Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Nicolas Lusin

Sur les classes des constituantes des complémentaires analytiques

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 3 (1933), p. 269-282

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_3_269_0>

SUR LES CLASSES DES CONSTITUANTES DES COMPLÉMENTAIRES ANALYTIQUES (*)

par NICOLAS LUSIN (Moscou).

Généralités sur le problème du continu. — On sait que le fameux *problème du continu* consiste à déterminer le rang que la puissance du continu tient dans l'échelle des alephs, cette dernière étant supposée définie.

On sait d'ailleurs que tous les efforts faits pour résoudre ce problème en restant sur le terrain des idées de G. CANTOR et des analystes tels que MM. JACQUES HADAMARD et FELIX HAUSDORFF ont été vains, sans tenir compte d'un résultat négatif très mince: la puissance du continu n'est pas $\aleph_\omega$ ni un autre aleph « confinal » à ω (J. KÖNIG).

Les derniers travaux de M. DAVID HILBERT poursuivant le même but abandonnent déjà ce terrain d'idées. Sa méthode ne peut être analysée en quelques lignes; aussi nous bornons-nous à en indiquer seulement les points essentiels.

Pour montrer que la proposition: « la puissance du continu est $\aleph_1$ » est non contradictoire dans le domaine de l'Analyse Mathématique, M. DAVID HILBERT établit une correspondance univoque et réciproque entre les *définitions* mêmes des nombres irrationnels d'une part et des nombres transfinis de deuxième classe d'autre part. Ainsi sa méthode diffère sensiblement de l'ordre d'idées indiqué où l'on cherchait à établir l'existence (ou l'absence) d'une correspondance entre les *nombres mêmes* irrationnels et transfinis sans se préoccuper de la manière dont *nous* concevons les nombres irrationnels et transfinis. Bref, dans le terrain des idées de G. CANTOR et des analystes qui étaient d'accord avec lui, on n'abordait nullement les développements metamathématiques.

En attendant de nouvelles publications dans la voie ouverte par les idées de M. DAVID HILBERT, nous allons faire ici deux remarques.

D'abord, en analysant les définitions mêmes des divers nombres irrationnels, la méthode de M. DAVID HILBERT emploie les expressions metamathématiques dites *fonctionnelles*: on définit un nombre irrationnel au moyen d'une fonctionnelle et la méthode de M. DAVID HILBERT fait la classification de ces fonctionnelles. Mais avant d'obtenir des explications définitives, il reste encore un point

(*) IX[e] Congrès International des Mathématiciens, Zurich, 1932.

à éclaircir : comment sommes-nous certains que *toutes* les espèces possibles de fonctionnelles soient réellement épuisées et qu'il ne puisse arriver qu'un nombre irrationnel dont on ne conçoit pas la définition *à présent* échappe à nos raisonnements ultérieurs ?

Ensuite, une certaine proximité de la méthode de M. DAVID HILBERT aux raisonnements de J. RICHARD peut inspirer quelques craintes. Sans doute ce raisonnement : « Prenons toutes les définitions metamathématiques des nombres irrationnels et énumérons-les au moyen des entiers positifs; puis faisons de même avec les définitions des nombres transfinis, etc. » serait trop simpliste parce que cette énumération même n'appartient probablement pas au domaine de la metamathématique. Cependant, le raisonnement de J. RICHARD est une épreuve pour ceux qui veulent pénétrer dans les mystères de l'infini ainsi qu'indique avec toute raison M. ÉMILE BOREL.

En abandonnant maintenant le terrain des essais, plutôt philosophiques que mathématiques en ce moment, j'indique que l'Analyse Mathématique emploie de nombreuses correspondances entre les éléments des ensembles sans entrer dans l'analyse de leurs définitions. Ainsi, dans le Calcul des Variations, nous cherchons une fonction continue $\varphi(x, t)$ de deux variables indépendantes qui donne *toutes* les fonctions possibles à variation bornée $\varphi(x)$ dont la variation totale ne surpasse pas un nombre positif A lorsqu'on fait varier le paramètre t. A ce point de vue, même si le problème du continu était suffisament résolu sur le terrain du *non contradictoire*, la question purement mathématique resterait entière :

reconnaître si l'on peut construire une correspondance biunivoque **effective** *entre les nombres irrationnels et les nombres transfinis de seconde classe sans faire intervenir les définitions de ces nombres.*

À ce point de vue, on voit bien que non seulement nous ne connaissons pas une telle correspondance, mais que nous ne pouvons même pas nommer $\aleph_1$ points du continu. Le problème de la recherche d'un ensemble *effectif* ayant $\aleph_1$ points est en ce moment une *forme affaiblie* du problème du continu et il est aussi loin d'être résolu. On rencontre dans cette voie plusieurs autres problèmes qui sont des formes *de plus en plus affaiblies* du même problème du continu.

M. HENRI LEBESGUE a donné en 1905 une méthode extrêmement remarquable de *construire effectivement* $\aleph_1$ ensembles de points sans parties communes deux à deux. La force de cette méthode est extrême et sa nature est énigmatique. L'illustre auteur écrivait lui-même « j'ai démontré l'existence (sens non kroneckerien et peut-être difficile à préciser) d'ensembles mesurables non mesurables B ». A présent encore, nous n'avons pas compris complètement la nature de cette méthode. Je rappelle que l'étude ultérieure de cette méthode a conduit à la découverte des ensembles analytiques et projectifs ; la nature et les propriétés de ces derniers restent jusqu'à présent énigmatiques.

C'est par cette voie de M. HENRI LEBESGUE que M. WACLAW SIERPINSKI et moi (en 1922) nous avons décomposé le continu en $\aleph_1$ ensembles non nuls mesurables B. Si chacune de ces constituantes contenait un seul point ou tout au plus une infinité dénombrable, le problème du continu serait résolu.

