiore di $\Phi_1(y')$ in $(-y_0', y_0')$ coincide col minimo della $f(x, y, y')$ per (x, y) in A_L e y' in $(-y_0', y_0')$. Dopo di ciò, definiamo la funzione $\Phi(z)$ in $(0, +\infty)$ ponendola, per ogni z di tale intervallo, uguale al minore dei due valori $\Phi_1(z)$ e $\Phi_1(-z)$. Con questa definizione si ha, in tutto A_L e per qualsiasi y',

$$f(x, y, y') \geqq \Phi_1(y') \geqq \Phi(|y'|)$$

e la $\Phi(z)$ risulta inferiormente limitata e tale che $\Phi(z) : z \to +\infty$ per $z \to +\infty$. È così provato che le condizioni 1°) e 2°) del teorema del n.° 9 seguono da quelle del teorema del n.° 10.

12. - Teorema III.

Supposto: 1°) *che* I_C *sia un integrale quasi-regolare positivo;*

2°) *che ogni punto* (x_0, y_0) *del campo limitato* A_L *soddisfi o alla condizione* [*condizione* α)] *che in tutti i punti di* A_L *di un suo intorno valga, per* $|y'| \to \infty$, *la*

$$\left| \frac{f(x, y, y')}{y'} \right| \to \infty,$$

oppure all'altra condizione [*condizione* β)] *che ad esso si possano far corrispondere due funzioni* $\varphi(z)$, $\Psi(z)$ *e tre costanti* $l > 0$, $a > 0$ *e* μ, *con* $\varphi(z)$ *definita in* $(0, l)$, *non negativa, tendente a* $+\infty$ *per* $z \to +0$, *e integrabile in* $(0, l)$, *e* $\Psi(z)$ *definita in* $(0, +\infty)$, *non negativa, non decrescente, tale che, per* $z \to +0$, *sia*

(20) $$z\varphi(z)\Psi(\varphi(z)) \to +\infty,$$

e in modo che, in tutti i punti (x, y) *di* A_L *sufficientemente vicini a* (x_0, y_0), *risulti, per tutti gli* y',

(21) $$f(x, y, y') \geqq |x - x_0|^a |y'|^{1+a} \Psi^a(|y'|) + \mu;$$

in ogni classe completa K *di curve ordinarie* C *appartenenti ad* A_L, *esiste il minimo assoluto di* I_C.

Impostiamo il ragionamento come nella dimostrazione del n.° 9 e conserviamo le stesse notazioni ivi adottate.

Tenendo presente quanto fu stabilito nel n.° 11, dalla condizione 2ª) segue che ad ogni punto (x, y) di A_L corrisponde un intorno in cui la $f(x, y, y')$ è inferiormente limitata; perciò la $f(x, y, y')$ risulta inferiormente limitata in tutto A_L ed i è finito.

Per provare che le $y_n(x)$ sono tutte equiassolutamente continue basterà dimostrare che, per ogni punto (x_0, y_0) di A_L, esiste un intorno ω_0, rettangolare, a lati paralleli agli assi x e y, tale che le $y_n(x)$ risultino equiassolutamente continue sulle parti dei loro intervalli di definizione che corrispondono alle parti delle curve C_n contenute in ω_0, intendendo per parte di una C_n contenuta in ω_0 l'insieme di tutti gli archi della C_n contenuti in ω_0.

Se nel punto (x_0, y_0) vale la *condizione* α) l'equiassoluta continuità delle $y_n(x)$ sulle parti indicate è evidente per quanto si è detto nel n.° 9 (tenendo anche presente il n.° 11).

Sia dunque (x_0, y_0) un punto di A_L soddisfacente alla *condizione* β), e indichiamo con ω_0 il quadrato di centro (x_0, y_0) a lati paralleli agli assi delle x e delle y e sufficientemente piccolo affinchè in tutti i suoi punti (purchè appartenenti ad A_L) valga la (21). Considerata una qualunque C_n, indichiamo con $\overline{C}_n$ la sua parte contenuta in ω_0.

Scelto ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, sia $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_m, \beta_m)$ un qualsiasi gruppo di intervalli non sovrapponentisi, in numero finito, appartenenti interamente alla proiezione ortogonale di $\overline{C}_n$ sull'asse delle x. Poi, fissati due numeri maggiori di zero, λ e Y', che determineremo fra poco, dividiamo i punti degli (α_r, β_r) $(r = 1, 2, \ldots, m)$ in quattro insiemi E_1, E_2, E_3, E_4, ponendo in E_1 tutti quelli appartenenti a $(x_0 - \lambda, x_0 + \lambda)$ e in cui la $y_n'(x)$ esiste finita e tale che $|y_n'(x)| \leqq \varphi(|x - x_0|)$; in E_2 tutti gli altri che appartengono ancora a $(x_0 - \lambda, x_0 + \lambda)$; in E_3 tutti i punti esterni a $(x_0 - \lambda, x_0 + \lambda)$ e per i quali la $y_n'(x)$ esiste finita e in modulo $\leqq Y'$; in E_4 i rimanenti punti esterni all'intervallo detto. Avremo allora:

$$\left| \sum_{r=1}^{m} \{ y_n(\beta_r) - y_n(\alpha_r) \} \right| \leqq \sum \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |y_n'| \, dx$$

$$\leqq \int_{E_1} \varphi(|x - x_0|) dx + \int_{E_2} \frac{|x - x_0|^\alpha |y_n'|^{1+\alpha} \Psi^\alpha(|y_n'|)}{|x - x_0|^\alpha \varphi^\alpha(|x - x_0|) \Psi^\alpha(\varphi(|x - x_0|))} dx$$

$$+ Y' m(E_3) + \int_{E_4} \frac{f(x, y_n, y_n') - \mu}{\lambda^\alpha Y'^\alpha \Psi^\alpha(Y')} dx$$

$$\leqq 2 \int_0^\lambda \varphi(z) dz + \int_{E_2} \frac{f(x, y_n, y_n') - \mu}{|x - x_0|^\alpha \varphi^\alpha(|x - x_0|) \Psi^\alpha(\varphi(|x - x_0|))} dx$$

$$+ Y' \sum (\beta_r - \alpha_r) + \int_{E_4} \frac{f(x, y_n, y_n') - \mu}{\lambda^\alpha Y'^\alpha \Psi^\alpha(Y')} dx.$$

Fissiamo λ in modo che sia $\lambda < l$,

$$\int_0^\lambda \varphi(z)dz < \varepsilon, \qquad z^\alpha \varphi^\alpha(z)\,\Psi^\alpha(\varphi(z)) > 1:\varepsilon$$

per tutti gli z tali che $0 < z \leqslant \lambda$; poi fissiamo Y' in modo che risulti

$$\lambda^\alpha Y'^\alpha \Psi^\alpha(Y') > 1:\varepsilon.$$

Ne seguirà, indicando con $\bar{\mu}$ il limite inferiore della $f(x, y, y')$ in tutto A_L e per tutti gli y',

$$(22) \qquad \sum_{r=1}^{m} \int_{\alpha_r}^{\beta_r} |y_n'|\, dx < \varepsilon\{2 + I_{C_n} + D(|\bar{\mu}| + |\mu|)\} + Y' \sum (\beta_r - \alpha_r)$$
$$< \varepsilon\{3 + |i| + D(|\bar{\mu}| + |\mu|)\} + Y' \sum (\beta_r - \alpha_r).$$

Pertanto, per tutti i gruppi di intervalli (α_r, β_r) indicati, i quali soddisfino alla $\sum (\beta_r - \alpha_r) < \varepsilon : Y'$, risulta

$$\left| \sum_{r=1}^{m} \{ y_n(\beta_r) - y_n(\alpha_r) \} \right| < \varepsilon\{4 + |i| + D(|\bar{\mu}| + |\mu|)\}$$

e questo prova l'equiassoluta continuità delle $y_n(x)$ sulle parti corrispondenti a ω_0, e quindi, come già si è osservato, l'equiassoluta continuità delle $y_n(x)$.

Esiste dunque una successione C_1', C_2',...., C_n',...., con

$$(23) \qquad I_{C'_n} \leqslant i + \frac{1}{n}$$

e uniformemente convergente verso una curva

$$C_0: \quad y = y_0(x), \qquad a_0 \leqslant x \leqslant b_0,$$

del campo A_L, con $y_0(x)$ assolutamente continua.

Proviamo che la $f(x, y_0(x), y_0'(x))$ è integrabile in (a_0, b_0). A tale scopo indichiamo con Γ l'insieme dei punti della C_0 che non soddisfano alla *condizione* a). Γ risulta *chiuso*, e nell'intorno di ciascuno dei suoi punti vale la (21). Perciò tutti i punti di C_0 che appartengono ad un certo intorno di un punto di Γ e che sono distinti da questo punto, verificano la *condizione* a) e non possono far parte di Γ. Cosicchè Γ è costituito di punti *isolati*; ed essendo *chiuso*, non può contenere che un numero finito di punti. Siano $x_1 < x_2 < .... < x_\nu$ le ascisse dei punti di Γ, e consideriamo l'intervallo (x_r, x_{r+1}), per un qualunque $r < \nu$. Se (α, β) è un intervallo tale che $x_r < \alpha < \beta < x_{r+1}$, in (α, β) la $f(x, y_0, y_0')$ risulta integrabile in virtù di quanto si è mostrato nel n.º 9, perchè essendo sempre $f(x, y, y') \geqslant \bar{\mu}$, dalla (23) risulta che sono limitate superiormente tutte le parti degli integrali $I_{C'_n}$

relative agli archi delle C_n' che si proiettano ortogonalmente su (α, β). Per la semicontinuità inferiore stabilita nel n.° 3 segue allora

$$\int_\alpha^\beta \{f(x, y_0, y_0') - \bar{\mu}\} dx \leqslant i + 1 + D|\bar{\mu}|$$

e per essere sempre $f - \bar{\mu} \geqslant 0$, ne viene l'integrabilità di $f(x, y_0, y_0') - \bar{\mu}$ su tutto (x_r, x_{r+1}), e quindi anche quella di $f(x, y_0, y_0')$. Così la funzione ora scritta risulta integrabile su tutto (a_0, b_0); e per essere la K una classe completa, C_0 è una curva ordinaria appartenente a K.

Infine, dalla semicontinuità inferiore di I su ciascuno degli archi di C_0 corrispondenti agli intervalli (α, β) dianzi considerati, dal fatto che è sempre, in tutto A_L, $f - \bar{\mu} \geqslant 0$, e dalla (23), segue facilmente la $I_{C_0} = i$.

13. - Casi particolari.

a). La condizione β) del n.° 12 è verificata se, nell'intorno del punto (x_0, y_0), è

$$f(x, y, y') \geqslant k|x - x_0|^\alpha |y'|^{1+\alpha+\sigma} + \mu, \tag{24}$$

con $k > 0$, $\alpha > 0$, $\sigma > 0$.

Infatti, per un β tale che

$$1 : \left(1 + \frac{\sigma}{\alpha}\right) < \beta < 1,$$

ponendo

$$\varphi(z) = z^{-\beta}, \qquad \Psi(z) = k^{1/\alpha} z^{\sigma/\alpha},$$

si ha, per $z \to +0$,

$$z\varphi(z)\Psi(\varphi(z)) = k^{1/\alpha} z^{1-\beta-\beta\sigma/\alpha} \to +\infty$$

ed è

$$|x - x_0|^\alpha |y'|^{1+\alpha} \Psi^\alpha(|y'|) + \mu = k|x - x_0|^\alpha |y'|^{1+\alpha+\sigma} + \mu \quad [20].$$

Se nella (24) fosse $\sigma = 0$, la *condizione β)* non risulterebbe più verificata ed il teorema del n.° 12 non continuerebbe a sussistere sostituendo in esso la *condizione β)* con la (24), per $\sigma = 0$ [21].

b). La condizione β) del n.° 12 è verificata se, nell'intorno del punto (x_0, y_0), è

$$f(x, y, y') \geqslant k|x - x_0|^\alpha |y'|^{1+\alpha} \log^{\alpha+\sigma}(1 + |y'|) + \mu \tag{25}$$

oppure

$$f(x, y, y') \geqslant k|x - x_0|^\alpha |y'|^{1+\alpha} \log^\alpha(1 + |y'|)[\log\{1 + \log(1 + |y'|)\}]^{\alpha+\sigma} + \mu, \tag{26}$$

ecc., con $k > 0$, $\alpha > 0$, $\sigma > 0$.

---

[20] Il teorema del n.° 12 contiene perciò, come caso particolare, quello dato in loc. cit. in [4].

[21] Vedi, per questa affermazione, loc. cit. in [4].

