Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Guido Ascoli

Funzioni antiarmoniche in un campo circolare

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 3 (1933), p. 255-268

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_3_255_0>

FUNZIONI ANTIARMONICHE IN UN CAMPO CIRCOLARE

di GUIDO ASCOLI (Pisa).

In un recente lavoro sulla teoria degli spazi lineari metrici (o vettoriali) (1) ho avuto occasione di osservare che nello spazio $\mathfrak{L}_p$ delle funzioni sommabili con le loro potenze p^{esime} $(p \geqslant 1)$ in un campo aperto e limitato σ, con la metrica definita da

$$\operatorname{mod} f = \left\{ \int_\sigma |f(P)|^p d\sigma(P) \right\}^{1/p}$$

le funzioni armoniche in ogni punto di σ, o equivalenti a funzioni siffatte, formano una varietà lineare; e che lo stesso può affermarsi per le funzioni armoniche nello spazio $\mathfrak{C}$ delle funzioni continue in σ, supposto ora chiuso, con la metrica definita da

$$\operatorname{mod} f = \max |f(P)| \text{ in } \sigma.$$

Da questo, in virtù dei risultati di detto lavoro, tenuto anche conto della separabilità degli spazi considerati, segue che la varietà delle funzioni armoniche appartiene a qualche iperpiano, ed è anzi completa intersezione di un'infinità numerabile di iperpiani (2). In termini analitici, esiste un funzionale lineare $A(f)$ in ciascuno degli spazi in questione che si annulla se f è armonica; ed esiste anche una successione $A_n(f)$ di funzionali lineari che si annullano per una certa funzione f allora e allora soltanto che f è armonica (in $\mathfrak{C}$) o equivalente a una funzione armonica (in $\mathfrak{L}_p$).

La diretta costruzione di queste funzionali riesce assai facile sfruttando opportunamente i classici teoremi di media (3); ma i risultati che così si ottengono non sono nè eleganti nè utili. Si può sperare di ottenere risultati migliori per campi particolari; ed è ciò che qui mi propongo di mostrare per il caso semplicissimo, ma senza dubbio interessante, di un campo circolare. Mi riferisco allo spazio $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}$ delle funzioni sommabili, come al più ampio di quelli considerati; i risultati sono a fortiori applicabili agli altri spazi.

(1) *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari.* [Annali di Matematica (4a), t. IX (1931), pp. 33-81 e t. X (1931-32), pp. 203-232], n.° 29 e n.° 31, *g*).

(2) L. c., n.° 45, *a*).

(3) L. c., nota (56).

Tenendo presente la forma assegnata da STEINHAUS ([4]) ai funzionali lineari in $\mathfrak{L}$

$$A(f)=\int_\sigma f(P)g(P)d\sigma(P)$$

con $g(P)$ sommabile e limitata in σ, si vede che i funzionali in questione sono dati dalle $g(P)$ della specie indicata ortogonali ad ogni funzione armonica; tali funzioni chiamo *antiarmoniche.* Costruita allora una classe di funzioni antiarmoniche di forma particolarmente semplice, estraggo da essa un sistema ortogonale (A') tale che l'ortogonalità di una funzione ad esso è condizione necessaria e sufficiente per la sua equivalenza ad una funzione armonica. La costruzione di (A') può esser fatta in più modi; si può, per esempio, ottenere che il sistema sia formato di polinomi razionali interi nelle coordinate cartesiane x, y.

Le funzioni antiarmoniche, viceversa, possono caratterizzarsi mediante l'ortogonalità al noto sistema ortogonale dei polinomi armonici, definiti in coordinate polari da

$$(A) \qquad \varphi_m(\varrho, \theta)=\varrho^m \cos m\theta, \qquad \psi_m(\varrho, \theta)=\varrho^m \operatorname{sen} m\theta.$$

I due sistemi (A) e (A') formano nel loro complesso un sistema completo.

Quest'ultimo risultato fa comprendere come la teoria acquisti la sua maggior semplicità e trasparenza quando si operi, invece che in $\mathfrak{L}$, nello spazio hilbertiano $\mathfrak{L}_2$; la costruzione di (A') appare allora quella del *sistema complementare* di (A), problema di cui in generale si sono occupati LAURICELLA e SEVERINI. A questo lato della questione sono dedicate le ultime pagine della Memoria, ove si mette anche in luce il nesso, quasi evidente, che essa ha con il problema dell'*armonica viciniore* di LEVI-CIVITA. Operando, come si è fatto, nel campo delle funzioni semplicemente sommabili, la trattazione è più delicata; in compenso si ha il modo di applicare la teoria anche a casi più estesi e pur semplici, come quello delle funzioni armoniche che hanno sul contorno del cerchio poli di primo ordine ([5]).

1. - Indichiamo con σ il campo circolare aperto definito in coordinate polari ϱ, θ da $0 \leqslant \varrho < R$, e consideriamo una funzione $f(\varrho, \theta)$ armonica e sommabile in σ; ciò limita, in modo che non ci occorre ulteriormente indagare, il comportamento della f per $\varrho \to R$.

Come è ben noto, la $f(\varrho, \theta)$ ammette in σ uno sviluppo della forma:

$$(1) \qquad f(\varrho, \theta)=\frac{1}{2}A_0+\sum_1^\infty \varrho^m(A_m \cos m\theta+B_m \operatorname{sen} m\theta)$$

([4]) H. STEINHAUS: *Additive und stetige Funktionaloperationen.* (Math. Zeitschrift, V, 1919).