C'est pour cette raison qu'il serait intéressant de déterminer la nature et les classes de ces constituantes. Or, chaque complémentaire analytique non mesurable B se décompose en $\aleph_1$ constituantes mesurables B et la recherche d'un complémentaire analytique dont les constituantes sont toutes *dénombrables* donnerait aussi la solution du problème du continu affaibli.

Une forme encore plus affaiblie du problème du continu est celle où l'on cherche $\aleph_1$ *ensembles mesurables B dont les classes sont bornées.*

Nous croyons que les recherches dans cette voie présentent un vif intérêt puisqu'on y rencontre l'essence du mystère et des difficultés du problème du continu lui-même.

Dans cet article je me propose de considérer un cas où les classes des constituantes croissent *d'une manière monotone* jusqu'à Ω. Cela nous donne une nouvelle démonstration de l'existence des ensembles mesurables B de toutes classes sans qu'il y ait à pratiquer un raisonnement de proche en proche.

Nous passons maintenant aux développements *techniques.*

1. - Le crible rectangulaire. — Prenons l'espace euclidien à deux dimensions. Soit, dans cet espace, un système d'axes rectangulaires que nous désignerons par XOZ.

Appelons *carré fondamental* l'ensemble de tous les points $M(x, z)$ du plan XOZ ayant les deux coordonnées, x et z, *irrationnelles* et vérifiant les inégalités

$$0<x<1, \qquad 0<z<1.$$

Ce carré fondamental sera désigné par Q.

Appelons *rectangle de Baire* d'ordre k dans le carré fondamental Q l'ensemble des points de Q dont les coordonnées, x et z, appartiennent à deux intervalles quelconques de BAIRE ([1]), d'ordre k, situés respectivement dans les intervalles $(0<x<1)$ et $(0<z<1)$. Il résulte des propriétés des intervalles de BAIRE que le carré fondamental Q est divisé en rectangles de BAIRE d'ordre 1 et que chaque rectangle de BAIRE d'ordre k est divisé en rectangles de BAIRE d'ordre $k+1$; si deux rectangles de BAIRE, R et R', d'ordres différents ont un point commun, l'un d'eux contient l'autre, et si R et R' ont le même ordre, ils sont identiques; chaque suite illimitée de rectangles de BAIRE

$$R_1, \quad R_2, \ldots, \quad R_m, \ldots$$

([1]) D'une manière générale, étant donné un système d'entiers positifs rangés dans un ordre déterminé: a_1, $a_2, \ldots$, a_k, on appelle *intervalle de Baire* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ l'ensemble des d'ordres différents, chacun à l'intérieur du précédent, tend vers un point de Q situé à l'intérieur de ces rectangles.

Appelons *crible rectangulaire* l'ensemble formé d'un nombre fini ou dénombrable de rectangles de BAIRE; un crible rectangulaire sera désigné par Γ.

Un crible rectangulaire Γ étant donné, nous discernons dans Γ les rectangles *des rangs* 1, 2, 3,.... Par définition même, est *de rang* 1 tout rectangle R du crible Γ qui n'est contenu dans aucun rectangle différent de ce crible; un rectangle R du crible Γ est dit *de rang* m s'il est contenu dans un rectangle R' *de rang* $m-1$ et s'il n'est contenu dans aucun rectangle différent de ce crible contenu dans R'. Il résulte de cette définition que tout rectangle du crible Γ a un rang bien déterminé, fini; les rectangles de même rang n'ont aucun point commun deux à deux.

Désignons par S_m la réunion des rectangles du crible Γ *de rang* m considérée comme un ensemble de points du carré Q et par Θ la partie commune aux S_m

$$\Theta = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m \times \dots$$

L'ensemble Θ ainsi défini s'appelle *ensemble élémentaire* de points du carré fondamental Q. La projection orthogonale de Θ sur l'axe OX sera désignée par E; c'est un ensemble de points irrationnels de l'intervalle $(0<x<1)$.

On sait que E est un ensemble *analytique* et que tout ensemble analytique, *mesurable B ou non*, situé dans l'intervalle $(0<x<1)$ peut être obtenu de cette manière. Nous désignons par $\mathcal{E}$ *le complémentaire* de E, c'est-à-dire l'ensemble des points irrationnels de $(0<x<1)$ ne faisant pas partie de E

$$\mathcal{E} = CE.$$

2. - **L'indice apparent et le crible minimum.** — Soit x_0 un point irrationnel dans l'intervalle $(0, 1)$ sur l'axe OX et P_{x_0} la droite $x=x_0$ parallèle à l'axe OZ menée par x_0.

Nous dirons qu'un rectangle R du crible Γ a *l'indice apparent au point* x_0 *égal à zéro* si P_{x_0} ne coupe pas le rectangle R. Nous dirons qu'un rectangle R de Γ a *l'indice apparent au point* x_0 *égal à* a, $a>0$, si P_{x_0} coupe le rectangle R et si a est le plus petit des nombres, finis ou transfinis de seconde classe, supérieurs aux indices apparents au point x_0 de tous les rectangles R' du crible Γ contenus dans R. Dans ce cas nous écrirons

$$\text{Ind. app.}_{x_0} R = a.$$

Avant d'aller plus loin, rappelons une définition du domaine des nombres transfinis. Un ensemble H formé de nombres finis ou transfinis de seconde classe, en nombre fini ou dénombrable, étant donné, appelons *borne supérieure*

---

points irrationnels dont la représentation par des fractions continues commence par $(a_1, a_2, \dots, a_k)$; cet intervalle sera dit d'*ordre k*.

de H le plus grand des nombres de H s'il existe, ou bien s'il n'existe pas, le plus petit des nombres supérieurs à tous les nombres de H.