Supponiamo, dapprima, verificata la (25). Allora, per un β tale che $1<\beta<1+\sigma/a$, ponendo

$$\varphi(z)=z^{-1}\,|\log z\,|^{-\beta}, \qquad \Psi(z)=k^{1/a}\log^{1+\sigma/a}(1+z),$$

si ha, per $z\to+0$,

$$\begin{aligned} z\varphi(z)\,\Psi(\varphi(z)) &= k^{1/a}|\log z\,|^{-\beta}\log^{1+\sigma/a}(1+z^{-1}\,|\log z\,|^{-\beta}) \\ &> k^{1/a}|\log z\,|^{-\beta}\,|\log\,(z\,|\log z\,|^{\beta})\,|^{1+\sigma/a} \\ &= k^{1/a}|\log z\,|^{1+\sigma/a-\beta}\,|\,1+\beta\log^{-1}z\log|\log z\,||^{1+\sigma/a}\to+\infty \end{aligned}$$

ed è

$$|\,x-x_0\,|^a\,|\,y'\,|^{1+a}\Psi^a(|\,y'\,|)+\mu=k\,|\,x-x_0\,|^a\,|\,y'\,|^{1+a}\log^{a+\sigma}(1+|\,y'\,|)+\mu.$$

Supponiamo ora verificata la (26). Allora, per un β ancora tale che $1<\beta<1+\sigma/a$, ponendo

$$\varphi(z)=z^{-1}\,|\log z\,|^{-1}\,|\log|\log z\,||^{-\beta}, \qquad \Psi(z)=k^{1/a}\log\,(1+z)\log^{1+\sigma/a}\{1+\log\,(1+z)\},$$

si ha, per $z\to+0$,

$$z\varphi(z)\,\Psi(\varphi(z))>k^{1/a}\,\frac{\log\varphi(z)}{|\log z\,|}\,\frac{\log^{1+\sigma/a}\log\varphi(z)}{|\log|\log z\,||^{\beta}}\to+\infty,$$

ed è

$$\begin{aligned} &|\,x-x_0\,|^a\,|\,y'\,|^{1+a}\Psi^a(|\,y'\,|)+\mu \\ &\qquad=k\,|\,x-x_0\,|^a\,|\,y'\,|^{1+a}\log^a(1+|\,y'\,|)[\log\{1+\log\,(1+|\,y'\,|)\}]^{a+\sigma}+\mu. \end{aligned}$$

Osservazione. - Se nella (25) fosse $\sigma=0$, la *condizione* β) non risulterebbe più verificata ed il teorema del n.° 12 non continuerebbe a sussistere sostituendo in esso la *condizione* β) con la (25), per $\sigma=0$. Consideriamo, infatti, l'integrale

$$\int_0^{1:e} xy'^2\log\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{27}$$

Nella classe di tutte le curve ordinarie C che congiungono i punti $(0,1)$ e $(1:e,0)$, del piano (x,y), e che appartengono al rettangolo di vertici opposti $(0,0)$ e $(1:e,1)$, non esiste il minimo assoluto di (27). Ed invero, per la curva C_ϱ definita da $y=1$ in $(0,\varrho)$, con $0<\varrho<1:e$, e da $y=\{\log|\log x\,|\}:\log|\log\varrho\,|$, in $(\varrho,1:e)$, è

$$\begin{aligned} \int_0^{1:e} xy'^2\log\sqrt{1+y'^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}\log^{-2}|\log\varrho\,|\int_\varrho^{1:e} x^{-1}\log^{-2}x\log\{1+(x\log x\log|\log\varrho\,|)^{-2}\}\,dx \\ &< \tfrac{1}{2}\log^{-2}|\log\varrho\,|\int_\varrho^{1:e} x^{-1}\log^{-2}x\,\{\log 2+\log 2(x\log x\log|\log\varrho\,|)^{-2}\}\,dx \\ &< \log^{-2}|\log\varrho\,|\left\{\log 2\int_0^{1:e} x^{-1}\log^{-2}x\,dx-\int_\varrho^{1:e} x^{-1}\log^{-1}x\,dx+\log|\log\varrho\log|\log\varrho\,||\right\}\to 0, \end{aligned}$$

per $\varrho\to 0$. D'altra parte, l'integrale (27) non può mai risultare negativo e il suo limite inferiore i, nella classe di curve indicata, è quindi $=0$. Ma, se il minimo assoluto esistesse, la curva $y=y_0(x)$ minimante dovrebbe dare

$$\int_0^{1:e} xy_0'^2 \log\sqrt{1+y_0'^2}\,dx=0$$

onde $y_0'\equiv 0$, vale a dire $y_0(x)=\text{cost.}$, e tale curva non potrebbe appartenere alla classe indicata.

14. - Lemma.

Se I_C è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, per ogni punto (x_0, y_0) di A si può determinare (almeno) una quaterna di numeri p, q, ν, ϱ, con $\nu>0$, $\varrho>0$, in modo che, in tutti i punti (x, y) di A distanti da (x_0, y_0) non più di ϱ, e per tutti gli y', sia

$$f(x, y, y')-(p+qy')>\nu\,|y'|.$$

Questa proposizione è contenuta in un'altra dei miei *Fondamenti*, Vol. I, pp. 407-410. La sua dimostrazione si ottiene facilmente dal ragionamento fatto nel n.° 2.

15. - Lemma.

Se I_C è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, e se H è una classe di curve ordinarie C tutte appartenenti al campo limitato A_L e tutte soddisfacenti alla disuguaglianza

$$I_C\leq M,$$

con M numero fisso, le variazioni totali delle funzioni che rappresentano le C sono tutte inferiori ad un numero fisso, o, ciò che è lo stesso, le lunghezze delle curve C restano tutte inferiori ad un numero fisso.

Questa proposizione trovasi nella Memoria citata del McSHANE (loc. cit. in ([1]), p. 294). La sua dimostrazione segue dal lemma del n.° 14 con ragionamento del tutto analogo a quello fatto dal McSHANE, nel luogo indicato.

16. - Teorema IV.

Supposto: 1°) *che I_C sia quasi-regolare positivo, seminormale;*

2°) *che i punti (x, y) del campo limitato A_L in cui non è verificata la condizione*

$$\lim_{|y'|\to\infty}\left|\frac{f(x, y, y')}{y'}\right|=\infty \tag{28}$$

costituiscano un insieme G giacente, in parte, su un numero finito od una infinità numerabile di curve

$$\Gamma_\nu:\quad y=\varphi_\nu(x),\qquad \alpha_\nu\leq x\leq\beta_\nu,$$

con $\varphi_\nu(x)$ *funzione assolutamente continua, e, in parte, su rette* R *parallele all'asse delle* x *e intersecanti l'asse delle* y *in un insieme di punti di misura nulla;*

in ogni classe completa K *di curve ordinarie* C *appartenenti ad* A_L*, esiste il minimo assoluto di* I_C ([22]).

Dimostriamo, innanzi tutto, che, nelle ipotesi poste, per le curve ordinarie C di A_L soddisfacenti tutte alla condizione

$$(29) \qquad I_C \leqq M,$$

le funzioni $y(x)$ corrispondenti sono tutte ugualmente continue.

Supponiamo il contrario. Allora esisterà un $\lambda > 0$ tale che ad ogni intero positivo n corrisponderanno almeno una funzione $\bar{y}_n(x)$, rappresentante una curva ordinaria $\bar{C}_n$ di A_L soddisfacente alla (29), ed una coppia di punti $x_{n,1}$, $x_{n,2}$, appartenenti all'intervallo dell'asse delle x proiezione ortogonale della $\bar{C}_n$, e soddisfacenti alle disuguaglianze

$$0 < x_{n,2} - x_{n,1} < 1 : n, \qquad |\bar{y}_n(x_{n,2}) - \bar{y}_n(x_{n,1})| > \lambda.$$

Sia x_0 un punto dell'asse delle x tale che in ogni suo intorno cadano sempre punti $x_{n,1}$ di indice n comunque grande. Per semplicità di scrittura, supponiamo che $x_{n,1}$ tenda senz'altro a x_0 per $n \to \infty$. Possiamo anche supporre che $\bar{y}_n(x_{n,1})$ e $\bar{y}_n(x_{n,2})$ tendano a due limiti $y_{0,1}$, $y_{0,2}$, e che sia, per fissare le idee, $y_{0,1} < y_{0,2}$. Sarà allora necessariamente $y_{0,2} - y_{0,1} \geqq \lambda$.

Scegliamo due numeri l_1, l_2, con la condizione $y_{0,1} < l_1 < l_2 < y_{0,2}$. Per n maggiore di un certo $\bar{n}$, sarà

$$\bar{y}_n(x_{n,1}) < l_1, \qquad \bar{y}_n(x_{n,2}) > l_2.$$

Indichiamo con P_1 e P_2 i due punti (x_0, l_1), (x_0, l_2). I punti dell'insieme G che si trovano sul segmento P_1P_2 costituiscono un insieme di misura nulla. Possiamo dunque fissare un insieme E di punti del segmento P_1P_2, che sia chiuso, abbia misura $> (l_2 - l_1) : 2$, e sul quale valga sempre la (28). Fissato anche un numero $N > 4M : (l_2 - l_1)$, con ragionamento analogo a quello fatto nel n.° 11 si può provare che, per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di E esistono un intorno ed un numero p tali che, in tutto l'intorno (e per punti di A_L) sia sempre, se $|y'| \geqq p$,

$$(30) \qquad \frac{f(x, y, y')}{|y'|} > N.$$

E siccome E è chiuso, possiamo dedurne che è possibile di ricoprire E con un numero finito di intervalli $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$, non sovrapponentisi, la cui lunghezza

([22]) Questa proposizione contiene come casi particolari quelle dei miei *Fondamenti*, Vol. II, pp. 287, 296, 307 (n.° 89), ed anche quella data dal McShane in loc. cit. in ([1]), p. 301.

complessiva risulterà necessariamente $>(l_2-l_1):2$, e in modo che, in tutti i punti (x, y) di A_L distanti non più di un certo $\varrho>0$ da uno qualunque di questi intervalli, la (30) risulti verificata per tutti gli y' in modulo non inferiori ad un certo Y'.

Sia δ un numero positivo $<\varrho$ e $<(l_2-l_1):8Y'$, e supponiamo che il numero $\bar{n}$ già indicato più sopra sia anche tale che, per $n>\bar{n}$, risulti

$$x_0-\delta<x_{n,1}<x_{n,2}<x_0+\delta.$$

Consideriamo, per $n>\bar{n}$, l'arco della $\bar{C}_n$ che si proietta ortogonalmente sull'asse delle x nel segmento $(x_{n,1}, x_{n,2})$, e indichiamo con $\bar{C}_n^*$ la parte di quest'arco la cui proiezione ortogonale sulla retta $x=x_0$ cade sui segmenti $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_s$. Indichiamo poi con $e_{n,1}$ l'insieme dei punti dell'asse delle x, su cui si proiettano ortogonalmente i punti di $\bar{C}_n^*$, e nei quali la $\bar{y}_n'(x)$ esiste finita e in modulo $\geqq Y'$, e con $e_{n,2}$ l'insieme degli altri punti che fanno parte della proiezione ortogonale di $\bar{C}_n^*$ sull'asse delle x. È allora

$$\int_{e_{n,1}} f(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n')dx>N\int_{e_{n,1}}|\bar{y}_n'|\,dx\geqq N\Big(\int_{e_{n,1}+e_{n,2}}|\bar{y}_n'|\,dx-Y'\int_{e_{n,2}}dx\Big),$$

e poichè, da un lato, la variazione totale di $\bar{y}_n(x)$ su $e_{n,1}+e_{n,2}$ è almeno uguale alla somma delle lunghezze di $\Delta_1, ..., \Delta_s$, vale a dire $>(l_2-l_1):2$, mentre, dall'altro, è

$$Y'\int_{e_{n,2}}dx<Y'(x_{n,2}-x_{n,1})<2Y'\delta<(l_2-l_1):4,$$

ne viene

$$\int_{e_{n,1}} f(x, \bar{y}_n, \bar{y}_n')dx>N(l_2-l_1):4. \tag{31}$$

Osserviamo ora che, senza ledere la generalità del nostro ragionamento, possiamo supporre che qui sia sempre $f\geqq 0$. Ed infatti, in caso contrario, basterebbe considerare, invece di I_C, l'integrale

$$\bar{I}_C\equiv\int_C[f(x, y, y')-\{f(x, y, 0)+y'f_{y'}(x, y, 0)\}]dx$$

che soddisfa alle stesse condizioni poste per I_C e che, per le curve che verificano la (29), soddisfa ad una disuguaglianza analoga, in virtù del lemma del n.° 15. Supponendo dunque, come è lecito, $f\geqq 0$, da (29) e (31) segue

$$N(l_2-l_1):4<M,$$

che contraddice alla scelta fatta del numero N $(N>4M:(l_2-l_1))$. È così provato che, per le curve C di A_L che soddisfano alla (29) le $y(x)$ corrispondenti sono tutte ugualmente continue.

Stabilito questo punto, e (senza più tener conto dell'ipotesi supplementare $f \geqq 0$) scelta in K una successione minimizzante $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$,

$$(32) \qquad I_{C_n} \leqq i + \frac{1}{n} \quad ([23]),$$

si può senz'altro asserire che esiste un'altra successione minimizzante, che per semplicità di scrittura supporremo sia la $C_1, C_2, \ldots$ stessa, convergente uniformemente ad una curva continua

$$(33) \qquad y = y_0(x), \qquad a_0 \leqq x \leqq b_0.$$

E siccome le C_n sono tutte di lunghezza inferiore ad un numero fisso (per il lemma del n.° 15), ne viene che la curva (33) è rettificabile, vale a dire che la $y_0(x)$ è funzione, oltre che continua, anche a variazione limitata. Dimostriamo che è pure assolutamente continua.

Per ottenere ciò basterà provare ([24]) che, ad ogni insieme di misura nulla sull'asse delle x, la $y = y_0(x)$ fa corrispondere un insieme di valori di y pure di misura nulla.

Sia E_x un insieme di misura nulla dell'intervallo (a_0, b_0). La parte di E_x a cui corrispondono punti $(x, y_0(x))$ giacenti sopra una curva Γ_ν dà, mediante la $y = y_0(x)$, un insieme di valori y di misura nulla, perchè la $\varphi_\nu(x)$ è assolutamente continua. Perciò la parte di E_x a cui corrispondono punti $(x, y_0(x))$ giacenti sulle curve Γ o sulle rette R, dà un insieme di valori di y di misura nulla. Consideriamo la parte rimanente E_x' di E_x, e osserviamo subito che i punti $(x, y_0(x))$ ad essa corrispondenti soddisfano alla (28). Indichiamo con E_y' l'insieme dei valori $y_0(x)$ corrispondenti a E_x': resta da provare che E_y' è di misura nulla.