([5]) Un breve sunto della presente Memoria è stato esposto nella XXI Riunione della Soc. Ital. per il Progresso delle Scienze (Roma, ottobre 1932) e riportato in Boll. Unione Mat. Italiana, dicembre 1932.

equiconvergente in ogni parte chiusa di di σ; e si ha, per $0<\varrho<R$:

$$(2) \qquad \pi\varrho^m A_m = \int_0^{2\pi} f(\varrho, \theta) \cos m\theta d\theta, \qquad \pi\varrho^m B_m = \int_0^{2\pi} f(\varrho,\theta) \operatorname{sen} m\theta d\theta.$$

Di qui si traggono facilmente quante si vogliono espressioni di A_m, B_m mediante integrali estesi a σ; si ha, per esempio, per $s \geqslant 0$:

$$\int_\sigma f(\varrho, \theta) \cdot \varrho^s \cos m\theta d\sigma = \int_0^R \varrho^{s+1} d\varrho \int_0^{2\pi} f(\varrho, \theta) \cos m\theta d\theta = \pi A_m \int_0^R \varrho^{m+s+1} d\varrho = \frac{\pi A_m R^{m+s+2}}{m+s+2}.$$

In particolare, per $s=0$, $s=m$, si hanno le formule:

$$(3) \qquad \frac{\pi R^{m+2} A_m}{m+2} = \int_\sigma f(\varrho, \theta) \cos m\theta \cdot d\sigma, \qquad \frac{\pi R^{m+2} B_m}{m+2} = \int_\sigma f(\varrho, \theta) \operatorname{sen} m\theta \cdot d\sigma,$$

$$(4) \qquad \frac{\pi R^{2(m+1)} A_m}{2(m+1)} = \int_\sigma f(\varrho, \theta) \cdot \varrho^m \cos m\theta \cdot d\sigma, \qquad \frac{\pi R^{2(m+1)} B_m}{2(m+1)} = \int_\sigma f(\varrho, \theta) \cdot \varrho^m \operatorname{sen} m\theta \cdot d\sigma.$$

Se $f(\varrho, \theta)$ non è armonica, ma differisce da una funzione armonica $\bar{f}(\varrho, \theta)$ solo nei punti di un aggregato di misura nulla, la (2) potrà non essere applicabile; supposta però ancora la sommabilità di f in σ, saranno invece valide le (3) e (4), le quali daranno i coefficienti dello sviluppo di questa $\bar{f}$ equivalente alla f. Dalla (4) segue poi:

a) Una funzione armonica e sommabile in σ, ortogonale alle funzioni

$$\varphi_m(\varrho, \theta) = \varrho^m \cos m\theta, \qquad \psi_m(\varrho, \theta) = \varrho^m \operatorname{sen} m\theta \qquad (m=0, 1, 2, \ldots)$$

è identicamente nulla in σ.

2. - LEMMA. - *Se nel campo aperto σ definito da $0 \leqslant \varrho < R$ la funzione $f(\varrho, \theta)$ è continua e sommabile, ed è $0<k<1$, si ha*:

$$\lim_{k \to 1} \int_\sigma |f(\varrho, \theta) - f(k\varrho, \theta)| d\sigma = 0.$$

Il teorema vale anche nella sola ipotesi della sommabilità della f e ha allora molta analogia con un noto teorema di LEBESGUE ([6]); nelle ipotesi fatte, sufficienti per il nostro scopo, la dimostrazione è però assai più semplice.

Sia la f limitata:

$$|f(\varrho, \theta)| < M;$$

sarà anche, per $0<k<1$,

$$|f(k\varrho, \theta)| < M, \qquad |f(\varrho, \theta) - f(k\varrho, \theta)| < 2M.$$

La funzione $|f(\varrho, \theta) - f(k\varrho, \theta)|$ è dunque limitata in σ; essa è poi evidentemente sommabile e per la supposta continuità della f tende a zero per $k \to 1$; per il

([6]) H. LEBESGUE: *Leçons sur les séries trigonométriques*. 1906, p. 13.

teorema di ARZELÀ-LEBESGUE si avrà dunque

$$\lim_{k\to 1}\int_\sigma |f(\varrho,\theta)-f(k\varrho,\theta)|\,d\sigma=0$$

come si voleva.

Se la f non è limitata, preso un numero $l>0$ e per il momento arbitrario, si considerino gli aggregati I', I'' in cui si ha, rispettivamente, $f>l$ e $f<-l$, e si ponga

$$\begin{aligned} f_1(\varrho,\theta)&=l \text{ in } I',\\ &=-l \text{ in } I'',\\ &=f(\varrho,\theta) \text{ in } \sigma-I'-I''. \end{aligned}$$

La f_1 sarà continua e limitata in σ e quindi sommabile; e sarà pure sommabile la $f_2=f-f_1$, che è nulla ovunque salvo in I' e I''. Si avrà allora:

$$\int_\sigma |f(\varrho,\theta)-f(k\varrho,\theta)|\,d\sigma\leqslant\int_\sigma |f_1(\varrho,\theta)-f_1(k\varrho,\theta)|\,d\sigma+\int_{I'+I''}|f_2(\varrho,\theta)|\,d\sigma+\int_{I'+I''}|f_2(k\varrho,\theta)|\,d\sigma.$$