D'après cette définition appelons *indice apparent au point x_0 du crible Γ* la borne supérieure de l'ensemble formé des indices apparents au point x_0 de tous les rectangles R du crible Γ; cet indice sera désigné par

$$\text{Ind. app.}_{x_0}\,\Gamma.$$

Il résulte de cette définition que Ind. app.$_{x_0}\,\Gamma$ ne peut exister qu'aux points x_0 du complémentaire analytique $\mathcal{E}$ et que dans chacun de ces points Ind. app.$_{x_0}\,\Gamma$ est un nombre bien déterminé, fini ou transfini de seconde classe.

Comme conséquence nous avons un développement du complémentaire analytique $\mathcal{E}$ en une infinité d'ensembles constituants $\mathcal{E}_\alpha$

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_0+\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\ldots\ldots+\mathcal{E}_\omega+\ldots\ldots+\mathcal{E}_\alpha+\ldots\ldots\,|\,\Omega \tag{1}$$

en désignant par $\mathcal{E}_\alpha$ l'ensemble des points x_0 de $\mathcal{E}$ pour lesquels nous avons Ind. app.$_{x_0}\,\Gamma=\alpha$; ces ensembles $\mathcal{E}_\alpha$ seront dits *constituantes apparentes* du complémentaire analytique $\mathcal{E}$.

Les constituantes apparentes $\mathcal{E}_\alpha$ du développement (1) possèdent les mêmes propriétés que les *constituantes réelles* ([2]) du complémentaire analytique $\mathcal{E}$. Nous nous bornons ici à signaler deux propriétés suivantes:

1°) les constituantes apparentes sont *mesurables B*;

2°) quel que soit un ensemble analytique E_1 contenu dans $\mathcal{E}$, il appartient seulement à une infinité *dénombrable* de constituantes apparentes $\mathcal{E}_\alpha$.

Il résulte de là que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble analytique E soit mesurable B est que toutes les constituantes apparentes $\mathcal{E}_\alpha$ du développement (1), à partir d'une certaine $\mathcal{E}_{\alpha_0}$, soient *nulles*.

Ce résultat conduit fort simplement à une étude approfondie des constituantes apparentes.

Prenons un ensemble E mesurable B quelconque déterminé par un crible rectangulaire Γ et posons les définitions suivantes.

Appelons *indice apparent du crible rectangulaire Γ* la borne supérieure des nombres Ind. app.$_{x_0}\,\Gamma$ lorsque le point variable x_0 parcourt le complémentaire analytique $\mathcal{E}$; cet indice sera désigné par Ind. app. Γ.

([2]) Les expressions *indice apparent* et *constituante apparente* sont employées par opposition avec *indice réel* et *constituante réelle* qu'on définit comme voici.

On appelle *crible rectiligne Γ* dans le plan XOZ une infinité dénombrable d'intervalles parallèles à l'axe OX. Soit Γ_{x_0} l'ensemble des points qu'on obtient en coupant Γ avec la droite $x=x_0$. Si Γ_{x_0} est bien ordonné suivant la direction positive de l'axe OZ, on appelle *indice réel* du crible Γ au point x_0, Ind. réel$_{x_0}\,\Gamma$, le nombre correspondant, fini ou transfini. On appelle *constituante réelle* $\mathcal{E}_\alpha$ l'ensemble des points x_0 pour lesquels nous avons Ind. réel $\Gamma=\alpha$.

Comme le calcul des indices réels paraît être compliqué et difficile, nous préférons ici l'emploi des indices apparents.

Appelons **indice apparent de l'ensemble E** *mesurable B*

$$\text{Ind. app.}\, E$$

le plus petit des nombres Ind. app. Γ *lorsque la lettre Γ parcourt tous les cribles rectangulaires définissant l'ensemble considéré E.*

On voit bien que l'indice apparent de E, Ind. app. E, est un nombre bien déterminé et *ne dépendant que de la nature même de l'ensemble considéré E mesurable B.* Dans ce qui suit nous allons trouver la relation entre la nature de E et Ind. app. E.

Un crible rectangulaire Γ qui définit l'ensemble E mesurable B et pour lequel Ind. app. Γ *coïncide avec* Ind. app. E *est dit* **crible minimum.**

3. - Les inégalités de M. W. Sierpinski. — Dans une de ses lettres de 1917 sur les ensembles analytiques, M. W. SIERPINSKI a indiqué d'importantes relations, sous la forme d'inégalités, d'une part, entre les indices apparents des ensembles E_1, E_2,...., E_n,.... et leur somme et partie commune, et, d'autre part, entre le nombre α et la classe de la somme $\mathcal{E}_0+\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+ .... +\mathcal{E}_\beta+ .... \,|\, \alpha$. Ce paragraphe est consacré à l'exposition des résultats mêmes de M. W. SIERPINSKI (3); les suivants à des développements qui se rattachent à ces inégalités et qui nous amèneront à la détermination exacte des classes des constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ dans un cas particulièrement intéressant.

Nous allons remarquer d'abord que l'indice apparent d'un ensemble E mesurable B, Ind. app. E, est toujours un nombre transfini *limite*, ou bien égal à zéro. En effet, supposons que Ind. app. $E=\alpha+1$ et prenons un crible rectangulaire minimum Γ définissant l'ensemble E donné. Supprimons, dans Γ, tous les rectangles de rang 1; nous aurons un crible rectangulaire nouveau Γ_1 qui définit évidemment le même ensemble E. Et comme nous avons maintenant Ind. app. $\Gamma_1 \leqslant \alpha$, nous sommes amenés à une contradiction. Donc, nous avons toujours

$$\text{Ind. app.}\, E=\omega a,$$

où a est un nombre transfini quelconque de seconde classe, ou bien un nombre fini, $a \geqslant 0$.