Supponiamo, se è possibile, che sia $m(E_y') > 0$. L'insieme P' dei punti della curva (33) corrispondenti a quelli di E_x' ha per proiezione ortogonale sull'asse delle y l'insieme E_y', onde la misura di P', contata sulla curva, è $\geqq m(E_y') > 0$. Sia P'' un insieme chiuso contenuto in P' e tale che

$$m(P') - m(P'') < m(E_y') : 2.$$

La proiezione ortogonale di P'' sull'asse delle y è un componente E_y'' di E_y', ed è $m(E_y'') > 0$, perchè, altrimenti, dovrebbe essere, da un lato,

$$m(E_y' - E_y'') = m(E_y'),$$

e dall'altro,

$$m(E_y' - E_y'') \leqq m(P' - P'') < m(E_y') : 2.$$

([23]) Che il limite inferiore i di I_C in K sia finito risulta dalla stessa dimostrazione del lemma del n.° 15, od anche dall'applicazione di tale lemma con la considerazione dell'integrale $\bar{I}_C$, che è sempre $\geqq 0$.

([24]) B. Levi: *Ricerche sulle funzioni derivate.* (Rend. R. Accad. Lincei, Vol. XV (1° semestre 1906), pp. 674-684; vedi, in particolare, p. 679).

Procediamo ora con ragionamento analogo a quello fatto più sopra per provare l'uniforme continuità delle $y(x)$ corrispondenti alle curve che verificano la (29). Fissato dunque un numero $N > 4(|i|+1) : m(E_y'')$, potremo ricoprire P'' con un numero finito di archi a_r della curva (33) non sovrapponentisi, in modo che, in tutti i punti (x, y) di A_L, distanti non più di un certo $\varrho > 0$ da uno qualsiasi di questi archi, e per tutti gli y' in modulo maggiori di un certo Y', valga la (30). Gli a_r potranno evidentemente esser scelti in modo che sia

$$\sum a_r < m(P'') + \varepsilon \quad \text{con} \quad \varepsilon < m(E_y'') : 4Y'.$$

Se indichiamo con δ_r la proiezione ortogonale sull'asse delle x di a_r, avremo

$$\sum \delta_r < \varepsilon.$$

Consideriamo di ogni curva C_n la parte C_n^* che si proietta ortogonalmente sull'asse delle x negli intervalli δ_r. Poichè C_n tende uniformemente, per $n \to \infty$, alla curva (33), la variazione totale di $y_n(x)$ (funzione corrispondente a C_n) sugli intervalli δ_r è, per ogni n maggiore di un certo $\bar{n}$, maggiore della metà di quella corrispondente della $y_0(x)$ e quindi $> m(E_y'') : 2$. E analogamente a quanto abbiamo visto più sopra, avremo, per $n > \bar{n}$,

$$\int_{e_{n,1}} f(x, y_n, y_n')dx > Nm(E_y'') : 4.$$

dove $e_{n,1}$ indica l'insieme dei punti dei δ_r in cui è $|y_n'(x)| \geqq Y'$. Supponendo ancora, come è lecito, che sia sempre $f \geqq 0$, si giunge a

$$Nm(E_y'') : 4 < I_{C_n} \leqq i + 1$$

contro il modo con cui è stato scelto N. Con ciò l'assoluta continuità della $y_0(x)$ è provata.

Dal teorema del n.° 6 segue ora, in virtù della (32), che la $f(x, y_0(x), y_0'(x))$ è integrabile in (a_0, b_0), vale a dire che la (33) è una curva ordinaria, la quale poi apparterrà a K (classe completa); infine, per il n.° 3 ed ancora per la (32), la (33) risulta curva minimante.

17. - Teorema V.

Supposto: 1°) *che I_C sia quasi-regolare positivo;*

2°) *che i punti (x, y) del campo limitato A_L in cui non è verificata la* (28) *e neppure la condizione β)* (del n.° 12) *costituiscano un insieme G giacente, in parte, su un numero finito od un' infinità numerabile di curve*

$$\Gamma_\nu : \quad y = \varphi_\nu(x), \qquad \alpha_\nu \leqq x \leqq \beta_\nu,$$

con $\varphi_\nu(x)$ assolutamente continua, e, in parte, su rette R parallele all'asse delle x e intersecanti l'asse delle y in un insieme di punti di misura nulla;

3°) *che in ciascuno dei punti di* G *la* $f(x, y, y')$, *come funzione della sola* y', *non si riduca ad una funzione lineare;*

in ogni classe completa K *di curve ordinarie* C, *appartenenti ad* A_L, *esiste il minimo assoluto di* I_C.

Occorre, innanzi tutto, mostrare che anche per l'integrale I_C attuale (pur non essendo seminormale) vale la proposizione del n.° 15. A tale scopo, osserviamo che nei punti $(\bar{x}, \bar{y})$ in cui è verificata la (28), la $f(\bar{x}, \bar{y}, y')$ come funzione della sola y' non è lineare, e che perciò la medesima cosa accade in tutto un intorno di ciascuno dei punti $(\bar{x}, \bar{y})$. Lo stesso vale in tutto un intorno dei punti di G. Infine, per ciascun punto (x_0, y_0) in cui vale la *condizione* β), esiste tutto un intorno in cui è verificata la (21).

Ciò posto, consideriamo un quadrato Q a lati paralleli agli assi coordinati e contenente tutto il campo A_L. Suddividiamo Q in tanti quadrati uguali q_r, sufficientemente piccoli, in modo che, per ogni q_r, o valga per tutti gli (x, y) del quadrato stesso una disuguaglianza come la (21), oppure per tutti gli (x, y) del quadrato la $f(x, y, y')$, considerata come funzione della sola y', non sia mai lineare. Siano q_r' i quadrati q_r in cui vale la prima condizione; q_r'' quelli in cui vale la seconda.

Nel campo costituito da tutti i q_r'', l'integrale I_C risulta quasi-regolare positivo seminormale, perciò, considerata una qualsiasi curva ordinaria C del campo A_L, e detta C'' la parte di essa che appartiene ai q_r'', è, per un ragionamento analogo a quello fatto dal McShane, a pag. 294 di loc. cit. in ([1]),

$$I_{C''} \geqq m_1 \int_{C''} |y'|\, dx + m_2,$$

essendo m_1 e m_2 due costanti, indipendenti dalla C, con $m_1 > 0$.

Dalla (22) segue poi, indicando con C' la parte della C che appartiene ai q_r',

$$I_{C'} > \int_{C'} |y'|\, dx + m_3\,;$$

e pertanto, potendosi sempre supporre $m_1 \leqq 1$,

$$I_C \geqq m_1 \int_C |y'|\, dx + m_4, \tag{34}$$

con m_1 e m_4 costanti indipendenti dalla C. Questa disuguaglianza prova che, per le curve ordinarie contenute in A_L e per cui è $I_C \leqq M$, con M numero fisso, le variazioni totali delle corrispondenti $y(x)$ sono tutte inferiori ad un numero fisso.

Dalla (34) segue pure che il limite inferiore i di I_C in una data classe K, è finito $(\geqq m_4)$.

Dopo di ciò si può ripetere il ragionamento fatto nel n.° precedente osservando che, se sul segmento P_1P_2 vi è almeno un punto (x_0, y_0) in cui è soddisfatta la *condizione* β), ne risulta subito l'equiassoluta continuità delle $\bar{y}_n(x)$ in corrispondenza degli archi delle $\overline{C}_n$ che vengono a trovarsi in un intorno convenientemente piccolo di (x_0, y_0), e quindi l'impossibilità dell'esistenza delle $\overline{C}_n$, vale a dire l'equicontinuità delle funzioni $y(x)$ corrispondenti alle curve ordinarie che verificano la (29).

Nello stabilire l'assoluta continuità della $y_0(x)$, si terrà presente che, se un punto $(x_0, y_0(x_0))$ soddisfa alla *condizione* β), tale punto risulta senz'altro interno ad un arco γ della curva (33) in corrispondenza del quale la $y_0(x)$ è assolutamente continua. Considerato allora il massimo arco $\bar{\gamma}$ della curva (33) che contiene come arco parziale γ, e che è tale che, per ogni suo arco parziale, *interno*, la $y_0(x)$ risulti assolutamente continua, tutta la parte di E_x che corrisponde a punti di $\bar{\gamma}$ dà, mediante la $y = y_0(x)$, un insieme di valori y di misura nulla. Si osserverà pure che di archi $\bar{\gamma}$, sulla curva (33), non possono esservene che un'infinità numerabile, al più.

Per giungere, infine, a stabilire che la $f(x, y_0, y_0')$ è integrabile in (a_0, b_0) e che sulla curva (33) il valore di I è esattamente i, si sfrutteranno le osservazioni dei n.i 7 (I) e 4 (III) ([25]).

CAPITOLO III.

Il minimo per le classi di curve più comuni.

18. - Teorema VI.

Supposto: 1°) *che I_C sia quasi-regolare positivo;*

2°) *che i punti (x, y) del campo limitato A_L in cui non è verificata la* (28) *e neppure la condizione* β) (del n.° 12) *costituiscano un insieme G giacente su un numero finito $\bar{\nu}$ di curve, del campo A_L,*

$$\Gamma_\nu: \quad y = \varphi_\nu(x), \qquad a_\nu \leq x \leq \beta_\nu,$$

con $\varphi_\nu(x)$ assolutamente continua, intendendosi che ognuna di queste curve possa anche ridursi ad un solo punto;

3°) *che sia sempre, in tutto il campo A_L e per tutti gli y', $f(x, y, y') \geqq 0$, e che sopra ogni curva Γ_ν sia quasi dappertutto*

$$f(x, \varphi_\nu(x), \varphi_\nu'(x)) = 0 \quad ([26]);$$

4°) *che, per ciascuna curva Γ_ν, esistano un intorno ed un numero A*

([25]) Un esempio in cui è applicabile il teorema del n.° 17, ma non quelli dei n.i 9, 10, 12 e 16, è dato dalla funzione

$$f(x, y, y') \equiv x^2 y^2 y'^4 + (1 - y)^2 \sqrt{1 + y'^2}$$

quando si prenda per campo A_L il quadrato di vertici opposti (0, 0), (1, 1).

([26]) Si può, evidentemente, anche ammettere che in tutto A_L sia sempre $f(x, y, y') \geqq c$, con $f(x, \varphi_\nu(x), \varphi_\nu'(x)) = c$ quasi dappertutto su ogni curva Γ_ν.

tali che, ogni curva ordinaria (del campo A_L), in tale intorno contenuta e senza punti comuni con le curve Γ_1, Γ_2,...., $\Gamma_{\bar{\nu}}$, la quale sia minimante per l'integrale I fra tutte le curve ordinarie (del campo A_L) che hanno gli stessi suoi punti terminali, abbia lunghezza inferiore a Λ;

nella classe $\bar{K}$ di tutte le curve ordinarie C, appartenenti al campo A_L e aventi tutte i punti terminali in due dati punti, oppure in due dati insiemi chiusi senza punti comuni, esiste il minimo assoluto di I_C ([27]).

Ripetendo il ragionamento del n.° 16 e tenendo conto di un'osservazione già fatta nel n.° 17, si dimostra anche qui che, per tutte le curve ordinarie che soddisfano alla disuguaglianza $I_C \leqq M$, con M numero fisso, le $y(x)$ corrispondenti sono equicontinue ([28]). Si può dunque considerare senz'altro una successione minimizzante C_1, C_2,...., C_n,.... di curve di $\bar{K}$, tali che

$$I_{C_n} \leqq i + \frac{1}{n}$$

e che le $y_1(x)$, $y_2(x)$,...., $y_n(x)$,.... corrispondenti convergano uniformemente ad una curva continua

$$y = y_0(x), \qquad a_0 \leqq x \leqq b_0. \tag{35}$$

Se ϱ è un numero positivo qualsiasi, su tutti gli archi della curva (35) i cui punti distano di almeno ϱ dai punti di G la $y_0(x)$ risulta (in virtù di quanto abbiamo provato nei n.i precedenti) assolutamente continua. Perciò se la curva (35) non contiene punti di G e neppure punti di accumulazione di punti di G, la $y_0(x)$ è ovunque assolutamente continua.

Esaminiamo il caso in cui la curva (35) contenga almeno un punto di G o di accumulazione per G: tale punto dovrà appartenere ad una delle curve Γ_ν. Sia, in questa ipotesi, x_1 la minima ascissa dei punti della curva (35) che si trovano sulle Γ_ν e sia Γ_{ν_1} quella di queste curve che contiene il punto $(x_1, y_0(x_1))$ e che ha il minimo indice. Indichiamo con x_1' la massima ascissa dei punti comuni alla curva (35) e a Γ_{ν_1}. Sarà $x_1 \leqq x_1'$. Sia poi x_2 la minima ascissa dei punti della curva (35) che si trovano sulle Γ_ν di indice $\nu \neq \nu_1$ e che hanno ascissa $\geqq x_1'$. Detta Γ_{ν_2} la Γ_ν di minimo indice $\neq \nu_1$ che contiene il punto $(x_2, y_0(x_2))$, indichiamo con x_2' la massima ascissa dei punti comuni alla curva (35) ed a Γ_{ν_2}. Sarà $x_2 \leqq x_2'$. E così si prosegua. Otterremo delle ascisse, tutte comprese fra a_0 e b_0,

$$x_1 \leqq x_1' \leqq x_2 \leqq x_2' \leqq x_3 \leqq x_3' \leqq .... \leqq x_m \leqq x'_m,$$

con $m \leqq \bar{\nu}$, ed i punti $(x_r, y_0(x_r))$, $(x_r', y_0(x_r'))$ apparterranno alla Γ_{ν_r}.

([27]) Questa proposizione contiene come caso particolare un importante teorema dato da B. Manià (loc. cit. in ([5])). Si intende che, se $\bar{K}$ è la classe di tutte le curve ordinarie di A_L aventi i punti terminali in due dati insiemi chiusi G_1 e G_2, senza punti comuni, tutti i primi punti terminali delle curve devono appartenere ad uno ed uno solo di questi insiemi, e tutti i secondi punti terminali all'altro.