Sia $\varepsilon>0$, $k>\frac{1}{2}$. Come è noto dalla teoria dell'integrale di LEBESGUE, il secondo integrale del secondo membro è, per l abbastanza grande, $<\varepsilon/3$, e lo stesso può dirsi del terzo, qualunque sia il valore di k. Facendo infatti il cambiamento di variabili $\varrho_1=k\varrho$, $\theta_1=\theta$, da cui $d\sigma_1=k^2 d\sigma$, dicendo i', i'' i trasformati di I', I'', e tenendo conto che è $|f_2|\leqslant|f|$, si ha subito,

$$\int_{I'+I''}|f_2(k\varrho,\theta)|\,d\sigma=\frac{1}{k^2}\int_{i'+i''}|f_2(\varrho_1,\theta_1)|\,d\sigma_1<4\int_{i'+i''}|f(\varrho_1,\theta_1)|\,d\sigma_1$$

e ciò prova l'asserto, perchè la misura di $i'+i''$, minore di quella di $I'+I''$, tende a zero per $l\to\infty$.

Scelto così il valore di l, basterà prendere k abbastanza vicino a 1 perchè sia

$$\int_\sigma |f_1(\varrho,\theta)-f_1(k\varrho,\theta)|\,d\sigma<\frac{\varepsilon}{3}$$

giacchè la f_1 è limitata e continua; e sarà allora

$$\int_\sigma |f(\varrho,\theta)-f(k\varrho,\theta)|\,d\sigma<\varepsilon$$

ciò che dimostra anche in questo caso il teorema.

b) Se $f(\varrho,\theta)$ è armonica e sommabile in σ, per ogni $\varepsilon>0$ esiste una combinazione lineare $P(\varrho,\theta)$ di un numero finito di funzioni φ_m, ψ_m, tale che

$$\int_\sigma |f(\varrho,\theta)-P(\varrho,\theta)|\,d\sigma<\varepsilon$$

ossia che P disti da f, in $\mathfrak{L}_1$, meno di ε.

In altre parole, le φ_m, ψ_m costituiscono una *base* in $\mathfrak{L}_1$ per la varietà lineare delle funzioni armoniche. Per dimostrarlo, dallo sviluppo (1) per la $f(\varrho,\theta)$ ricaviamo l'altro, uniformemente convergente *in tutto* σ:

$$f(k\varrho,\theta)=\frac{1}{2}A_0+\sum k^m\varrho^m(A_m\cos m\theta+B_m \operatorname{sen} m\theta),$$

e scelto prima k, in base al lemma, in modo che sia

$$\int_\sigma |f(\varrho,\theta)-f(k\varrho,\theta)|\,d\sigma<\frac{\varepsilon}{2},$$

prendiamo dallo sviluppo una somma parziale $P(\varrho,\theta)$, in modo che sia in tutto σ

$$|f(k\varrho,\theta)-P(\varrho,\theta)|<\frac{\varepsilon}{2\pi R^2}$$

e quindi:

$$\int_\sigma |f(k\varrho,\theta)-P(\varrho,\theta)|\,d\sigma<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Sarà allora:

$$\int_\sigma |f(\varrho,\theta)-P(\varrho,\theta)|\,d\sigma<\varepsilon$$

dove $P(\varrho,\theta)$ risponde evidentemente alle condizioni richieste.

3. - Diciamo che una funzione $g(\varrho,\theta)$ limitata e misurabile in σ è *antiarmonica* se essa è ortogonale in σ ad ogni funzione armonica e sommabile nello stesso campo.

c) Una funzione $g(\varrho,\theta)$ limitata e misurabile in σ è antiarmonica allora e allora soltanto che essa è in σ ortogonale a tutte le $\varphi_m(\varrho,\theta)$ e $\psi_m(\varrho,\theta)$.

Se infatti si adottano le notazioni del teorema b), e si suppone la g ortogonale alle φ_m e ψ_m, si ha anche

$$\int_\sigma g(\varrho,\theta)P(\varrho,\theta)\,d\sigma=0$$

e quindi se $|g|<M$:

$$\left|\int_\sigma g(\varrho,\theta)f(\varrho,\theta)\,d\sigma\right|=\left|\int_\sigma g(\varrho,\theta)[f(\varrho,\theta)-P(\varrho,\theta)]\,d\sigma\right|<\pi R^2M\varepsilon$$

donde, per l'arbitrarietà di ε, segue la tesi. L'inversa è evidente, poichè le φ_m e ψ_m sono armoniche.