Ceci étant établi, nous passons maintenant aux inégalités de M. W. SIERPINSKI.

Soit

$$E_1,\ E_2,\ E_3, ..., E_n, ...$$

une suite illimitée d'ensembles mesurables B quelconques; nous désignons par α_n l'indice apparent de l'ensemble E_n, Ind. app. $E_n=\alpha_n$. Voici maintenant les trois premières inégalités de M. W. SIERPINSKI:

(I) *Ind. app.* $(E_1+E_2+ .... +E_n+ ....) \leqslant$ *borne sup. des nombres* α_n;

---

(3) Ces résultats n'ont jamais été publiés, car les applications immédiates ne paraissaient pas se présenter. Dans ce qui suit nous en donnerons une.

(II) *Ind. app.* $(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \times \ldots) \leqslant$ *borne sup. des nombres* a_n si parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ il n'y a pas de plus grand, ou bien si un tel nombre ne figure dans la suite $a_1, a_2, \ldots$ qu'un nombre fini de fois;

(III) *Ind. app.* $(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \times \ldots) \leqslant$ (*borne sup. des nombres* a_n) $+\omega$ si parmi les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ il existe le plus grand et s'il figure dans cette suite une infinité de fois.

La première inégalité. La démonstration de cette inégalité est très facile: il suffit de diviser le carré fondamental Q en une infinité de bandes parallèles à l'axe OX et d'inscrire à l'intérieur de ces bandes respectivement les cribles minima Γ_n, $n=1, 2, 3, \ldots$ Alors, la réunion des cribles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n, \ldots$ forme évidemment un crible rectangulaire Γ qui définit l'ensemble-somme $E_1+E_2+\ldots+E_n+\ldots$ La première inégalité (I) résulte immédiatement de la définition du crible Γ ainsi construit.

La deuxième et la troisième inégalité. La difficulté de la démonstration consiste précisément à former effectivement un crible rectangulaire Γ qui définit la partie commune $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \times \ldots$ Voici la construction. Pour rectangles de rang 1 du crible cherché Γ nous prenons les rectangles de rang 1 du crible minimum Γ_1; soit R_1 un tel rectangle. Pour rectangles de rang 2 du crible Γ contenus dans R_1 nous prenons les rectangles de BAIRE dont les bases sont chacune le produit de deux bases dont l'une est la base d'un rectangle de rang 2 du crible Γ_1 contenu dans R_1 et l'autre est la base d'un rectangle de rang 2 quelconque du crible Γ_2. D'une manière générale, un rectangle R_n du crible Γ étant formé au moyen des rectangles $R', R'', \ldots, R^{(n)}$ de rang n appartenant respectivement aux cribles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, nous prenons pour rectangles de rang $n+1$ du crible Γ contenus dans R_n tous les rectangles de BAIRE dont les bases sont chacune le produit de $n+1$ bases dont les n premières sont respectivement les bases de n rectangles de rang $n+1$ des cribles $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, contenus respectivement dans les rectangles $R', R'', \ldots, R^{(n)}$ et la dernière est la base d'un rectangle de rang $n+1$ quelconque du crible Γ_{n+1}.

On a évidemment Ind. app.$_{x_0}$ $R_n=0$ dans le cas, et dans ce cas seulement, où Ind. app.$_{x_0}$ $R^{(i)}=0$. Donc, l'induction transfinie nous donne l'inégalité

$$\text{Ind. app.}_{x_0}\, R_n \leqslant \text{Ind. app.}_{x_0}\, R^{(i)}$$

quel que soit $i=1, 2, 3, \ldots, n$. Il en résulte que si x_0 est un point de l'ensemble complémentaire de la partie commune $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \times \ldots$ et si x_0 n'appartient pas à un certain ensemble-multiplicateur E_k, nous aurons

$$\text{Ind. app.}_{x_0}\, R_n \leqslant \text{Ind. app.}\, E_k + (k-1).$$

Comme k est un nombre fini, nous avons achevé la démonstration de la deuxième et de la troisième inégalité de M. W. SIERPINSKI.

C. Q. F. D.

La quatrième inégalité. Avant d'énoncer cette inégalité de M. W. SIERPINSKI, nous avons besoin de rappeler les définitions suivantes ([1]).

Nous considérons les classes de BAIRE-DE LA VALLÉE POUSSIN

$$K_0, \quad K_1, \quad K_2, \quad K_\omega, \ldots, \quad K_\alpha, \ldots \mid \Omega.$$

La classe initiale K_0 de cette classification est formée des ensembles E qui sont des sommes d'intervalles de BAIRE, *ainsi que leurs complémentaires CE.* L'opération fondamentale qui sert à définir les classes successives de cette classification est l'opération *lim* du passage à la limite. Chaque classe K_α de cette classification contient des ensembles de trois espèces. D'abord, les ensembles dits *accessibles inférieurement de classe* α: ce sont des sommes d'une infinité dénombrable d'ensembles de classes inférieures à α; nous les désignons par Inf. α. Puis, les ensembles dits *éléments de classe* α; ce sont des ensembles inaccessibles inférieurement et qui sont en même temps des parties communes à une infinité dénombrable d'ensembles de classes inférieures à α; nous les désignons par él. α. Enfin, les ensembles restants de classe α dits *inaccessibles des deux côtés de classe* α; nous les désignons par Inac. α.