([28]) Nel caso attuale la dimostrazione si semplifica notevolmente.

Dimostriamo che la $y_0(x)$ è assolutamente continua sull'intervallo (a_0, x_1), supponendo $a_0 < x_1$. Sia $a_0 < \xi < x_1$. I punti della curva (35) che corrispondono all'intervallo (a_0, ξ) sono tutti esterni alle curve Γ_ν; perciò, per un'osservazione già fatta, su (a_0, ξ) la $y_0(x)$ è assolutamente continua. Rileviamo, inoltre, che se è $a_0 < \xi < \xi' < x_1$, tutto l'arco della curva (35) che corrisponde a (ξ, ξ') è minimante per l'integrale I fra tutte le curve ordinarie (del campo A_L) che con tale arco hanno in comune i punti terminali. Questo stesso arco non ha punti comuni con le Γ_ν e, se ξ è sufficientemente vicino a x_1, appartiene a quell'intorno di cui si parla nell'ipotesi 4°); pertanto la sua lunghezza risulta $< \Lambda$. E siccome ciò vale per tutti gli ξ' tali che $\xi < \xi' < x_1$, ne viene che anche l'arco della curva (35) che corrisponde all'intervallo (ξ, x_1) è di lunghezza $\leq \Lambda$. Dunque la $y_0(x)$ è a variazione limitata in (a_0, x_1); e poichè essa è assolutamente continua in (a_0, ξ) per ogni ξ tale che $a_0 < \xi < x_1$, la sua assoluta continuità in tutto (a_0, x_1) è assicurata. In modo analogo si dimostra l'assoluta continuità della $y_0(x)$ negli intervalli (x_1', x_2), (x_2', x_3),...., (x'_m, b_0).

Se quindi definiamo una nuova funzione $\overline{y}_0(x)$ ponendola uguale alla $y_0(x)$ in tutti gli intervalli ora considerati, e ponendo invece

$$\overline{y}_0(x) = \varphi_{\nu_r}(x) \quad \text{in} \quad (x_r, x_r'),$$

per $r = 1, 2, ..., m$, abbiamo che la $\overline{y}_0(x)$ è assolutamente continua in tutto (a_0, b_0).

Da quanto si è già detto nel n.° 17 segue poi che, per $a_0 < \xi < x_1$, la $f(x, y_0, y_0')$ è integrabile in (a_0, ξ) e tale che

$$\int_{a_0}^{\xi} f(x, y_0, y_0')dx < i + 1 ;$$

e siccome è sempre $f \geq 0$, ne risulta l'integrabilità di $f(x, y_0, y_0')$ in tutto (a_0, x_1); e così anche in (x_1', x_2), (x_2', x_3),.... Se ne deduce che la $f(x, \overline{y}_0, \overline{y}_0')$ è integrabile su tutto (a_0, b_0), vale a dire che la curva

$$y = \overline{y}_0(x), \qquad a_0 \leq x \leq b_0,$$

appartiene alla classe $\overline{K}$. Ed osservando che sugli intervalli (x_r, x_r') è quasi dappertutto $f(x, \overline{y}_0, \overline{y}_0') = 0$, ne segue facilmente la

$$\int_{a_0}^{b_0} f(x, \overline{y}_0, \overline{y}_0')dx = i,$$

e la dimostrazione del teorema è compiuta ([29]).

([29]) Esempi ai quali è applicabile il teorema VI si hanno considerando le funzioni

$$f(x, y, y') \equiv y^2 y'^2, \qquad f(x, y, y') \equiv (x^2 + y^2)y'^2, \qquad f(x, y, y') \equiv (y^3 - x^2)^2(1 + y'^2)$$

e scegliendo per campo A_L un quadrato a lati paralleli agli assi coordinati e di centro (0, 0).

19. - Casi particolari.

È importante dare dei criteri per la verifica dell'ipotesi 4°) del teorema del n.° precedente. A questo scopo si può affermare che *l'ipotesi 4°), ora ricordata, risulta sicuramente verificata quando sussistono contemporaneamente le condizioni a) e b) che seguono.*

Condizione a). - Per ogni curva Γ_ν, esiste un $\varrho_\nu > 0$ in modo che:

1°) appartengano al campo A_L tutti i punti (x, y) tali che $\alpha_\nu \leq x \leq \beta_\nu$, $\varphi_\nu(x) - \varrho_\nu \leq y \leq \varphi_\nu(x) + \varrho_\nu$;

oppure, tutti quelli tali che $\alpha_\nu \leq x \leq \beta_\nu$, $\varphi_\nu(x) - \varrho_\nu \leq y \leq \varphi_\nu(x)$, e nessuno di quelli tali che $\alpha_\nu < x < \beta_\nu$, $\varphi_\nu(x) < y \leq \varphi_\nu(x) + \varrho_\nu$;

oppure, tutti quelli tali che $\alpha_\nu \leq x \leq \beta_\nu$, $\varphi_\nu(x) \leq y \leq \varphi_\nu(x) + \varrho_\nu$, e nessuno di quelli tali che $\alpha_\nu < x < \beta_\nu$, $\varphi_\nu(x) - \varrho_\nu \leq y < \varphi_\nu(x)$;

2°) i punti (x, y) distanti non più di ϱ_ν da $(\alpha_\nu, \varphi_\nu(\alpha_\nu))$ e di ascissa minore di α_ν, siano tutti esterni o tutti interni ad A_L;

3°) i punti (x, y) distanti non più di ϱ_ν da $(\beta_\nu, \varphi_\nu(\beta_\nu))$ e di ascissa maggiore di β_ν, siano tutti esterni o tutti interni ad A_L.

Condizione b). - Per ogni (x, y) di A_L, ad eccezione al più di quelli delle curve Γ_ν e di un numero *finito* di rette (r) parallele all'asse delle y, e per ogni y' finito, la $f(x, y, y')$ ammette, finite e continue, le derivate parziali dei primi due ordini, e la $f_{y'}(x, y, y')$ risulta funzione sempre crescente della y'; di più:

nei punti (x, y) esterni alle Γ_ν ed alle rette (r), e contenuti in un intorno sufficientemente piccolo delle Γ_ν, tutti i segmenti rettilinei $y =$ cost., appartenenti ad A_L, sono delle estremali e nessuna estremale che non sia uno di questi segmenti rettilinei ha mai tangente parallela all'asse delle x ([30]);

oppure, per ogni Γ_ν esiste un intorno tale che, nei suoi punti (x, y), appartenenti ad A_L, esterni a tutte le Γ ed alle rette (r), è, per $y' = 0$, sempre $f_{y'y'} > 0$, $f_y - f_{y'x} - y'f_{y'y} > 0$, o sempre $f_{y'y'} > 0$, $f_y - f_{y'x} - y'f_{y'y} < 0$, intendendosi che il segno dell'espressione $f_y - f_{y'x} - y'f_{y'y}$, per $y' = 0$, possa non essere il medesimo per gli intorni di due diverse Γ;

oppure, su ogni curva ordinaria $\bar{C}$ di A_L, appartenente ad un intorno sufficientemente piccolo di una Γ_ν, non avente nessun punto in comune con le Γ e con le rette (r), e che sia minimante per l'integrale I fra tutte le curve ordinarie di A_L aventi gli stessi estremi, è, per tutti gli y' in modulo convenientemente piccoli e positivi (o, invece, negativi), sempre $f_{y'y'} > 0$, $f_y - f_{y'x} - y'f_{y'y} \geqq 0$, o sempre $f_{y'y'} > 0$, $f_y - f_{y'x} - y'f_{y'y} \leqq 0$, intendendosi che il segno di $f_y - f_{y'x} - y'f_{y'y}$, per gli y' detti, possa non essere il medesimo su due diverse curve $\bar{C}$;

oppure, su ognuna delle curve $\bar{C}$ or ora indicate, è per tutti gli $y' \gtrless$ di un

---

([30]) Se tutti i segmenti $y =$ cost. indicati sono delle estremali, nei punti in cui è $f_{y'y'} > 0$ nessuna estremale, che non sia uno di tali segmenti, può avere tangente parallela all'asse delle x.

certo $Y'>0$ (o, invece, $\leqslant -Y'$) sempre $f_{y'y'}>0$, $f_y-f_{y'x}-y'f_{y'y}\geqslant 0$, o sempre $f_{y'y'}>0$, $f_y-f_{y'x}-y'f_{y'y}\leqslant 0$, intendendosi che il segno di $f_y-f_{y'x}-y'f_{y'y}$, per gli y' detti, possa non essere lo stesso su due diverse $\overline{C}$.

Per provare quanto abbiamo affermato basta osservare che, considerata una delle curve $\overline{C}$ sopra indicate, essa, se appartiene ad un intorno sufficientemente piccolo di una Γ_ν, risulta [per la *condizione* a)] composta di punti tutti interni al campo A_L, fatta eccezione al più per i suoi estremi. Essa è perciò ([31]) una curva avente ovunque tangente, che varia in modo continuo. I punti della $\overline{C}(y=\overline{y}(x))$ considerata nei quali la $\overline{y}'(x)$ è finita ed è $f_{y'y'}(x, \overline{y}(x), \overline{y}'(x))>0$ sono interni ad archi di estremali, soddisfacenti all'equazione

$$y''=\frac{f_y-f_{y'x}-y'f_{y'y}}{f_{y'y'}};$$

e le varie condizioni poste fanno sì che la $\overline{C}$ non abbia mai (esclusi al più i punti terminali) punti di massimo oppure punti di minimo, oppure sia costituita (al più) di un arco ove la $\overline{y}'(x)$ resta sempre $\leqslant Y'$, o sempre $\geqslant -Y'$, e di un altro ove la $\overline{y}(x)$ è monotona. In tutti i casi, dunque, la lunghezza della $\overline{C}$ non può superare $D+2D'+2DY'$, dove D e D' rappresentano le massime differenze rispettivamente fra le ascisse e fra le ordinate dei punti del campo A_L.

20. - Campo A_R.

Indicheremo sempre, nel seguito, con A_R un campo A (del n.° 1) costituito da tutti i punti di un rettangolo a lati paralleli agli assi delle x e delle y, e soltanto da tali punti.

21. - Teorema VII.

Supposto: 1°) *che I_C sia quasi-regolare positivo;*

2°) *che la $f(x,y,y')$ ammetta* ([32]), *finita e continua, per ogni (x,y) di A_R e qualsiasi y', la derivata parziale $f_x(x,y,y')$, e che esistano quattro costanti M_1, N_1, N_2, N_3, di cui la prima positiva e le altre positive o nulle, in modo che sia, per ciascun punto (x,y) di A_R, per ogni y' finito ed ogni φ tale che $|\varphi|<M$ e che $(x+\varphi, y)$ sia un punto di A_R,*

$$|f(x+\varphi, y, y')|\leqslant N_1|f(x,y,y')|+N_2|y'|+N_3; \tag{36}$$

3°) *che sia, per ogni (x,y) di A_R e per $|y'|\to\infty$,*

$$|f-y'f_{y'}|\to\infty; \tag{37}$$

([31]) L. TONELLI: *Sulle proprietà delle estremanti* (Annali della R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Serie II, Vol. III (1934), pp. 213-237), p. 233.

([32]) Oltre la $f_{y'}$ già supposta esistente nel n.° 1.

nella classe $\overline{K}$ di tutte le curve ordinarie C appartenenti al campo rettangolare A_R e aventi tutte i punti terminali in due dati punti (di diversa ascissa), esiste il minimo assoluto di I_C ([33]).

Osserviamo, innanzi tutto, che, per le ipotesi 1°) e 3°), I_C risulta *seminormale*; perciò il limite inferiore i, di I_C in $\overline{K}$, è finito ([34]).

Osserviamo, inoltre, che, in virtù di 1°), in ogni punto (x, y) di A_R l'espressione $f-y'f_{y'}$ è funzione della y' sempre non crescente per $y'>0$ e sempre non decrescente per $y'<0$. Infatti, se è $y_1'<y_2'$, si ha

$$\begin{aligned}\{f(x,y,y_2')-y_2'f_{y'}(x,y,y_2')\}-\{f(x,y,y_1')-y_1'f_{y'}(x,y,y_1')\}\\ =y_1'\{f_{y'}(x,y,y_1')-f_{y'}(x,y,\tilde{y}')\}+y_2'\{f_{y'}(x,y,\tilde{y}')-f_{y'}(x,y,y_2')\},\end{aligned}$$

con $y_1'<\tilde{y}'<y_2'$; ed il secondo membro di questa uguaglianza è $\leqslant 0$ se $0\leqslant y_1'<y_2'$, $\geqslant 0$ se $y_1'<y_2'\leqslant 0$. Ne segue, per la (37), che, se $|y'|\to\infty$,

$$f-y'f_{y'}\to-\infty. \tag{38}$$

Inoltre, se in un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di A_R è, per $|y'|\geqslant\bar{y}'$,

$$f-y'f_{y'}<-\Phi,$$

questa disuguaglianza vale, in tutto un intorno di $(\bar{x}, \bar{y})$, per $|y'|=\bar{y}'$ e quindi anche per $|y'|\geqslant\bar{y}'$. Perciò la $f-y'f_{y'}$, per $|y'|\to\infty$, *tende a $-\infty$ uniformemente in tutto A_R.*

Ciò premesso, sia $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ una successione minimizzante di curve di $\overline{K}$:

$$I_{C_n}\leqslant i+\frac{1}{n}. \tag{39}$$

Per stabilire il nostro teorema, basta dimostrare che le funzioni $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$, corrispondenti alle C_n, sono tutte equiassolutamente continue nell'intervallo (a, b) (in cui sono definite), a e b essendo le ascisse dei punti terminali di tutte le C_n.