Questo teorema permette di dimostrare l'effettiva esistenza di funzioni antiarmoniche; cercando, per esempio, quelle tra esse che hanno la forma

$$g(\varrho,\theta)=\varrho^s\cos s\theta\cdot H(\varrho) \qquad (s \text{ intero e } \geqslant 0)$$

si trova sùbito che la condizione di ortogonalità alle ψ_m e anche alle φ_m per $m\neq s$ è soddisfatta; l'ortogonalità alla φ_s richiede che sia

$$\int_0^R \varrho^{2s+1}H(\varrho)\,d\varrho\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2 s\theta\,d\theta=0$$

cioè

$$\int_0^R \varrho^{2s+1}H(\varrho)\,d\varrho=0$$

ciò che si ottiene facilmente e in infiniti modi. In particolare può porsi

$$H(\varrho)=\varrho^n-\frac{2s+2}{2s+n+2}R^n;$$

e facendo variare in tutti i modi possibili n e s, e sostituendo anche sen $s\theta$ a cos $s\theta$ nell'espressione di $g(\varrho, \theta)$, come è evidentemente lecito, si ha la doppia successione di funzioni antiarmoniche

$$
(5) \qquad \begin{aligned} u_{m,n}(\varrho, \theta) &= \varrho^m \cos m\theta \left(\varrho^n - \frac{2m+2}{2m+n+2} R^n\right), \\ v_{m,n}(\varrho, \theta) &= \varrho^m \operatorname{sen} m\theta \left(\varrho^n - \frac{2m+2}{2m+n+2} R^n\right) \end{aligned}
$$

$$(m, n = 0, 1, 2, 3, \ldots.)$$

che avrà per noi capitale importanza. Si ha infatti il teorema, perfettamente analogo al teorema c):

d) *Una funzione $f(\varrho, \theta)$, sommabile in σ, è equivalente a una funzione armonica in σ allora e allora soltanto che essa sia in σ ortogonale a tutte le $u_{m,n}$, $v_{m,n}$.*

Basterà occuparsi della prima parte, la seconda essendo evidente. Si abbia per ipotesi per $m, n = 0, 1, 2, \ldots.$

$$\int_\sigma f(\varrho, \theta) u_{m,n}(\varrho, \theta) d\sigma = 0, \qquad \int_\sigma f(\varrho, \theta) v_{m,n}(\varrho, \theta) d\sigma = 0.$$

Applicando al primo integrale un noto teorema di FUBINI (7), si ha che esiste per quasi ogni valore di ϱ l'integrale semplice:

$$I_m(\varrho) = \int_0^{2\pi} f(\varrho, \theta) \cos m\theta d\theta.$$

Ponendo allora per gli eventuali valori eccezionali $I_m(\varrho) = 0$, si avrà per $n = 0, 1, 2, \ldots.$

$$\int_0^R \varrho^{m+1} \left(\varrho^n - \frac{2m+2}{2m+n+2} R^n\right) I_m(\varrho) d\varrho = 0$$

che può scriversi:

$$\frac{2m+n+2}{R^n} \int_0^R \varrho^{m+n+1} I_m(\varrho) d\varrho = (2m+2) \int_0^R \varrho^{m+1} I_m(\varrho) d\varrho.$$

Ciò prova che il primo membro ha un valore c_m indipendente da n; avuto allora riguardo all'identità

$$\frac{(2m+n+2)c_m}{R^{2m+n+2}} \int_0^R \varrho^{2m+n+1} d\varrho = c_m$$

si ottiene subito sostituendo:

$$\int_0^R \varrho^{m+n+1} \left(I_m(\varrho) - \frac{c_m \varrho^m}{R^{2m+2}}\right) d\varrho = 0.$$

---

(7) G. FUBINI: *Sugli integrali multipli.* Rend. R. Acc. Lincei (5a), 16, I, 1907; cfr. anche vari trattati (per esempio, CARATHÉODORY: *Reelle Funktionen.* Berlin, 1918, p. 621).

Sicchè la funzione
$$\bar{I}_m(\varrho)=\varrho^{m+1}\left(I_m(\varrho)-\frac{c_m\varrho^m}{R^{2m+2}}\right)$$
è ortogonale in $0\vdash\!\dashv R$ alle funzioni 1, ϱ, ϱ^2,.... Per un risultato noto ([8]) è quasi ovunque $\bar{I}_m(\varrho)=0$, e quindi:

$$I_m(\varrho)=\frac{c_m\varrho^m}{R^{2m+2}}=\pi A_m\varrho^m, \tag{6}$$

avendo posto
$$\frac{c_m}{\pi R^{2m+2}}=A_m.$$

In modo analogo, dette B_m certe costanti convenienti, sarà per quasi ogni valore di ϱ:

$$J_m(\varrho)=\int_0^{2\pi} f(\varrho,\theta)\ \mathrm{sen}\ m\theta d\theta=\pi B_m\varrho^m. \tag{7}$$

Dalla (6), moltiplicando per $\varrho d\varrho$ e integrando, si ha ora:
$$\int_\sigma f(\varrho,\theta)\cos m\theta d\sigma=\frac{\pi A_m R^{m+2}}{m+2}$$
e quindi, posto
$$\int_\sigma |f(\varrho,\theta)|\, d\sigma=\mu$$
si ha la maggiorazione
$$\frac{\pi|A_m|R^{m+2}}{m+2}\leqslant\mu,\qquad |A_m|\leqslant\frac{\mu(m+2)}{\pi R^{m+2}}.$$
Analogamente per B_m; ne segue che per $\varrho<R$ è convergente la serie
$$\frac{1}{2}A_0+\sum_1^\infty \varrho^m(A_m\cos m\theta+B_m\ \mathrm{sen}\ m\theta)$$
la quale rappresenta quindi una funzione armonica $\bar{f}(\varrho,\theta)$; e valgono per essa le formule (2)

$$\int_0^{2\pi}\bar{f}(\varrho,\theta)\cos m\theta d\theta=\pi A_m\varrho^m,\qquad \int_0^{2\pi}\bar{f}(\varrho,\theta)\ \mathrm{sen}\ m\theta d\theta=\pi B_m\varrho^m. \tag{8}$$

Il confronto delle (6), (7), (8), per la nota completezza del sistema $\cos m\theta$, $\mathrm{sen}\ m\theta$, dà, per quasi ogni ϱ, e, per i ϱ non eccezionali, per quasi ogni θ:
$$f(\varrho,\theta)=\bar{f}(\varrho,\theta).$$

È chiaro che l'eventuale aggregato dei punti ove questa eguaglianza non sussiste ha misura superficiale nulla, onde resta dimostrata l'equivalenza della f ad una funzione armonica in σ.