Ce sont *les éléments* qui jouent le rôle principal dans la classification de BAIRE-DE LA VALLÉE POUSSIN: chaque ensemble Inf. α est une somme d'une infinité dénombrable d'éléments des classes $<\alpha$ et chaque ensemble Inac. α est une somme d'une infinité dénombrable d'éléments de classes $\leqslant \alpha$, les éléments des deux sommes n'ayant aucun point commun deux à deux.

Faisons maintenant une convention. Si l'ensemble quelconque E est d'une nature inconnue, mais si nous connaissons que E est ou bien de classe $<\alpha$, ou bien est un Inf. α, nous écrirons $E \leqslant$ Inf. α. De même, si E est de classe $<\alpha$, ou bien un Inf. α, ou bien un él. α, nous écrirons $E \leqslant$ él. α. Enfin, si nous connaissons simplement que E est de classe $\leqslant \alpha$, nous écrirons $E \leqslant$ Inac. α.

Ceci étant rappelé, nous passons à la quatrième inégalité de M. W. SIERPINSKI. Soit E un ensemble analytique *quelconque* et $\mathcal{E}$ son complémentaire; soit

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots \mathcal{E}_\alpha + \ldots \mid \Omega$$

un développement de $\mathcal{E}$ effectué au moyen d'un crible rectangulaire quelconque Γ. Nous désignons par σ_α la somme des constituantes dont les numéros sont inférieurs à α

$$\sigma_\alpha = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\beta + \ldots \mid \alpha.$$

On a évidemment $\sigma_1 = \mathcal{E}_0$ et σ_0 est un ensemble nul.

Voici maintenant la *quatrième* inégalité

$$\text{(IV)} \qquad \sigma_{\omega\alpha} \leqslant \text{Inf. } 2\alpha, \qquad \sigma_{\omega\alpha+n} \leqslant \text{él. } (2\alpha+1)$$

où n est un entier positif (fini), $n \geqslant 1$.

([1]) Voir mes: *Leçons sur les ensembles analytiques*, deuxième Chapitre.

La *démonstration* de la quatrième inégalité est facile. Tout d'abord, l'ensemble σ_1 est évidemment ou bien de classe 0, ou bien un él. 1. Comme l'inégalité $\sigma_{\omega\alpha} \leqslant \text{Inf.}\, 2\alpha$ résulte de l'inégalité $\sigma_{\omega\beta+n} \leqslant \text{él.}\, (2\beta+1)$ supposée établie dans le cas où $\beta<\alpha$ et comme le cas $\sigma_{\omega\alpha+n}$ où $n>1$ se réduit immédiatement au cas $\sigma_{\omega\alpha+n-1}$ lorsqu'on remplace le crible donné Γ par un autre crible, Γ_1, déduit de Γ en supprimant dans Γ tous les rectangles de rang 1, on voit bien que tout revient à considérer le cas $\sigma_{\omega\alpha+1}$. Or, on obtient $\sigma_{\omega\alpha+1}$ de la manière suivante: si $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ sont les rectangles de rang 1 du crible Γ, on désigne par H_n l'ensemble de tous les points x pour lesquels on a Ind. app. $R_n < \omega\alpha$. D'après l'hypothèse, on a $H_n \leqslant \text{Inf.}\, 2\alpha$. Et comme nous avons évidemment

$$\sigma_{\omega\alpha+1} = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n \times \dots,$$

on obtient finalement $\sigma_{\omega\alpha+1} \leqslant \text{él.}\, (2\alpha+1)$. C. Q. F. D.

4. - La détermination des indices apparents des ensembles mesurables *B*. — Les inégalités de M. W. Sierpinski entraînent la détermination complète des indices apparents de tous les ensembles mesurables *B*.

Soit α un nombre fini ou transfini de seconde classe et α^* le plus grand nombre *limite* qui ne surpasse pas α. On a donc

$$\alpha = \alpha^* + n$$

où n est un entier fini, $n \geqslant 0$. Si α est un nombre fini, on pose $\alpha^*=0$.

Voici maintenant les formules qui déterminent les indices apparents des ensembles mesurables B

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} K_{\alpha^*} & \{ \text{ Ind. app.} = \omega\alpha^* \\ K_{\alpha^*+2n} & \{ \text{ Ind. app.} = \omega(\alpha^*+n) \\ K_{\alpha^*+2n+1} & \left\{ \begin{array}{ll} \text{Inf.} & \text{Ind. app.} = \omega(\alpha^*+n) \\ \text{él.} & \text{Ind. app.} = \omega(\alpha^*+n+1) \\ \text{Inac.} & \text{Ind. app.} = \omega(\alpha^*+n+1). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Pour les démontrer remarquons d'abord que les ensembles de classe 0 et Inf. 1 ont l'indice apparent égal à zéro, et *vice versa*: si Ind. app. $E=0$, l'ensemble E est de classe 0, ou bien un Inf. 1.

Les trois premières inégalités de M. W. Sierpinski nous montrent seulement que les indices apparents des ensembles mesurables B ne peuvent jamais surpasser les grandeurs écrites dans les seconds nombres des formules (2). Pour effectuer la détermination complète, nous avons besoin de la quatrième inégalité.