Dalla (39), segue (n.° 15) l'esistenza di un numero finito L tale che le lunghezze L_n delle C_n soddisfino tutte alla $L_n\leqslant L$; perciò, fissato un numero $\Lambda>0$ e detto $E_{n,\Lambda}$ l'insieme dei punti di (a, b) in cui è $|y_n'(x)|\geqslant\Lambda$, risulta

$$L\geqslant L_n\geqslant\sqrt{1+\Lambda^2}\,m(E_{n,\Lambda}),$$

e quindi, per ogni Λ maggiore o uguale ad un certo Λ_0,

$$m(E_{n,\Lambda})\leqslant\frac{L}{\sqrt{1+\Lambda_0^2}}<\frac{b-a}{2}.$$

([33]) Questo teorema fu dato dal McShane in loc. cit. in ([1]), p. 309.

([34]) Se, in un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di A_R, fosse $f(\bar{x}, \bar{y}, y')=a+by'$, si avrebbe, in esso, $f-y'f_{y'}=a$ e la (37) non potrebbe essere verificata. Per la finitezza di i cfr. quanto si è detto in ([23]).

Ne segue che, detto E_n l'insieme dei punti di (a, b) in cui $|y_n'(x)| \leq A_0$, è

$$m(E_n) > \frac{b-a}{2}. \tag{40}$$

Supponiamo $A > A_0$ e poniamo

$$c_{n,1} = \int\limits_{E_{n,A}} \sqrt{1+y_n'^2}\,dx, \qquad c_{n,2} = \int\limits_{E_n} \sqrt{1+y_n'^2}\,dx,$$

$$i_n(x) = \begin{cases} -c_{n,1} & \text{in } E_n \\ c_{n,2} & \text{in } E_{n,A} \\ 0 & \text{altrove,} \end{cases}$$

$$\omega_n(x) = \int_a^x i_n(x)\sqrt{1+y_n'^2}\,dx.$$

Risulta

$$\omega_n(a) = 0, \qquad \omega_n(b) = 0,$$

e se è $m(E_{n,A}) = 0$, ne viene $c_{n,1} = 0$, $\omega_n(x) \equiv 0$.

Dopo di ciò, costruiamo la curva $C_{n,t}$, di cui indicheremo con (ξ, η) il punto corrente, ponendo

$$C_{n,t}: \begin{cases} \xi = x + t\omega_n(x) \\ \eta = y_n(x) \end{cases} \qquad a \leq x \leq b. \tag{41}$$

ξ e η risultano funzioni assolutamente continue di x in (a, b), ed è quasi dappertutto

$$\frac{d\xi}{dx} = 1 + t\omega_n'(x);$$

e se è $\bar{t} < 1 : 2L(1+A_0^2)^{\frac{1}{2}}$, per ogni t tale che $0 < t \leq \bar{t}$, risulta quasi dappertutto

$$\frac{d\xi}{dx} > \frac{1}{2},$$

onde la $\xi(x)$ è funzione sempre crescente (con $\xi(a) = a$, $\xi(b) = b$) e la sua inversa $x(\xi)$ è pure sempre crescente con rapporto incrementale sempre compreso fra 0 e 2. La $x(\xi)$ è così anch'essa assolutamente continua, con

$$0 \leq \frac{dx}{d\xi} < 2,$$

e la funzione

$$\eta = y_n(x(\xi)) \equiv \eta_{n,t}(\xi)$$

risulta assolutamente continua in tutto (a, b), con, quasi dappertutto,

$$\eta'_{n,t}(\xi) = y_n'(x(\xi)) : \{1 + t\omega_n'(x(\xi))\}.$$

Inoltre è, quasi dappertutto,

$$|\eta'_{n,t}(\xi)| < 2A + \frac{1}{tc_{n,2}},$$

vale a dire la $\eta_{n,t}(\xi)$ è una funzione lipschitziana.

In base a quanto abbiamo detto, possiamo affermare che la curva $C_{n,t}$, per per ogni t tale che $0<t\leqslant\bar{t}$, appartiene al campo A_R ed è una curva ordinaria appartenente alla classe $\bar{K}$.

Valutiamo la differenza $I_{C_{n,t}}-I_{C_n}$. Abbiamo, per $\bar{t}$ sufficientemente piccolo,

$$(42)\qquad I_{C_{n,t}}-I_{C_n}=\int_a^b f(\xi,\ \eta_{n,t}(\xi),\ \eta'_{n,t}(\xi))d\xi-\int_a^b f(x,\ y_n(x),\ y_n'(x))dx$$
$$=\int_a^b\left\{f\left(x+t\omega_n(x),\ y_n(x),\ \frac{y_n'(x)}{1+t\omega_n'(x)}\right)(1+t\omega_n'(x))-f(x,\ y_n(x),\ y_n'(x))\right\}dx$$
$$=\int_a^b\left\{f\left(x+t\omega_n,\ y_n,\ \frac{y_n'}{1+t\omega_n'}\right)(1+t\omega_n')-f(x+t\omega_n,\ y_n,\ y_n')\right\}dx$$
$$+\int_a^b\{f(x+t\omega_n,\ y_n,\ y_n')-f(x,\ y_n,\ y_n')\}\,dx.$$

Ora è, per la (36), se $\bar{t}$ è sufficientemente piccolo,

$$(43)\qquad |f(x+t\omega_n,\ y_n,\ y_n')-f(x,\ y_n,\ y_n')|\leqslant t|\omega_n||f_x(x+\theta t\omega_n,\ y_n,\ y_n')|$$
$$\leqslant tL^2\{N_1|f(x,\ y_n,\ y_n')|+N_2|y_n'|+N_3\}.$$

Inoltre, è

$$(44)\qquad \int_a^b\left\{f\left(x+t\omega_n,\ y_n,\ \frac{y_n'}{1+t\omega_n'}\right)(1+t\omega_n')-f(x+t\omega_n,\ y_n,\ y_n')\right\}dx$$
$$=t\int_a^b\omega_n'\left\{f\left(x+t\omega_n,\ y_n,\ \frac{y_n'}{1+\theta_1 t\omega_n'}\right)-\frac{y_n'}{1+\theta_1 t\omega_n'}f_{y'}\left(x+t\omega_n,\ y_n,\ \frac{y_n'}{1+\theta_1 t\omega_n'}\right)\right\}dx$$
$$=t\left[\int_{E_n}....+\int_{E_{n,\Lambda}}....\right].$$

L'integrale esteso a E_n (sul quale insieme è sempre $|y_n'|\leqslant\Lambda_0$ ed anche $|y_n':(1+\theta_1 t\omega_n')|\leqslant2|y_n'|$) resta inferiore ad un numero fisso Ψ, indipendente da n e da Λ. Per quanto riguarda l'integrale esteso a $E_{n,\Lambda}$ (sul quale insieme è sempre $|y_n'|\geqslant\Lambda$ e $\omega_n'=c_{n,2}(1+y_n'^2)^{\frac{1}{2}}$), osserviamo che, scelto ad arbitrio un numero positivo Φ, è possibile, in virtù di un'osservazione fatta all'inizio della dimostrazione, di determinare un Y' tale che, per ogni (x, y) di A_R e per $|y'|\geqslant Y'$, sia

$$f-y'f_{y'}<-\Phi.$$

Allora, supposto $\Lambda>2Y'$, per $\bar{t}$ sufficientemente piccolo e $0<t\leqslant\bar{t}$, è, su $E_{n,\Lambda}$,

$$\left|\frac{y_n'}{1+t\theta_1\omega_n'}\right|=\left|\frac{y_n'}{1+\theta_1 tc_{n,2}(1+y_n'^2)^{\frac{1}{2}}}\right|>\frac{\Lambda}{2}$$

e quindi

$$\int\limits_{E_{n,A}} \omega_n' \left\{ f\left(x+t\omega_n,\, y_n,\, \frac{y_n'}{1+\theta_1 t\omega_n'}\right) - \frac{y_n'}{1+\theta_1 t\omega_n'} f_{y'}(....)\right\} dx < -c_{n,2}\Phi \int\limits_{E_{n,A}} \sqrt{1+y_n'^2}\,dx$$
$$= -c_{n,1}c_{n,2}\Phi.$$

Ritornando alla (42) possiamo scrivere pertanto, tenendo conto di (43) e (44),

$$(45) \qquad I_{C_{n,t}} - I_{C_n} < t\Psi - tc_{n,1}c_{n,2}\Phi + tL^2 \int_a^b \{ N_1 |f(x, y_n, y_n')| + N_2 |y_n'| + N_3 \} dx.$$

Osserviamo qui che è

$$\int_a^b |y_n'|\, dx \leqq L_n \leqq L.$$

Inoltre, essendo l'integrale I_C quasi-regolare positivo, è sempre

$$f(x, y, y') \geqq f(x, y, 0) + y' f_{y'}(x, y, 0) \geqq -|f(x, y, 0)| - |y'|\,|f_{y'}(x, y, 0)|$$

ed è perciò possibile determinare due numeri positivi p e q, in modo che sia, per tutti i punti (x, y) di A_R e per tutti gli y',

$$f(x, y, y') > -p - q\,|y'|;$$

è perciò sempre

$$(46) \qquad |f(x, y, y')| \leqq f(x, y, y') + 2(p + q\,|y'|),$$

e quindi

$$\int_a^b |f(x, y_n, y_n')|\, dx \leqq I_{C_n} + 2p(b-a) + 2q \int_a^b |y_n'|\, dx$$
$$\leqq (i+1) + 2p(b-a) + 2qL.$$

Tenendo anche presente che è

$$c_{n,2} \geqq m(E_n) > (b-a):2,$$

ricaviamo dunque da (45)

$$(47) \qquad I_{C_{n,t}} - I_{C_n} < -t\left(c_{n,1}\Phi \frac{b-a}{2} - H\right),$$

dove abbiamo posto

$$H = \Psi + L^2 \{ N_1[i + 1 + 2p(b-a) + 2qL] + N_2 L + N_3(b-a) \}.$$

La (47) vale per ogni n ed ogni t, con $0 < t \leqq \bar{t}$ e $\bar{t}$ sufficientemente piccolo; e siccome è $I_{C_{n,t}} \geqq i$, dalla (47) e dalla (39) segue

$$c_{n,1}\Phi \frac{b-a}{2} - H < \frac{1}{n\bar{t}}$$

ed anche, per la definizione di $c_{n,1}$, e per ogni $n > \bar{t}^{-1}$,

$$\int_{E_{n,A}} |y_n'|\, dx < \frac{2(1+H)}{\Phi(b-a)}.$$

Siccome Φ è arbitrario, ciò prova che le $y_n(x)$ sono equiassolutamente continue in (a, b).

22. - Osservazioni.

I. - Ogni curva $\bar{C}$ minimante per I_C nella classe $\bar{K}$ del teorema del n.° precedente (e ferme le ipotesi ivi fatte) è una *pseudoestremaloide* [35] e la funzione $\bar{y}(x)$ corrispondente è lipschitziana [36]. Se poi esiste, finita e continua, anche la derivata parziale $f_y(x, y, y')$, ogni arco della $\bar{C}$ che abbia tutti i suoi punti interni al campo A_R, fatta eccezione al più per quelli terminali, è anche una *estremaloide*; e se, di più, l'integrale I_C è *normale*, la $\bar{y}(x)$ ha sempre derivata finita e continua [37].

II. - La sostituzione nell'enunciato del teorema VII (n.° 21) della (36) con la

$$|f_x(x+\varphi, y, y')| \leq N_1 f(x, y, y') + N_2$$

imporrebbe alla $f(x, y, y')$ di essere limitata inferiormente in tutto A_R, tranne nel caso di $N_1 = 0$, perchè da essa seguirebbe, per $N_1 > 0$, $f \geq -N_2 : N_1$, ed è facile dare esempi di funzioni $f(x, y, y')$ che soddisfano a tutte le condizioni del teorema VII senza essere limitate inferiormente.

III. - Il teorema VII vale anche per la classe $\bar{K}$ di tutte le curve ordinarie C di A_R che hanno il primo punto terminale in un dato insieme chiuso G_1, ed il secondo in un altro dato insieme chiuso G_2, con la condizione che la massima ascissa dei punti di G_1 sia minore della minima ascissa dei punti di G_2.

IV. - Sfruttando le considerazioni iniziali della dimostrazione del n.° 16 ed il ragionamento fatto nel n.° 21, si vede che il teorema VII sussiste anche se la sua condizione 3°) non risulta verificata nei punti (x, y) di un insieme G giacente, in parte, su un numero finito o su un'infinità numerabile di curve

$$\Gamma_\nu: \quad y = \varphi_\nu(x), \qquad a_\nu \leq x \leq \beta_\nu,$$

con $\varphi_\nu(x)$ assolutamente continua, e, in parte, su rette R parallele all'asse delle x e intersecanti l'asse delle y in un insieme di punti di misura nulla, *purchè però si supponga che l'integrale I_C sia seminormale.*

---

[35] Loc. cit. in [34], pp. 227 e 230.

[36] Loc. cit. in [34], p. 230.

[37] *Fondamenti*, Vol. II, p. 338.

23. - Teorema VIII.

Il teorema VII sussiste anche se il campo A_R viene sostituito con un campo $A_{\mathfrak{C}}$, limitato da due curve

$$\mathfrak{C}_1: \quad y=\psi_1(x), \qquad a_* \leq x \leq b_*,$$
$$\mathfrak{C}_2: \quad y=\psi_2(x), \qquad a_* \leq x \leq b_*,$$

e dai due segmenti rettilinei che congiungono fra loro i primi estremi e fra loro i secondi estremi di queste curve; intendendosi che le funzioni $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ siano assolutamente continue, soddisfino, per $a_* < x < b_*$, alla $\psi_1(x) < \psi_2(x)$, e siano tali che, per ogni x di (a_*, b_*), escluso $x=b_*$, esista un intorno destro (x, x') in cui esse risultano monotone (in senso largo), ed esista anche, escluso $x=a_*$, un intorno sinistro (x'', x) in cui esse risultano pure monotone (sempre in senso largo).