Questo risultato si estende ora facilmente nel modo seguente:

e) Il teorema d) continua a sussistere ove in esso alle $u_{m,n}$, $v_{m,n}$ si sostituiscano le funzioni $g_{m,n}$, $h_{m,n}$ così definite

$$g_{m,n}(\varrho,\theta)=\varrho^m\cos m\theta\cdot H_{m,n}(\varrho),\qquad h_{m,n}(\varrho,\theta)=\varrho^m\ \mathrm{sen}\ m\theta\cdot H_{m,n}(\varrho) \tag{9}$$

([8]) Vedi una dimostrazione molto semplice di SEVERINI in Rend. Lincei, 1° sem. 1921.

dove $H_{m,n}(\varrho)$ è un polinomio di grado n in ϱ che soddisfa alla condizione

$$\int_0^R \varrho^{2m+1} H_{m,n}(\varrho) d\varrho = 0. \tag{10}$$

Si è già visto che le $g_{m,n}$, $h_{m,n}$ sono funzioni antiarmoniche in σ; proveremo ora che esse sono anzi combinazioni lineari delle $u_{m,n}$, $v_{m,n}$, e viceversa; sarà allora chiaro che le funzioni ortogonali ad una classe di funzioni sono ortogonali anche all'altra, e viceversa; e saremo così ricondotti al teorema *d*), or ora dimostrato.

Si ponga

$$H_{m,n}(\varrho) = a_0 + a_1\varrho + \dots + a_n\varrho^n \qquad (a_n \neq 0);$$

la (10) dà allora:

$$\frac{a_0 R^{2m+2}}{2m+2} + \frac{a_1 R^{2m+3}}{2m+3} + \dots + \frac{a_n R^{2m+n+2}}{2m+n} = 0$$

cioè

$$a_0 + a_1 \frac{2m+2}{2m+3} R + a_2 \frac{2m+2}{2m+4} R^2 + \dots + a_n \frac{2m+2}{2m+n+2} R^n = 0.$$

Mediante questa, si può eliminare a dall'espressione di $H_{m,n}$, e si ottiene:

$$H_{m,n}(\varrho) = \sum_1^n a_k \left(\varrho^k - \frac{2m+2}{2m+k+2} R^k\right)$$

e quindi

$$g_{m,n} = \sum_1^n a_k u_{m,k}, \qquad h_{m,n} = \sum_1^n a_k v_{m,k}.$$

Ciò prova intanto che le $g_{m,n}$, $h_{m,n}$ sono combinazioni lineari delle $u_{m,n}$, $v_{m,n}$; se poi si scrivono le formule precedenti per un dato m e per $n = 0, 1, 2, \dots$ e si nota che $a_n \neq 0$, si vede che si possono da esse ricavare le $u_{m,n}$, $v_{m,n}$, ad una ad una, come combinazioni lineari delle $g_{m,n}$, $h_{m,n}$, come si era asserito. Precisamente la $u_{m,n}$ verrà espressa mediante le $g_{m,k}$ con $k = 0, 1, 2, \dots, n$, e così la $v_{m,n}$ per le $h_{m,k}$ con gli stessi indici.

4. - Per la presenza dei polinomi $H_{m,n}$ nelle formule (9), polinomi sottoposti solo alla condizione (10), una larga arbitrarietà sussiste nella costruzione delle $g_{m,n}$, $h_{m,n}$. Ne profitteremo ora per rendere ortogonale il sistema di queste funzioni; ciò che è reso assai semplice dal fatto che, comunque si scelgano i polinomi $H_{m,n}$, è sempre, come agevolmente si verifica:

α) ogni $g_{m,n}$ ortogonale a ogni $h_{m,n}$;

β) per $m \neq m'$, ogni $g_{m,n}$ ortogonale ad ogni $g_{m',n'}$, e ogni $h_{m,n}$ ad ogni $h_{m',n'}$.

Basterà dunque occuparci della ortogonalità delle singole successioni

$$g_{m,0}, \quad g_{m,1}, \quad g_{m,2}, \dots; \qquad h_{m,0}, \quad h_{m,1}, \quad h_{m,2}, \dots$$

per ogni determinato valore di m.

Occupiamoci, per esempio, delle $g_{m,n}$. Perchè una $g_{m,n}$ sia ortogonale alle $g_{m',n'}$ con $n' < n$, basterà, per quanto si è visto al n.° 3, che essa sia ortogonale alle $u_{m,k}$, con $k<n$. Ciò porta immediatamente alle equazioni

$$\int_0^R \varrho^{2m+1}\left(\varrho^k - \frac{2m+2}{2m+k+2}R^k\right) H_{m,k}(\varrho)d\varrho = 0 \qquad (k=1, 2,...., n-1)$$

o, per la (10), all'altra:

$$\int_0^R \varrho^{2m+k+1} H_{m,n}(\varrho)d\varrho = 0 \qquad (k=0, 1, 2,...., n-1) \tag{11}$$

dove, con l'inclusione del valore $k=0$, viene rappresentata anche la (10).