Soit E un ensemble mesurable B dont l'indice apparent est égal à $\omega\alpha$

$$(3) \qquad \text{Ind. app. } E = \omega\alpha.$$

Selon la définition même d'indice apparent, il existe un crible rectangulaire Γ *minimum* qui définit l'ensemble E et dont l'indice apparent est égal à $\omega\alpha$, Ind. app. $\Gamma = \omega a$. Par conséquent, le développement du complémentaire $\mathcal{E}$ de E peut être écrit sous la forme

$$(4) \qquad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_\beta + \dots + \mathcal{E}_{\omega a}$$

car les constituantes suivantes sont toutes nulles. Il en résulte que le complémentaire $\mathcal{E}$ est $\sigma_{\omega a+1}$ et, d'après la quatrième inégalité de M. W. SIERPINSKI, nous avons donc $\mathcal{E} \leqslant$ él. $(2a+1)$. Par conséquent [5] nous obtenons

$$(5) \qquad E \leqslant \text{Inf.}\,(2a+1).$$

Ceci étant établi, considérons le cas où a est un nombre *limite*, $a = a^*$. Dans ce cas $E \leqslant \text{Inf.}\,(a^*+1)$ puisque nous avons évidemment $2a^* = a^*$. Je dis maintenant que nous avons

$$\text{ou bien cl.}\, E = a^*, \quad \text{ou bien } E = \text{Inf.}\,(a^*+1).$$

En effet, si nous avons l'inégalité cl. $E < a^*$, nous pouvons écrire cl. $E = \beta^* + m$, où β^* est un nombre limite (ou zéro) tel que $\beta^* < a^*$ et m est un entier fini, $m \geqslant 0$. Il résulte des *inégalités* (2) que

$$\text{Ind. app. } E \leqslant \omega(\beta^* + \mu)$$

où μ est un nombre fini bien déterminé. Et comme $\beta^* < a^*$, nous en déduisons $\beta^* + \mu < a^*$ et, par suite

$$\text{Ind. app. } E < \omega a^* = \omega a$$

ce qui est contradictoire avec (3).

Ainsi la partie de la formule (2) relative à K_{a^*} est vérifiée. Pour démontrer les autres parties de (2), il suffit de poursuivre par la voie de l'induction complète arithmétique. Si la formule (2) est démontrée pour $a \leqslant a^* + \mu$, où μ est un entier fini, $\mu \geqslant 0$, nous avons à considérer deux cas.

Supposons d'abord que μ est un nombre *pair*, $\mu = 2m$, et que

$$\text{Ind. app. } E = \omega(a^* + m).$$

La formule (5) nous donne $E \leqslant \text{Inf.}\,(a^*+2m+1)$. Donc, si la classe de E est supérieure à $a = a^* + 2m$, l'ensemble E ne peut être que Inf. (a^*+2m+1). Si Ind. app. $E = \omega(a^*+m+1)$, la formule (5) nous donne $E \leqslant \text{Inf.}\,(a^*+2m+2)$. Donc, si nous n'avons pas cl. $E = a^* + 2m + 2$, nous avons nécessairement cl. $E = a^* + 2m + 1$ ce qui prouve la partie de la formule (2) relative à K_{a^*+2m+1}.

Le même raisonnement nous sert à vérifier la partie de la formule (2) relative à K_{a^*+2m}. Supposons que μ est un nombre *impair*, $\mu = 2m - 1$, et que Ind. app. $E = \omega(a^* + m)$. La formule (5) nous donne $E \leqslant \text{Inf.}\,(a^*+2m+1)$. Donc, si nous n'avons

$$\text{ni } E = \text{Inf.}\,(a^*+2m+1), \quad \text{ni } E = \text{él.}\,(a^*+2m-1), \quad \text{ni } E = \text{Inac.}\,(a^*+2m-1),$$

---

[5] Ceci provient du fait que $\mathcal{E}$ est un produit d'ensembles $\leqslant \text{Inf.}\ 2a$, $\mathcal{E} = \Pi(\leqslant \text{Inf.}\ 2a)$ et, par suite, $E = C\mathcal{E} = \Sigma(\leqslant \text{él.}\ 2a) \leqslant \text{Inf.}\,(2a+1)$.

nous avons nécessairement cl. $E = a^* + 2m$ ce qui prouve la partie de la formule (2) relative à K_{a^*+2m}. C. Q. F. D.

5. - Le crible maximum. — Un crible Γ qui définit un ensemble analytique E est dit *crible maximum* si toutes les constituantes

$$\mathcal{E}_0, \quad \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_2, \ldots, \quad \mathcal{E}_\alpha, \ldots \,|\, \Omega$$

du complémentaire $\mathcal{E}$ de E ont les plus grandes classes possibles.

Donc, si Γ^* est un crible arbitraire qui définit un ensemble analytique E^* quelconque et si les constituantes du complémentaire $\mathcal{E}^*$ de E^* sont

$$\mathcal{E}_0^*, \quad \mathcal{E}_1^*, \quad \mathcal{E}_2^*, \ldots, \quad \mathcal{E}_\alpha^*, \ldots \,|\, \Omega$$

on a les inégalités

$$\text{cl}\, \mathcal{E}_\alpha^* \leqslant \text{cl}\, \mathcal{E}_\alpha$$

quel que soit un nombre α fini ou transfini de seconde classe.

Il en résulte que, si Γ et Γ' sont deux cribles maxima quelconques, on a nécessairement

$$\text{cl}\, \mathcal{E}_\alpha = \text{cl}\, \mathcal{E}_\alpha'$$

où $\mathcal{E}_\alpha$ et $\mathcal{E}_\alpha'$ sont les constituantes du numéro α définies par les cribles Γ et Γ'.

On voit bien qu'un ensemble analytique E défini par un crible maximum n'est jamais mesurable B.

Notre but maintenant est de déterminer complètement les classes des constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ des cribles maxima et de démontrer qu'elles croissent *d'une manière monotone* avec α jusqu'à Ω.

Mais il faut d'abord combler une lacune dans nos raisonnements : l'existence même des cribles maxima n'est pas encore démontrée.