Si intenderà, altresì, che, per ogni x *interno* a (a_*, b_*), che sia punto di massimo relativo *proprio* [38] per $\psi_1(x)$, la $f(x, y, y')$ risulti definita in tutto un intorno del punto $(x_0, \psi_1(x_0))$ in modo che la (36) valga anche se $(x+\varphi, y)$ è un punto di tale intorno non appartenente ad $A_{\mathfrak{C}}$; e che altrettanto avvenga per ogni x_0, interno a (a_*, b_*), che sia punto di minimo relativo *proprio* per $\psi_2(x)$.

Per dimostrare quanto abbiamo affermato, consideriamo la successione C_1, C_2,.... del n.° 21. Risultando $L_n \leq L$, le curve C_n ammettono, per un noto teorema di HILBERT, almeno una curva di accumulazione Γ_0, continua e rettificabile, di lunghezza $\leq L$. Tutto si riduce a provare che questa curva è rappresentabile nella forma

$$y=y_0(x), \qquad a \leq x \leq b, \tag{48}$$

con $y_0(x)$ assolutamente continua.

Possiamo, senz'altro supporre, che la Γ_0 sia la curva limite della successione C_1, C_2,...., vale a dire possiamo supporre che esista (almeno) una *corrispondenza Ω*, fra ciascuna C_n e la Γ_0, che sia ordinata e tale che la massima distanza δ_n fra due punti di una C_n e di Γ_0, in essa corrispondentisi, tenda a zero per $n \to \infty$.

Ciò posto, osserviamo, in primo luogo, che ogni arco a_0 della Γ_0, non contenente nessun punto delle curve $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$, e con punti terminali di diversa ascissa, è rappresentabile nella forma (48), con $y_0(x)$ assolutameute continua, perchè su gli archi a_n delle C_n, corrispondenti ad a_0 secondo Ω, le relative $y_n(x)$ risultano equiassolutamente continue: ciò si vede applicando agli archi a_n il ragionamento fatto nel n.° 21 sulle curve C_n. Ne segue che ogni arco di Γ_0, il quale abbia i punti terminali di diversa ascissa, e tutti i punti distinti da quelli terminali

---

(38) Per il quale cioè esiste un intorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ in cui è sempre, per $x \neq x_0$, $\psi_1(x) < \psi_1(x_0)$.

esterni alle curve $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$, è rappresentabile nella forma (48), con $y_0(x)$ assolutamente continua.

Affermiamo ora che non può esistere un arco β_0 di Γ_0 che sia tutto su una parallela all'asse delle y e che abbia un punto terminale su $\mathfrak{C}_1$ o $\mathfrak{C}_2$. Supponiamo, se è possibile, che tale arco β_0 esista e sia $x=p$, con $a_* \leqq p < b_*$, la retta su cui giace β_0. Indichiamo con $\bar{\beta}_0$ il massimo arco di Γ_0 giacente sulla retta $x=p$ (e contenente necessariamente β_0). Se il secondo punto terminale P_2 di $\bar{\beta}_0$ non giacesse su $\mathfrak{C}_1$ o $\mathfrak{C}_2$, esisterebbe un arco di Γ_0 senza punti su $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$, contenente nel suo interno P_2, contenente un segmento della retta $x=p$, e avente i punti terminali di diversa ascissa; e ciò è impossibile perchè quest'arco sarebbe uno degli α_0 già considerati. Dunque P_2 deve giacere su $\mathfrak{C}_1$ o su $\mathfrak{C}_2$. Per fissare le idee, ammettiamo che P_2 giaccia su $\mathfrak{C}_2$. Indichiamo con $\widehat{P_1P_2}$ un arco parziale di $\bar{\beta}_0$, che non abbia nessun punto su $\mathfrak{C}_1$, che non sia seguito, su Γ_0, da nessun altro punto di $\bar{\beta}_0$ e tale che P_1 abbia ordinata diversa da quella di P_2. Scegliamo poi, su Γ_0, un punto Q_0 di ascissa q, maggiore di p, in modo che l'arco di Γ_0 che segue $\bar{\beta}_0$ e termina in Q_0 non abbia punti su $\mathfrak{C}_1$; e indichiamo con γ_0 l'arco di Γ_0 composto di $\widehat{P_1P_2}$ e di $\widehat{P_2Q_0}$.

Supponiamo, in primo luogo, che, per tutti gli x di un intorno di p la $\psi_2(x)$ sia non decrescente; supponiamo anche (ciò che è ben lecito) che l'ascissa q di Q_0 sia interna a questo intorno. Detto γ_n l'arco di C_n che corrisponde, secondo Ω, a γ_0, possiamo applicare (per n sufficientemente grande) agli archi γ_n, il ragionamento fatto nel n.° 21 sulle curve C_n con l'avvertenza di assumere come insieme E_n l'insieme dei punti di (a_n, b_n) (intervallo sul quale si proietta ortogonalmente l'arco γ_n) in cui è $x \geqq p + \frac{q-p}{3}$, $|y_n'| \leqq A_0$, e di sostituire alla differenza $I_{\gamma_{n,t}} - I_{\gamma_n}$, dove $\gamma_{n,t}$ corrisponde alla $C_{n,t}$ del n.° 21, la differenza $I_{\gamma'_{n,t}} - I_{\gamma'_n}$, dove γ_n' e $\gamma'_{n,t}$ sono le parti di γ_n e $\gamma_{n,t}$ che corrispondono all'intervallo (a_n, c_n), c_n essendo il primo punto di $\left(p + \frac{q-p}{3}, b_n\right)$ in cui è $\omega_n(x)=0$. Giungiamo così ad una contraddizione.

Supponiamo, in secondo luogo, che la condizione dianzi ammessa sulla $\psi_2(x)$ nell'intorno di p non sia verificata, e osserviamo che, in virtù della proposizione del n.° 2, è possibile di determinare tre numeri p, q e $\varrho > 0$, in modo che, in tutti i punti (x, y) di $A_{\mathfrak{C}}$ distanti da P_2 non più di ϱ, sia, per tutti gli y',

$$f(x, y, y') > p + qy'.$$

Allora, per ogni arco β di curva ordinaria tutta contenuta nel cerchio $[P_2, \varrho]$, di centro P_2 e raggio ϱ, ed i cui punti terminali abbiano la stessa ordinata, è

$$I_\beta > p(x_2 - x_1), \tag{49}$$

dove abbiamo indicato con x_1 e x_2 le ascisse dei punti terminali di β.

Possiamo supporre che tutto l'arco γ_0 risulti interno al cerchio $[P_2, \varrho]$, e che tutto l'arco $\widehat{P_2Q_0}$ di γ_0 sia interno al cerchio di centro P_2 e raggio ϱ' minore della metà della lunghezza del segmento $\overline{P_1P_2}$. Possiamo anche supporre che l'ascissa q di Q_0 sia interna all'intorno destro di p, nel quale la $\psi_2(x)$ resta monotona.

Applichiamo ancora agli archi γ_n il ragionamento fatto nel n.° 21 sulla C_n, con l'avvertenza già indicata relativamente all'insieme E_n, e sostituendo alla differenza $I_{\gamma_{n,t}}-I_{\gamma_n}$ la $I_{\bar\gamma_{n,t}}-I_{\bar\gamma_n}$, dove $\bar\gamma_{n,t}$ è la parte di $\gamma_{n,t}$ che va dal primo estremo di questo arco al primo punto Q_n' d'incontro di questo stesso arco con l'arco $\widehat{P_{2,n}Q_n}$ di γ_n (dove $P_{2,n}$ è un punto di γ_n corrispondente, secondo Ω, a P_2, e Q_n è l'ultimo punto di γ_n), e $\bar\gamma_n$ è la parte di γ_n che ha come ultimo punto Q_n'. Supponendo $\bar t$ minore di $(q-p):3L^2$ ([39]) e sufficientemente piccolo, ed $\bar n$ sufficientemente grande, si avrà, da un lato, per ogni $n \geqq \bar n$,

$$I_{\bar\gamma_{n,\bar t}}-I_{\bar\gamma_n} \geqq -\frac{1}{n},$$

e dall'altro si potrà valutare un limite superiore per la differenza al primo membro di questa disuguaglianza scrivendo

$$(50) \qquad I_{\bar\gamma_{n,\bar t}}-I_{\bar\gamma_n}=(I_{\bar\gamma_{n,\bar t}}-I_{\bar\gamma'_n})-I_{\bar\gamma''_n}$$

(dove $\bar\gamma_n'$ è la parte di $\bar\gamma_n$ che ha il suo ultimo punto in quello la cui ascissa x_n è data dalla relazione

$$\xi_n=x_n+\bar t\omega_n(x_n),$$

nella quale ξ_n rappresenta l'ascissa del punto Q_n'), trattando la parentesi del secondo membro di (50) come si è fatto nel n.° 21 per la differenza $I_{C_{n,t}}-I_{C_n}$, a partire dalla (42), e osservando che, per la (49), è

$$-I_{\bar\gamma''_n}<-p(\xi_n-x_n)<|p|\,\bar t\omega_n(x_n)<|p|\,L^2\bar t.$$

Si giunge così, nuovamente, ad una contraddizione.

Se poi fosse $p=b_*$, l'arco $\bar\beta_0$ dovrebbe avere il primo punto terminale P_1' su $\mathfrak{C}_1$ o su $\mathfrak{C}_2$; supponiamo, per fissare le idee, che sia su $\mathfrak{C}_2$. Scelti allora, su Γ_0, un punto Q_0' precedente P_1' e un punto P_2' seguente P_1', in modo che l'arco $\widehat{Q_0'P_1'P_2'}$ di Γ_0 non abbia punti su $\mathfrak{C}_1$, si ragionerebbe su questo arco come precedentemente si è fatto su γ_0, definendo ora la $\omega_n(x)$ del n.° 21 mediante l'uguaglianza

$$\omega_n(x)=\int_x^{b_n} i_n(x)\sqrt{1+y_n'^2}dx.$$

Con ciò viene stabilita l'impossibilità dell'esistenza, su Γ_0, degli archi β_0.

Dopo quanto si è così provato, la Γ_0 risulta rappresentabile nella forma (49), con $y_0(x)$ continua ed a variazione limitata. Inoltre, la Γ_0 viene a risultare composta di un numero finito o al più di un'infinità numerabile di archi aventi al più gli estremi sulle curve $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$, e su ciascuno dei quali la $y_0(x)$ è assolu-

---

([39]) Si tenga presente che è sempre $|\omega_n(x)|<L^2$.

tamente continua, e di un insieme di punti posti su $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$. Ne segue, pertanto, che ad ogni insieme di punti dell'asse delle x, di misura nulla, la $y=y_0(x)$ fa corrispondere un insieme di valori di y pure di misura nulla, il che assicura che la $y_0(x)$ è assolutamente continua in tutto (a, b).

24. - Teorema IX.

Supposto: 1°) *che I_C sia quasi-regolare positivo, seminormale;*

2°) *che la funzione f sia indipendente dalla x;*

3°) *che, in tutti i punti (x, y) di A_R, sia, per ogni y' finito, $f-y'f_{y'}\neq 0$, e, per $|y'|\to\infty$,*

(51) $$f-y'f_{y'}\to 0;$$

nella classe $\overline{K}$ di tutte le curve ordinarie C appartenenti al campo rettangolare A_R e aventi tutte i punti terminali in due dati punti (di diversa ascissa), esiste il minimo assoluto di I_C ([40]).

Analogamente a quanto abbiamo osservato all'inizio della dimostrazione del n.° 21, possiamo affermare che, per le ipotesi qui poste, l'espressione $f-y'f_{y'}$ è sempre >0 e la sua convergenza allo zero, per $|y'|\to\infty$, è *uniforme* in tutto il campo A_R.

Dopo di ciò, riprendiamo la dimostrazione del n.° 21, a partire dalla considerazione della successione C_1, C_2,...., e seguiamola sino alla uguaglianza (42): avremo

$$I_{C_{n,t}}-I_{C_n}=t\int_{E_n}\omega_n'\left\{f\left(y_n, \frac{y_n'}{1+\theta_1 t\omega_n'}\right)-\frac{y_n'}{1+\theta_1 t\omega_n'}f_{y'}\left(y_n, \frac{y_n'}{1+\theta_1 t\omega_n'}\right)\right\}dx+t\int_{E_{n,A}}....$$

Siccome, su E_n, è sempre

$$|y_n'(x)|\leq A_0, \qquad \left|\frac{y_n'}{1+\theta_1 t\omega_n'}\right|\leq 2|y_n'|,$$

su E_n l'espressione entro $\{\}$ resta maggiore di un numero $\delta>0$.

Determiniamo un $Y'>0$ tale che, per ogni (x, y) di A_R e $|y'|\geq Y'$ sia

$$f-y'f_{y'}<\frac{\delta}{2}.$$

Allora, supposto $A>2Y'$, su $E_{n,A}$ avremo, supposto $\bar{t}$ sufficientemente piccolo, che l'espressione entro $\{\}$ sarà $<\delta:2$. Potremo scrivere così

(52) $$I_{C_{n,t}}-I_{C_n}<t\left[-c_{n,1}\delta\int_{E_n}\sqrt{1+y_n'^2}dx+c_{n,2}\frac{\delta}{2}\int_{E_{n,A}}\sqrt{1+y_n'^2}dx\right]$$
$$=-tc_{n,1}c_{n,2}\frac{\delta}{2}<-t\frac{b-a}{4}\delta\int_{E_{n,A}}|y_n'|\,dx;$$

([40]) Questo teorema fu dato dal McShane in loc. cit. in ([1]), p. 313.

e tenendo conto della (39) e della $I_{C_{n,t}} \geqq i$, avremo

$$\int_{E_{n,A}} |y_n'|\, dx < \frac{4}{nt\delta(b-a)}, \tag{53}$$

e questa disuguaglianza prova l'equiassoluta continuità delle $y_n(x)$, e di conseguenza il teorema.