Si avrà una leggera semplificazione formale, ponendo

$$\varrho = Rt, \qquad H_{m,n}(\varrho) = \lambda_n(t);$$

si ottiene così per i λ_n la condizione:

$$\int_0^1 t^{2m+k+1}\lambda_n(t)dt = 0 \qquad (k=0, 1, 2,...., n-1). \tag{12}$$

Un semplice artificio, che risale a LEGENDRE ([9]), ci darà ora la forma dei polinomi λ_n. Posto

$$\lambda_n(t) = b_0 + b_1 t + ... + b_n t^n$$

le (12) ci danno per le b_r le equazioni lineari omogenee:

$$\sum_0^n {}_r \frac{b_r}{2m+k+r+2} = 0 \qquad (k=0, 1, 2,...., n-1),$$

le quali esprimono che la funzione razionale

$$\sum_0^n \frac{b_r}{2m+z+r+2} = \frac{F(z)}{\prod_0^n {}_r (2m+z+r+2)} \tag{13}$$

si annulla per $z=0, 1, 2,...., n-1$. Poichè $F(z)$ è un polinomio di grado n, sarà

$$F(z) = Cz(z-1)....(z-n+1)$$

dove C è una costante. Moltiplicando allora la (13) per $2m+z+s+2$ e facendo poi $z=-2m-s-2$ si ottiene in modo ben noto il valore di b_s, e cioè

$$b_s = C\frac{F(-2m-s-2)}{(-1)^s s!\,(n-s)!} = C(-1)^{n-s}\frac{\prod_0^{n-1}(2m+r+s+2)}{s!\,(n-s)!}.$$

Si ha di qui:

$$\frac{b_{s+1}}{b_s} = \frac{(-n+s)(2m+n+2+s)}{(1+s)(2m+2+s)}$$

e da ciò risulta che, scelta C in modo che sia $b_0=1$, $\lambda_n(t)$ è un polinomio ipergeometrico o di JACOBI; precisamente:

$$\lambda_n(t) = F(-n, 2m+n+2, 2m+2, t).$$

([9]) Cfr. E. HEINE: *Handbuch der Kugelfunktionen.* (Berlin, 1861), pp. 37-38.

Come è noto [10], $\lambda_n(t)$ si esprime anche mediante una derivata di ordine n nel modo seguente:

$$\lambda_n(t)=\frac{t^{-2m-1}}{(2m+2)(2m+3)\dots(2m+n+1)}\frac{d^n}{dt^n}[t^{2m+n+1}(1-t)^n];$$

la verifica è del resto assai facile.

Per le funzioni $g_{m,n}$, $h_{m,n}$ abbiamo dunque l'espressione generale:

$$\begin{cases} g_{m,n}(\varrho,\theta)=\varrho^m\cos m\theta\cdot F\left(-n,\ 2m+n+2,\ 2m+2,\ \frac{\varrho}{R}\right)\\ h_{m,n}(\varrho,\theta)=\varrho^m\operatorname{sen} m\theta\cdot F\left(-n,\ 2m+n+2,\ 2m+2,\ \frac{\varrho}{R}\right)\end{cases}$$

che mediante l'introduzione della variabile complessa $z=\varrho(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)$ si scrivono più brevemente:

$$g_{m,n}+ih_{m,n}=z^m\cdot F\left(-n,\ 2m+n+2,\ 2m+2,\ \frac{|z|}{R}\right).$$

Come funzioni delle coordinate cartesiane x, y, le $g_{m,n}$, $h_{m,n}$ appaiono dunque razionali in x, y, $\sqrt{x^2+y^2}$.

5. - Volendo dare al sistema ortogonale trovato la forma normale, occorre dividere $g_{m,n}$ e $h_{m,n}$ per

$$\left[\int_\sigma g_{m,n}^2 d\sigma\right]^{\frac12},\qquad \left[\int_\sigma h_{m,n}^2 d\sigma\right]^{\frac12}$$

rispettivamente. Calcoliamo la prima di queste quantità. Anzitutto si ha, per $m>0$

$$\int_\sigma g_{m,n}^2 d\sigma=\int_0^R \varrho^{2m+1}H_{m,n}^2(\varrho)d\varrho\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2 m\theta d\theta=\pi\int_0^R\varrho^{2m+1}H_{m,n}^2(\varrho)d\varrho=$$
$$=\pi R^{2m+2}\int_0^1 t^{2m+1}\lambda_n^2(t)dt.$$

Ora, con i simboli del n.° 4, e tenendo conto delle condizioni (12) di ortogonalità, si ha:

$$\int_0^1 t^{2m+1}\lambda_n^2(t)dt=\int_0^1 t^{2m+1}\lambda_n(t)\sum_0^n b_r t^r\cdot dt=\sum_0^n b_r\int_0^1 t^{2m+r+1}\lambda_n(t)dt=b_n\int_0^1 t^{2m+n+1}\lambda_n(t)dt$$
$$=b_n\sum_0^n b_r\int_0^1 t^{2m+n+r+1}dt=b_n\sum_0^n\frac{b_r}{2m+n+r+2}.$$