Pour la démontrer, nous prenons un espace euclidien à trois dimensions et, dans cet espace, un système d'axes rectangulaires $OXYZ$.

Comme les rectangles de Baire de tous les ordres possibles dans le carré fondamental Q du plan XOZ sont en infinité dénombrable, nous pouvons les numéroter au moyen des entiers positifs :

$$R_1, \quad R_2, \quad R_3, \ldots, \quad R_n, \ldots \tag{6}$$

Considérons maintenant un cube fondamental K

$$(0 < x < 1, \; 0 < y < 1, \; 0 < z < 1)$$

dans l'espace $OXYZ$ [6] et faisons correspondre à chaque intervalle de Baire $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ situé dans l'intervalle $(0 < y < 1)$ sur l'axe OY les k rectangles de Baire $R_{n_1}, R_{n_2}, \ldots, R_{n_k}$. Soient $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ les parallélépipèdes contenus dans le cube fondamental K dont les projections orthogonales sur l'axe OY et sur le plan XOZ sont respectivement l'intervalle de Baire $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ et les rectangles

---

[6] Les coordonnées x, y et z sont toujours irrationnelles.

de BAIRE R_{n_1}, R_{n_2},...., R_{n_k}. Si nous faisons cette construction pour tous les intervalles de BAIRE situés dans $(0<y<1)$, nous obtenons une infinité dénombrable de parallélépipèdes π dont l'ensemble forme un crible de parallélépipèdes Γ dans l'espace à trois dimensions.

Il est bien évident qu'*en coupant le crible Γ de parallélépipèdes ainsi construit avec les plans $y=\mathrm{C^{te}}$ parallèles au plan XOZ on obtient tous les cribles rectangulaires $\Gamma^{(y)}$ possibles.*

Désignons par E un ensemble analytique plan défini par le crible de parallélépipèdes Γ et par $\mathcal{E}$ son complémentaire plan relatif au carré $(0<x<1, 0<y<1)$. Soit

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_0+\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+ \ldots\ldots +\mathcal{E}_\alpha+\ldots\ldots \mid \Omega \tag{7}$$

un développement de $\mathcal{E}$ en une infinité d'ensembles constituants apparents $\mathcal{E}_\alpha$, dont chacun est un ensemble plan de points.

Il est bien évident qu'on obtient toutes les constituantes

$$\mathcal{E}_0^{(y)},\quad \mathcal{E}_1^{(y)},\quad \mathcal{E}_2^{(y)},\ldots\ldots,\quad \mathcal{E}_\alpha^{(y)},\ldots\ldots \mid \Omega$$

du complémentaire $\mathcal{E}^{(y)}$ d'un ensemble analytique linéaire $E^{(y)}$ défini par le crible rectangulaire $\Gamma^{(y)}$

$$\mathcal{E}^{(y)}=\mathcal{E}_0^{(y)}+\mathcal{E}_1^{(y)}+\mathcal{E}_2^{(y)}+ \ldots\ldots +\mathcal{E}_\alpha^{(y)}+\ldots\ldots \mid \Omega$$

simplement en coupant avec les droites $y=\mathrm{C^{te}}$ toutes les constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ du développement (7) du complémentaire $\mathcal{E}$.

Ceci prouve que la constituante plane $\mathcal{E}_\alpha$ est un ensemble mesurable B de classe supérieure ou égale à la classe de la constituante linéaire $\mathcal{E}_\alpha^{(y)}$ provenant du crible rectangulaire $\Gamma^{(y)}$ *quel que soit le nombre irrationnel y dans l'intervalle* $(0<y<1)$.

Donc, le crible Γ est un *crible maximum* (7).

6. - La recherche des classes des constituantes des développements maxima. — Considérons d'abord une constituante $\mathcal{E}_\beta$ dont le numéro β est un nombre *limite*

$$\beta=\omega\alpha, \quad \text{où} \quad \alpha=\alpha^*+n;$$

ici α^* est un nombre limite et n un entier fini, $n\geqslant 0$. Si σ_β est la somme des constituantes $\mathcal{E}_\gamma$ du développement (7) aux numéros γ inférieurs à β, la quatrième inégalité de M. W. SIERPINSKI nous donne

$$\sigma_{\omega\alpha}\leqslant \text{Inf.}\, 2\alpha \quad \text{et} \quad \sigma_{\omega\alpha+m}\leqslant \text{él.}\,(2\alpha+1)$$

où m est un entier positif (fini), $m\geqslant 1$.

(7) Il est vrai que les constituantes $\mathcal{E}_\alpha$ sont *planes*. Mais en établissant une correspondance biunivoque et bicontinue entre les points du carré fondamental $(0<x<1, 0<y<1)$ et les points irrationnels d'un intervalle nouveau $(0<t<1)$, on obtient évidemment un développement maximum *linéaire*.

Comme $a = a^* + n$, nous avons

$$\sigma_{\omega a} \leqslant \text{Inf.}\,(a + 2n) \quad \text{et} \quad \sigma_{\omega a+1} \leqslant \text{él.}\,(a^* + 2n + 1)$$

et, par suite

$$\mathscr{E}_{\omega a} \leqslant \text{él.}\,(a^* + 2n + 1).$$

Il en résulte que toutes les sections $\mathscr{E}^{(y)}_{\omega a}$ de l'ensemble plan $\mathscr{E}_{\omega a}$ par les droites $y = \mathrm{C^{te}}$ parallèles à l'axe OX et situées dans le plan XOY sont des ensembles $\leqslant$ él. $(a^* + 2n + 1)$

$$\mathscr{E}^{(y)}_{\omega a} \leqslant \text{él.}\,(a^* + 2n + 1).$$

D'autre part, d'après la formule (2), tout ensemble Inf. $(a^* + 2n + 1)$ a pour indice apparent $\omega(a^* + n)$. Par conséquent, si nous prenons un plan $y = \mathrm{C^{te}}$ tel que $E^{(y)} = \text{Inf.}\,(a^* + 2n + 1)$, nous avons

$$\text{él.}\,(a^* + 2n + 1) = \mathscr{E}^{(y)}_0 + \mathscr{E}^{(y)}_1 + \mathscr{E}^{(y)}_2 + \dots + \mathscr{E}^{(y)}_{\omega(a^*+n)}.$$