25. - Osservazioni.

I. - Ogni curva $\overline{C}$ $(y = \overline{y}(x))$ minimante per I_C nella classe $\overline{K}$ del teorema IX (e ferme restando le ipotesi ivi fatte) è *lipschitziana*. Infatti, applicando ad essa la (53), abbiamo, per ogni n,

$$\int_{E_A} |\overline{y}'|\, dx < \frac{4}{nt\delta(b-a)},$$

e perciò

$$\int_{E_A} |\overline{y}'|\, dx = 0,$$

E_A essendo l'insieme dei punti di (a, b) in cui è $|\overline{y}'| \geqq A$, con $A > A_0$ e $> 2Y'$. È dunque, quasi dappertutto, $|\overline{y}'| \leqq A$ e la $\overline{y}(x)$ risulta lipschitziana.

II. - Si può ripetere qui quanto è detto nelle osservazioni I e III del n.° 22.

III. - Alla condizione 3°) dell'enunciato del teorema IX può sostituirsi l'altra che, in tutti i punti (x, y) di A_R sia, per ogni y' finito, $f - y'f_{y'} \mp l$, e, per $|y'| \to \infty$, $f - y'f_{y'} \to l$. Ed, infatti, considerando la funzione $\overline{f} \equiv f - l$ si ricade nelle condizioni del teorema IX. Ma si può anche osservare che, pur nelle condizioni attuali la dimostrazione del n.° 24 si può ancora ripetere, sostituendo alla (52) la

$$I_{C_{n,t}} - I_{C_n} < t\left[-c_{n,1}(l+\delta)\int_{E_n}\sqrt{1+y_n'^2}\,dx + c_{n,2}\left(l+\frac{\delta}{2}\right)\int_{E_{n,A}}\sqrt{1+y_n'^2}\,dx\right]$$
$$= -t\,\frac{b-a}{2}\,\delta\int_{E_{n,A}}|y_n'|\,dx,$$

il che mostra che vale ancora la (53). Perciò anche con la nuova condizione 3°) qui indicata, il teorema IX sussiste pure per la classe $\overline{K}$ considerata nel n.° 22, III.

IV. - Un caso particolare importante del teorema IX è dato dalle funzioni $f(y, y')$ del tipo $\varphi(y)\sqrt{1+y'^2}$, con $\varphi(y)$ funzione continua e > 0 in tutto A_R.

26. - Teorema X.

Se la $f(y, y')$ ammette, finite e continue, le derivate parziali dei primi due ordini ([41]), *e se nel teorema IX alla condizione 1°) si sostituisce l'altra*

([41]) Effettivamente basterebbero le derivate f_y, $f_{y'}$, $f_{y'y}$, $f_{y'y'}$.

che I_C sia regolare positivo ([42]), *il teorema stesso continua a sussistere anche se al campo A_R viene sostituito il campo $A_{\mathfrak{C}}$ definito nel n.° 23, purchè la $\psi_1(x)$, nell'intorno dei suoi massimi relativi propri interni ad (a_*, b_*), e la $\psi_2(x)$, nell'intorno dei suoi minimi relativi propri interni ad (a_*, b_*), risultino lipschitziane.*

Si riprenda la dimostrazione del teorema VIII. La sola parte del ragionamento ivi fatto che non può ripetersi qui è quella relativa all'impossibilità dell'esistenza dell'arco β_0 nel caso che non vi sia un intorno di p su cui la $\psi_2(x)$ è non decrescente. Qui potremo però giungere ugualmente all'assurdo sfruttando la condizione aggiunta sulle $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ e la nuova ipotesi che l'integrale I_C sia regolare positivo. Ed infatti, fissato un valore λ positivo e sufficientemente grande, e indicato con M_n il punto, di massima ascissa, dell'arco $\widehat{P_{1,n}P_{2,n}}$ di γ_n che trovasi sulla retta passante per Q_n ed avente coefficiente angolare uguale a λ, potremo (supponendo l'arco $\widehat{P_2Q_0}$ di γ_0 sufficientemente piccolo) sostituire l'arco $\widehat{M_nQ_n}$ di γ_n con l'estremale e_n che congiunge M_n e Q_n, ottenendo per un certo $\mu > 0$ e per tutti gli n maggiori di un certo $\bar{n}$,

$$I_{\widehat{M_nQ_n}} - I_{e_n} > \mu,$$

donde seguirebbe, se β_0 esistesse effettivamente, che il limite inferiore di I_C in $\bar{K}$ sarebbe $\leq i - \mu$.

27. - Campo $A_{\mathfrak{C}'}$.

Chiameremo campo $A_{\mathfrak{C}'}$, un campo A limitato da due curve

$$\mathfrak{C}_1: \quad y = \psi_1(x), \qquad a_* \leq x \leq b_*,$$
$$\mathfrak{C}_2: \quad y = \psi_2(x), \qquad a_* \leq x \leq b_*,$$

e dai due segmenti rettilinei che congiungono fra loro i primi estremi e fra loro i secondi estremi di queste due curve; intendendosi che le funzioni $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ siano lipschitziane e tali che, per $a_* < x < b_*$, risulti $\psi_1(x) < \psi_2(x)$.

28. - Teorema XI.

Supposto: 1°) *che la $f(x, y, y')$ ammetta, finite e continue, le derivate parziali dei primi due ordini e che l'integrale I_C sia regolare positivo;*

2°) *che esistano due costanti positive* A_1 e A_2, *in modo che, per ogni* (x, y) *del campo* $A_{\mathfrak{C}'}$ (n.° 27) *ed ogni y' finito, sia sempre*

$$\left| \frac{f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}}{f_{y'y'}} \right| \leq A_1 y'^2 + A_2 ; \tag{54}$$

nella classe $\bar{K}$ di tutte le curve ordinarie C appartenenti al campo limi-

---

([42]) Cioè tale che sia sempre $f_{y'y'} > 0$.

tato $A_{\mathfrak{C}'}$ e aventi tutte i punti terminali in due dati punti (di diversa ascissa), esiste il minimo assoluto di I_C.

Sia C_1, C_2,...., C_n,.... una successione minimizzante per I_C in $\overline{K}$:

$$I_{C_n} \leq i + \frac{1}{n}; \tag{55}$$

per essere anche qui (n.° 15) $L_n \leq L$, tale successione di curve ammette almeno una curva continua Γ_0 di accumulazione, e possiamo ammettere senz'altro che tutte le curve C_n abbiano la Γ_0 come curva limite. Si tratta di dimostrare che la Γ_0 è rappresentabile nella forma

$$y = y_0(x), \qquad a \leq x \leq b, \tag{56}$$

con $y_0(x)$ assolutamente continua.

Sia α un arco della Γ_0 avente i punti terminali di diversa ascissa e tutti gli altri punti *interni* al campo $A_{\mathfrak{C}'}$. Esiste allora almeno un punto P_0 di α, distinto da quelli terminali, in cui la Γ_0 ha tangente non parallela all'asse delle y. Siano P_1 e P_2 due punti di α, il primo precedente ed il secondo seguente P_0. Se ϱ è un numero positivo sufficientemente piccolo e se P_1 e P_2 sono sufficientemente vicini a P_0, l'estremale e_0 che li congiunge è la sola curva minimante per l'integrale I, fra tutte le curve ordinarie che congiungono P_1 e P_2 e che giacciono tutte nel cerchio $[P_0, \varrho]$, di centro P_0 e raggio ϱ. Se l'arco $\widehat{P_1P_2}$ della Γ_0 avesse un punto $\overline{P}$, di ascissa maggiore di quella di P_1 e minore di quella di P_2, non giacente su e_0, si potrebbe determinare un $\mu > 0$ in modo che (indicati con α_n, $P_{1,n}$, $P_{2,n}$, l'arco ed i punti di C_n corrispondenti, secondo la corrispondenza Ω di cui si è parlato nel n.° 23, ad α, P_1 e P_2, e con e_n l'estremale che congiunge $P_{1,n}$ e $P_{2,n}$ e giace nel cerchio $[P_0, \varrho]$) si avesse per tutti gli n sufficientemente grandi,

$$I_{\alpha_n} - I_{e_n} > \mu,$$

il che è impossibile per la (55). Esiste dunque tutto un arco di α il quale contiene P_0 non come punto terminale e che è un'estremale.

Determiniamo il massimo α_0 di tali archi: questo massimo arco, in virtù delle ipotesi 1°) e 2°), esiste ed è anch'esso un'estremale (con derivata limitata). Detto, infatti, α_0 il minimo arco di α contenente tutti gli archi parziali (di α) che contengono P_0 e sono delle estremali, questo α_0 risulta rappresentabile nella forma (56) e, in tutti i suoi punti *interni* la $y_0'(x)$ è, in modulo, inferiore ad un numero fisso ([43]). Pertanto, negli stessi punti, essendo sempre

$$y_0'' = \frac{f_y - f_{y'x} - y_0' f_{y'y}}{f_{y'y'}},$$

([43]) Cfr. *Fondamenti*, Vol. II, pp. 363-364.

anche la $y_0''(x)$ risulta in modulo inferiore ad un numero fisso; e la $y_0'(x)$ tende perciò ad un limite finito quando x tende all'ascissa di uno dei punti terminali di a_0.

Per essere I_C un integrale regolare positivo, l'arco a_0 coincide con tutto a. Ed infatti, se, per esempio, il primo punto terminale $\overline{Q}$ di a_0 non fosse anche il primo punto terminale di a, $\overline{Q}$ sarebbe *interno* ad $A_{\mathfrak{C}'}$ e si potrebbero scegliere su a due punti Q_1 e Q_2, il primo precedente ed il secondo seguente $\overline{Q}$, ambedue vicini a $\overline{Q}$ quanto si vuole, e in modo che l'arco $\widehat{Q_1 Q_2}$ di a coincidesse con l'estremale che li congiunge: il che contraddirebbe alla definizione di a_0.

Sempre per il fatto che I è un integrale regolare positivo, non possono poi esistere archi di Γ_0 i cui punti abbiano tutti la stessa ascissa e con un punto terminale sulle curve $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$; e ciò si prova con un ragionamento già usato nel n.° 26.

La Γ_0 risulta, pertanto, rappresentabile nella forma (56) con $y_0(x)$ continua e a variazione limitata. Inoltre la Γ_0 è composta di un numero finito o di una infinità numerabile, al più, di archi su ciascuno dei quali la $y_0(x)$ è assolutamente continua, e di un insieme di punti tutti situati sulle $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$; e come alla fine del n.° 23 si conclude che la $y_0(x)$ è assolutamente continua su tutto (a, b). Ciò basta per provare il teorema enunciato ([44]).

29. - Osservazioni.

I. - Se $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ hanno sempre derivata finita e continua, ogni curva ordinaria $y=\overline{y}(x)$, minimante per I_C nella classe $\overline{K}$ del teorema XI (e ferme restando le ipotesi ivi fatte), ammette, sempre finita e continua, la derivata $\overline{y}'(x)$ ([45]).

II. - Il teorema XI sussiste anche se I_C, invece di essere *regolare positivo*, è soltanto *quasi-regolare positivo normale*, purchè l'espressione

$$(f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}) : f_{y'y'}$$

risulti sempre finita e continua, insieme con le sue derivate parziali del primo ordine ([46]).

([44]) Un integrale al quale si applica immediatamente il teorema XI è, per esempio,

$$I_C = \int_a^b \varphi(x, y) e^{y'} dx$$

con $\varphi(x, y)$ finita e continua insieme con le sue derivate parziali del primo ordine e tale che sia sempre $\varphi(x, y) > 0$.

([45]) *Fondamenti*, Vol. II, pp. 366-367.

([46]) Ciò avviene, per esempio, se è

$$f(x, y, y') \equiv (1 + x^2 + y^2) y'^4.$$

III. - Il teorema XI sussiste pure se, invece della condizione 2°), si ammette che esistano tre costante positive A_1, A_2, A_3, in modo che, per ogni (x, y) del campo $A_{\mathfrak{C}'}$ ed ogni y' finito, sia sempre

$$\left|\frac{f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y}}{f_{y'y'}}\right| \leq A_1 y'^2 + A_2 \,|\, y' f(x, y, y') \,|\, + A_3.$$

Per dedurre da questa nuova condizione quanto è necessario relativamente all'arco a_0 basta sfruttare ciò che è detto in loc. cit. in ([31]), pp. 223-224; occorre però provare che, se a' è un arco parziale dell'arco a considerato nel n.° 28, il quale sia un'estremale, l'integrale

$$\int_{a'} |\, f(x, y, y') \,|\, dx$$

resta limitato. A tale scopo, osserviamo che, dette x_1 e x_2 le ascisse dei due punti terminali di a', è, per la semicontinuità inferiore di I_C,

$$\int_{a'} f(x, y, y') dx \leq \text{Min} \lim_{n \to \infty} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_n, y_n') dx,$$

$y = y_n(x)$ essendo l'equazione della C_n; è perciò, se a e b sono le ascisse dei punti terminali delle C_n,

$$\int_{a'} f(x, y, y') dx \leq \text{Min} \lim_{n \to \infty} \int_a^b |\, f(x, y_n, y_n') \,|\, dx,$$

e quindi, per la (46),

$$\int_{a'} |\, f(x, y, y') \,|\, dx \leq \int_{a'} f(x, y, y') dx + 2p(b-a) + 2qL \leq i + 1 + 4p(b-a) + 4qL.$$

IV. - Nel teorema XI, la condizione 2°) può sostituirsi con una qualunque altra la quale, dato un qualsiasi arco γ di estremale, giacente in $A_{\mathfrak{C}'}$, permetta sempre di determinare un limite superiore finito per il modulo della derivata dell'ordinata $y(x)$, su tutti gli archi di estremale che contengono γ e giacciono in $A_{\mathfrak{C}'}$.