Il valore del sommatorio si ottiene dalla (13), per $z=n$, ed è

$$\frac{F(n)}{\prod_0^n{}_r(2m+n+r+2)}=C\frac{n!}{\prod_0^n{}_r(2m+n+r+2)}$$

---

[10] C. JACOBI: *Zur hypergeometrischen Reihe.* (Crelle's Journal, LVI); cfr. anche HEINE, l. c., p. 91.

dove il valore di C si ricava da $b_0=1$, cioè

$$(-1)^n C \frac{\prod\limits_0^n (2m+r+2)}{n!}=1;$$

il valore di b_n è pure noto. Si ottiene così, con facile calcolo:

$$\int\limits_0^1 t^{2m+1}\lambda_n^2(t)\,dt=\frac{1}{(2m+n+2)\binom{2m+n+1}{n}^2}.$$

Possiamo ora scrivere le espressione delle $g_{m,n}$ normalizzate, e, in modo analogo, quelle delle $h_{m,n}$; ed anche riunirle nell'unica

$$\bar{g}_{m,n}+i\bar{h}_{m,n}=\sqrt{\frac{2m+n+2}{\pi}}\binom{2m+n+1}{n}\frac{z^m}{R^{m+1}}F\left(-n,\ 2m+n+2,\ 2m+2,\ \frac{|z|}{R}\right).$$

Per $m=0$, la costante π va sostituita con l'altra 2π, come subito si vede, e si ha cioè:

$$\bar{g}_{0,n}=\sqrt{\frac{n+2}{2\pi}}\frac{n+1}{R}F\left(-n,\ n+2,\ 2,\ \frac{\varrho}{R}\right);$$

le $\bar{h}_{0,n}$ non hanno luogo di esser considerate perchè le $h_{0,n}$ sono identicamente nulle.

6. - Designeremo con (A') il precedente sistema ortogonale normale di funzioni antiarmoniche; accanto ad esso può considerarsi l'altro (A), formato di funzioni armoniche, a cui si giunge normando le φ_m, ψ_m. Si ottiene per esso:

$$\bar{\varphi}_0(\varrho,\theta)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{R},\qquad \bar{\varphi}_m(\varrho,\theta)=\sqrt{\frac{2(m+1)}{\pi}}\frac{\varrho^m}{R^{m+1}}\cos m\theta, \qquad (m>0)$$

$$\bar{\psi}_m(\varrho,\theta)=\sqrt{\frac{2(m+1)}{\pi}}\ \mathrm{sen}\ m\theta$$

o in forma complessa

$$\bar{\varphi}_m+i\bar{\psi}_m=\sqrt{\frac{2(m+1)}{\pi}}\frac{z^m}{R^{m+1}}.$$

I sistemi (A), (A') sono evidentemente incompleti, poichè tra loro ortogonali; invece:

f) I sistemi (A), (A') costituiscono nel loro complesso un sistema ortogonale normale completo.

Basterà occuparsi della completezza. Ora una funzione sommabile in σ, ortogonale ad (A'), è, per *e*), equivalente a una funzione armonica; se questa è ortogonale ad (A), in virtù di *a*), essa è identicamente nulla.

g) Ogni funzione antiarmonica in σ è rappresentabile in media (*di grado* 2, *e quindi anche di grado* 1) *mediante una serie procedente per le funzioni di* (A').

In altre parole, (A') costituisce in $(\mathfrak{L})$ come in $(\mathfrak{L}_2)$ una *base* per la varietà lineare delle funzioni antiarmoniche in σ. Per dimostrarlo, basta costruire per la funzione data, che essendo sommabile e limitata è a quadrato sommabile, lo sviluppo di HILBERT-FOURIER relativo al sistema completo (A), (A'), convergente in media verso la funzione stessa.

In esso mancheranno evidentemente i termini armonici, onde la tesi.

7. - Il teorema *e*) e le conseguenze che sin qui ne sono state tratte possono ricevere una larga estensione. Se infatti nel citato teorema si suppone la $f(\varrho, \theta)$ ortogonale, non a tutte le $u_{m,n}$, $v_{m,n}$, ma solo a una classe parziale di esse, ottenuta dando ancora ad m i successivi valori 0, 1, 2,.... ma ad n una successione n_1, n_2,.... di valori crescenti, la dimostrazione data può rimanere valida; basta per questo che i valori n_i siano tali che una funzione di ϱ sommabile in $0 \vdash\!\dashv R$ e ortogonale alle potenze ϱ^{n_i} sia necessariamente nulla quasi dappertutto. Le condizioni perchè ciò avvenga sono state date da MÜNTZ ([11]) per le funzioni continue; l'estensione al nostro caso è assai facile e riduce l'enunciato di MÜNTZ all'unica condizione che $\sum 1/n_i$ sia divergente. Si hanno dunque infiniti enunciati analoghi ad *e*), ciascuno dei quali dà luogo alla formazione di un sistema ortogonale normale di funzioni antiarmoniche, atto a dare con (A) un sistema completo.