Et puisque $\sigma^{(y)}_{\omega(a^*+n)} \leqslant \text{Inf.}\,(a^* + 2n)$, nous avons $\mathscr{E}^{(y)}_{\omega(a^*+n)} = \text{él.}\,(a^* + 2n + 1)$.

Donc, nous avons finalement

$$\mathscr{E}_{\omega(a^*+n)} = \text{él.}\,(a^* + 2n + 1)$$

ce qui peut être écrit sous la forme définitive

$$\mathscr{E}_{\omega a} = \text{él.}\,(2a + 1). \tag{8}$$

Il ne reste maintenant qu'à trouver la nature des constituantes $\mathscr{E}_{\omega a+m}$, où m est un entier positif (fini). Malheureusement la détermination de la nature de $\mathscr{E}_{\omega a+m}$ paraît présenter des difficultés; aussi nous bornons-nous ici à reconnaître *la classe* seule de la constituante $\mathscr{E}_{\omega a+m}$.

Tout d'abord, comme nous avons

$$\sigma_{\omega a+m+1} \leqslant \text{él.}\,(2a + 1) \quad \text{et} \quad \sigma_{\omega a+m} \leqslant \text{él.}\,(2a + 1),$$

l'ensemble-différence $\sigma_{\omega a+m+1} - \sigma_{\omega a+m}$ est au plus de classe $2a + 1$. Donc

$$\text{cl.}\,\mathscr{E}_{\omega a+m} \leqslant 2a + 1. \tag{9}$$

D'autre part, prenons un plan $y = \mathrm{C^{te}}$ tel que

$$E^{(y)} = \text{Inf.}\,(2a + 1).$$

On a, d'après la formule (2)

$$\text{Ind. app.}\,E^{(y)} = \omega a.$$

D'ailleurs, nous pouvons évidemment supposer l'ensemble $E^{(y)}$ situé dans un intervalle de Baire d'ordre $m + 1$ de manière que le crible minimum correspondant $\Gamma^{(y)}$ soit contenu dans un rectangle de Baire d'ordre $m + 1$ situé dans le carré fondamental du plan $y = \mathrm{C^{te}}$.

Cela posé, ajoutons au crible $\Gamma^{(y)}$ les m rectangles de BAIRE d'ordres 1, 2, 3,...., m qui contiennent $\Gamma^{(y)}$ à leur intérieur. Nous aurons de cette manière un crible rectangulaire nouveau Γ_1 qui définit l'ensemble $E^{(y)} = \text{Inf.}\,(2a+1)$ et tel que

$$\text{Ind. app. } \Gamma_1 = \omega a + m.$$

Donc, il existe un plan nouveau $y = \text{C}^{\text{te}}$ qui coupe l'ensemble plan $\mathcal{E}_{\omega a+m}$ précisément en l'ensemble $\mathcal{E}_{\omega a}$ et, par suite, d'après (8) en un él. $(2a+1)$. Il en résulte que

$$\text{cl. } \mathcal{E}_{\omega a+m} \geqslant 2a+1. \tag{10}$$

La comparaison des inégalités (9) et (10) nous donne l'égalité désirée

$$\text{cl. } \mathcal{E}_{\omega a+m} = 2a+1. \tag{11}$$

La réunion des formules (8) et (11)

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}_{\omega a} = \text{él. } (2a+1) \\ \text{cl. } \mathcal{E}_{\omega a+m} = 2a+1, \text{ où } m \text{ est fini, } m > 0, \end{array}\right. \tag{12}$$

détermine les classes de toutes les constituantes $\mathcal{E}_a$ du développement maximum (7).

C. Q. F. D.

Les considérations précédentes nous montrent que, *s'il s'agit de l'existence d'ensembles mesurables B de classes diverses, il n'est nullement nécessaire de pratiquer un « raisonnement de proche en proche »*, puisque chaque développement maximum nous donne les constituantes mesurables B de toutes les classes *impaires* possibles, *finies et transfinies*, une pour chaque classe, et ceci en les embrassant d'un seul regard et d'un seul coup, sans aller pas à pas.

Voici la conclusion à laquelle nous arrivons ; nous pouvons définir des cribles maxima en effectuant une construction géométrique fort simple ; les constituantes $\mathcal{E}_a$ des développements maxima correspondants sont des ensembles mesurables B dont les classes croîssent *d'une manière monotone* jusqu'à Ω. Nous sommes d'ailleurs certain qu'on obtient de cette manière toutes les classes *impaires*, finies et transfinies. Il reste à reconnaître s'il existe un développement qui ne soit pas un développement maximum et dont les constituantes aient les classes tendant vers Ω d'une manière *non monotone* quel que soit le numéro à partir duquel on considère les constituantes : ce problème paraît présenter de grandes difficultés.

Et enfin, le problème de reconnaître s'il existe un développement dont les constituantes ne soient pas nulles et dont les classes ne tendent pas vers Ω avec le numéro a présente de graves difficultés dans l'état actuel de la Science. Il est assez probable que l'ordre même des difficultés de ce dernier problème est celui du problème du continu.