V. - Il teorema XI vale anche per la classe $\overline{K}$ di tutte le curve ordinarie C di $A_{\mathfrak{C}'}$, analoghe a quelle del n.° 22, III.

30. - Teorema XII.

Se il campo A è costituito da tutti i punti (x, y) tali che $a_* \leq x \leq b_*$, $y \geq \psi(x)$, con $\psi(x)$ funzione continua, insieme con la sua prima derivata, in tutto (a_*, b_*); se è soddisfatta la condizione 1°) *del teorema XI; se la* (54) *vale per ogni parte limitata del campo A* (*le costanti A_1 e A_2 potendo variare col variare di questa parte*); *se, infine, le estremali volgono sempre* *la loro concavità verso l'alto* [47]; *nella classe* $\overline{K}$ *di tutte le curve ordinarie* C *appartenenti al campo* A *e aventi tutte i punti terminali in due dati punti* M_1 *e* M_2 *(di diversa ascissa), esiste il minimo assoluto di* I_C.

Sia, infatti, $M_1 \equiv (a, \mu_1)$, $M_2 \equiv (b, \mu_2)$, con $a_* \leq a < b \leq b_*$ e $\mu_1 \geq \psi(a)$, $\mu_2 \geq \psi(b)$, e indichiamo con $\overline{\mu}$ un numero maggiore di μ_1, di μ_2 e del massimo di $\psi(x)$ in (a_*, b_*). Per ogni $\mu \geq \overline{\mu}$, indichiamo con A_μ la parte di A i cui punti hanno ordinate $\leq \mu$, e con $\overline{K}_\mu$ la sottoclasse di $\overline{K}$ costituita da tutte le curve di $\overline{K}$ che giacciono in A_μ.

In $\overline{K}_\mu$ esiste, per il teorema XI, il minimo assoluto per I_C. Sia C_μ una curva minimante per I_C in $\overline{K}_\mu$. Per il n.° 29, I, la funzione $y_\mu(x)$, corrispondente alla C_μ, ha sempre derivata finita e continua. Il massimo valore Y_μ, di $y_\mu(x)$ in (a, b), non può essere $\geq \overline{\mu}$, perchè, altrimenti, la C_μ dovrebbe contenere un arco di estremale tangente, in un suo punto terminale, alla retta $y = Y_\mu$ e con tutti i punti distinti da questo punto terminale al disotto di tale retta; e simile arco non potrebbe volgere la sua concavità verso l'alto. Dunque ogni C_μ, per $\mu \geq \overline{\mu}$ è anche una curva $C_{\overline{\mu}}$; vale a dire ogni $C_{\overline{\mu}}$ è pure curva minimante per I_C in $\overline{K}$.

31. - Teorema XIII.

Supposto: 1°) *che* I_C *abbia la forma*

$$I_C \equiv \int_C \varphi(x, y) \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

con $\varphi(x, y)$ *finita e continua, insieme con le sue derivate parziali* φ_x, φ_y, *in tutto il campo* $A_{\mathfrak{C}'}$ (n.° 27), *e che sia sempre, in tale campo,* $\varphi(x, y) > 0$;

2°) *che il campo* $A_{\mathfrak{C}'}$ *possa dividersi, mediante rette* (r) *parallele all'asse delle* y, *in un numero finito di parti in ciascuna delle quali la derivata parziale* φ_x *non cambi mai di segno;*

3°) *che* M_1 *e* M_2 *siano due punti di* $A_{\mathfrak{C}'}$, *di ascissa diversa, giacenti il primo in una delle parti indicate in cui è sempre* $\varphi_x \leq 0$ *ed il secondo in una di quelle in cui è sempre* $\varphi_x \geq 0$;

nella classe $\overline{K}$ *di tutte le curve ordinarie* C *del campo* $A_{\mathfrak{C}'}$, *aventi tutte i punti terminali in* M_1 *e* M_2, *vi è il minimo assoluto di* I_C.

Impostiamo il ragionamento come nel n.° 28, e osserviamo subito che, per essere I_C un integrale regolare positivo, non possono esistere archi di Γ_0 i cui punti abbiano tutti la stessa ascissa, e con un punto terminale sulle curve $\mathfrak{C}_1$ e $\mathfrak{C}_2$ [48].

---

[47] Il che avviene sicuramente se è, per esempio, sempre

$$f_y - f_{y'x} - y' f_{y'y} \geq 0.$$

[48] Cfr. quanto abbiamo già detto nel n.° 28.

Consideriamo un arco a della Γ_0 avente i punti terminali di diversa ascissa, tutti gli altri punti *interni* al campo $A_{\mathfrak{C}'}$, e tutto contenuto in una di quelle parti di $A_{\mathfrak{C}'}$ in cui è sempre (per fissare le idee) $\varphi_x \leqslant 0$. Indichiamo con $\bar{a}$ il massimo arco di Γ_0 che contiene a e che soddisfa a tutte le condizioni or ora indicate per a. Il secondo punto terminale $\bar{P}_2$ di $\bar{a}$ deve necessariamente trovarsi o su $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, oppure su quella delle rette (r), diciamo $\bar{r}$, che separa la regione in cui si trova $\bar{a}$ dalla regione immediatamente seguente in cui è sempre $\varphi_x \geqslant 0$.

Sia P_0 un punto di $\bar{a}$, distinto da quelli terminali, e in cui la tangente all'arco non è parallela all'asse delle y. Come nel n.° 28, si prova che esiste tutto un arco di $\bar{a}$, circondante P_0, che è un'estremale. Sia a_0 il minimo arco di $\bar{a}$ contenente tutti gli archi parziali (di $\bar{a}$) che contengono P_0 e sono delle estremali: affermiamo che a_0 è un'estremale (a derivata limitata) che coincide con tutto $\bar{a}$. Infatti, poichè ogni arco interno di a_0 è un'estremale, a_0 risulta (data la forma attuale di I_C) un'estremaloide e, per essere I_C regolare, su a_0 esiste sempre la tangente, ed essa varia con continuità ([49]). Questa tangente non può essere parallela all'asse delle y in punti distinti da quelli terminali di a_0. Ma nel primo di questi punti, per la condizione $\varphi_x \leqslant 0$, la tangente non può esser parallela all'asse delle y ([50]); e ne segue (come nel n.° 28) che questo primo punto terminale coincide col primo punto terminale di $\bar{a}$. Il secondo punto terminale P_2 di a_0 deve avere la medesima ascissa di $\bar{P}_2$, perchè, altrimenti, detto P_0' un punto di $\bar{a}$ compreso fra P_2 e $\bar{P}_2$ e in cui la tangente all'arco non è parallela all'asse delle y, da quanto si è già stabilito seguirebbe che tutta la parte di $\bar{a}$ che precede P_0' è un'estremale, contro la definizione di a_0. Allora, se P_2 è sulla retta $\bar{r}$, in esso la tangente ad a_0 non può essere parallela all'asse delle y, perchè su $\bar{r}$ è sempre $\varphi_x = 0$ e non può esistere un'estremaloide, avente sempre tangente che varia in modo continuo, la quale sia tangente alla $\bar{r}$ ([51]); e P_2 coincide con $\bar{P}_2$. Se, invece, P_2 non è su $\bar{r}$, allora $\bar{P}_2$ è su $\mathfrak{C}_1$ o $\mathfrak{C}_2$ e, per quanto si è osservato all'inizio della dimostrazione, P_2 deve coincidere con $\bar{P}_2$; di più, in $P_2 \equiv \bar{P}_2$ non può esservi la tangente parallela all'asse delle y per la stessa ragione già sfruttata nel n.° 26. È dunque provato che a_0 coincide con $\bar{a}$ ed è un'estremale (a derivata limitata).

([49]) *Fondamenti*, Vol. II, p. 321.

([50]) Loc. cit. in ([31]), pp. 225-226.

([51]) Infatti, passando dalla forma ordinaria a quella parametrica, l'integrale I_C diventa

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}} \equiv \int_{\mathfrak{C}} \varphi(x, y)\, ds$$

e i segmenti di $\bar{r}$ appartenenti ad $A_{\mathfrak{C}'}$ sono delle estremali per questo integrale; e se l'estremaloide indicata potesse esistere, da un punto di $\bar{r}$ uscirebbero due estremali di $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ fra loro tangenti.

Non resta ora che ripetere le ultime considerazioni della dimostrazione del n.° 28 ([52]).

Osservazione. - Per il teorema XIII si possono ripetere le osservazioni I e V del n.° 29.

32. - Teorema XIV.

Il teorema XIII può essere generalizzato nella seguente forma:

Supposto: 1°) *che la* $f(x, y, y')$ *ammetta, finite e continue, le derivate parziali dei primi due ordini, che l'integrale* I_C *sia regolare positivo e che sia, per ogni* y' *finito,* $f-y'f_{y'} \neq l$ *e, per* $|y'| \to \infty$, $f-y'f_{y'} \to l$ (l *numero finito indipendente da* (x, y));

2°) *che il campo* $A_{\mathfrak{C}'}$ (n.° 27) *possa dividersi, mediante rette* (r) *parallele all'asse delle* y, *in un numero finito di parti in ciascuna delle quali la derivata parziale* f_x *non cambi mai di segno;*

3°) *che non possa esistere, in* $A_{\mathfrak{C}'}$, *nessuna estremaloide, avente sempre tangente che varia in modo continuo, la quale risulti tangente ad una delle rette* (r);

4°) *che* M_1 *e* M_2 *siano due punti di* $A_{\mathfrak{C}'}$, *di diversa ascissa, giacenti il primo in una delle parti indicate in cui è sempre* $f_x \leqslant 0$ *ed il secondo in una di quelle in cui è sempre* $f_x \geqslant 0$;

nella classe $\overline{K}$ *di tutte le curve ordinarie* C *del campo* $A_{\mathfrak{C}'}$, *aventi tutte i punti terminali in* M_1 *e* M_2, *vi è il minimo assoluto di* I_C.

Per la dimostrazione di questo teorema basta ripetere il ragionamento del n.° 31, con la variante che ora indicheremo.

Per mostrare che a_0 è un'estremale (a derivata limitata) che coincide con tutto $\overline{a}$, si osservi che a_0 è una *pseudoestremaloide* ([53]); perciò, se x_1 e x_2 $(x_1 < x_2)$ sono le ascisse di due punti di a_0, distinti da quelli terminali, è, su a_0,

$$\int_{x_1}^{x_2} f_x dx = [f - y'f_{y'}]_{x_2} - [f - y'f_{y'}]_{x_1}. \tag{57}$$

E siccome su a_0 è sempre $f_x \leqslant 0$, ne viene

$$[f - y'f_{y'}]_{x_1} \geqslant [f - y'f_{y'}]_{x_2} > l$$

([52]) Il teorema ora dimostrato si applica, per esempio, agli integrali

$$\int_C (1 + x^2 + y^2) \sqrt{1 + y'^2} dx, \qquad \int_C (1 + x^2 y^2) \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

assumendo per M_1 e M_2 due punti di $A_{\mathfrak{C}'}$, il primo di ascissa non positiva ed il secondo di ascissa non negativa (e intendendo che sia $a_* \leqslant 0 \leqslant b_*$, $a_* < b_*$).

e la y' di a_0, per tutti gli x interni a $(\bar{x}_1, x_2)$, dove $\bar{x}_1$ è l'ascissa del primo punto terminale di a_0, resta limitata ([54]). Se ne conclude (come al n.° 28) che la parte di a_0 corrispondente all'intervallo $(\bar{x}_1, x_2)$ è un'estremale (a derivata limitata), e che il primo punto terminale di a_0 è anche quello di $\bar{a}$.

Sempre per la (57), al tendere di x_2 all'ascissa $\bar{x}_2$ del secondo punto terminale P_2 di a_0, $[f-y'f_{y'}]_{x_2}$ tende non crescendo ad un limite finito $l' \geqq l$. Se questo limite l' fosse esattamente l, la y' di a_0, corrispondente, dovrebbe tendere a $+\infty$ o a $-\infty$; allora, P_2 non potrebbe essere sulla $\bar{r}$, per la condizione 3°), e $\overline{P}_2$ (che ha la medesima ascissa di P_2) sarebbe su $\mathfrak{C}_1$ o su $\mathfrak{C}_2$, ciò che è impossibile. Dunque è $l' > l$ e la y' di a_0 resta limitata in $(x_2, \bar{x}_2)$. Con ciò resta stabilito che a_0 è un'estremale (a derivata limitata) e che P_2 coincide con $\overline{P}_2$ ([55]).

Vale anche qui quanto si è detto nelle osservazioni I e V del n.° 29.

([53]) Loc. cit. in ([31]), p. 226.

([54]) Si tenga presente che, in virtù delle ipotesi fatte, per ogni y' finito è sempre $f - y'f_{y'} > l$ (cfr. quanto si è detto nel n.° 21) e $f - y'f_{y'}$ tende a l, per $|y'| \to \infty$, uniformemente in tutto $A_{\mathfrak{C}'}$.

([55]) Il teorema XIV si applica, per esempio, agli integrali

$$\int_{C} (1 + x^2 + y^2)(\sqrt{1 + y'^2} + y')dx, \qquad \int_{C} \{(1 + x^2y^2)(\sqrt{1 + y'^2} + y') + y^2y'\} dx,$$

assumendo M_1 e M_2 come in ([52]).

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 31 agosto 1934 - XII.