Qui vogliamo accennare soltanto al caso molto semplice in cui ad n si diano solo i valori pari, il quale presenta un certo interesse perchè le relative funzioni $u_{m,2n}$, $v_{m,2n}$ e le corrispondenti funzioni ortogonali risultano polinomi nelle coordinate cartesiane x, y. Le dimostrazioni e i risultati sono del resto molto simili a quelli dei n.$^{\text{i}}$ 5 e 6, onde riteniamo sufficiente dare nella forma più semplice le espressioni delle funzioni $\bar{g}'_{m,n}$, $\bar{h}'_{m,n}$ cui si giunge in questo caso:

$$\bar{g}'_{m,n} + i\bar{h}'_{m,n} = \sqrt{\frac{m+2n+1}{\pi}} \binom{m+n}{m} \frac{z^m}{R^{m+1}} F\left(-n,\ m+n+1,\ m+1,\ \frac{|z|^2}{R^2}\right) \text{ per } m > 0;$$

$$\bar{g}'_{0,n} = \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}} \frac{1}{R} F\left(-n,\ n+1,\ 1,\ \frac{|z|^2}{R^2}\right).$$

8. - Come si è avvertito nell'introduzione, la teoria delle funzioni antiarmoniche si svolge in modo assai più semplice ed esauriente nello spazio $\mathfrak{L}_2$ delle funzioni a quadrato sommabile in σ; nel qual caso potranno definirsi come funzioni antiarmoniche le funzioni di $\mathfrak{L}_2$ (quindi anche non limitate) ortogonali a tutte le funzioni armoniche della stessa classe. Indichiamo brevemente le linee di questa trattazione.

Sia $f(\varrho, \theta)$ una funzione di $\mathfrak{L}_2$, armonica in σ; riferendoci al sistema ortogo-

---

([11]) CH. H. MÜNTZ: *Über den Approssimationssatz von Weierstrass.* (Math. Abhand. H. A. Schwarz gewidmet, Berlin, 1914, pp. 303-312).

nale φ_m, ψ_m, si potrà costruire per essa lo sviluppo di HILBERT-FOURIER, il quale convergerà in media verso una funzione $\bar{f}(\varrho, \theta)$ di $\mathfrak{L}_2$. In tale sviluppo:

$$\bar{f}(\varrho, \theta) \sim \frac{1}{2} A_0 + \sum_1^\infty A_m \varphi_m + \sum_1^\infty B_m \psi_m$$

i coefficienti A_m, B_m saranno dati dalle (4), e quindi esso, salvo una lecita associazione di termini, viene a coincidere con lo sviluppo ordinario (1) della f. Questo, in ogni parte chiusa di σ, converge uniformemente, e quindi anche in media, verso la f; ed anche, evidentemente, in media verso la $\bar{f}$; segue $\bar{f}=f$ quasi ovunque in ogni parte chiusa di σ, ed anche in tutto σ, poichè σ può spezzare in una infinità numerabile di insiemi chiusi. Vediamo così che nel caso attuale *lo sviluppo ordinario della funzione armonica converge in media in σ verso la funzione stessa*; teorema che corrisponde al teorema *b*), ma che è di esso assai più semplice e completo.

Lo stesso risultato potrebbe ricavarsi dal noto teorema ([12]) secondo cui una successione di funzioni armoniche convergente in media in un campo converge uniformemente in ogni parte chiusa e tutta interna al campo verso una funzione armonica.

La dimostrazione della *c*) risulta ora immediata, giacchè se $g(\varrho, \theta)$, funzione di $\mathfrak{L}_2$, è ortogonale alle φ_m, ψ_m, moltiplicando lo sviluppo della f per g e integrando termine a termine, come ora è lecito, si ottiene senz'altro un risultato nullo.

Nulla vi è da dire sui teoremi *d*) ed *e*), i quali sussistono, a fortiori, nell'ipotesi di una f di $\mathfrak{L}_2$; la dimostrazione potrebbe però essere in questa ipotesi alquanto semplificata. Lo stesso può dirsi di *f*) e di *g*), il quale ultimo teorema acquista ora una portata maggiore per l'ampliamento dato al concetto di funzione antiarmonica.

Tutti questi risultati possono riassumersi nell'unico enunciato:

a) *Si può costruire un sistema ortogonale* (A) *di funzioni armoniche e uno* (A') *di funzioni antiarmoniche con le proprietà seguenti*:

a) (A) *e* (A') *formano un sistema completo*;

b) *ogni funzione di* $\mathfrak{L}_2$ *ortogonale ad* (A) *è antiarmonica e sviluppabile in serie, convergente in media, procedente per le funzioni di* (A');

c) *ogni funzione di* $\mathfrak{L}_2$ *ortogonale ad* (A') *è armonica (o equivalente a una funzione armonica) ed è sviluppabile in serie, convergente in media (ed anche uniformemente in ogni parte chiusa di* σ*), procedente per le funzioni di* (A).

9. - Se una qualunque funzione $f(\varrho, \theta)$ di $\mathfrak{L}_2$ si sviluppa in serie procedente secondo le funzioni di (A) e (A'), convergente in media verso la stessa $f(\varrho, \theta)$,

---

([12]) Cfr. la mia Memoria citata, nota ([45]).

e si raccolgono i termini dello sviluppo provenienti da (A) e quelli provenienti da (A'), si ottengono due serie, pure convergenti in media, le quali rappresentano una funzione armonica ed una antiarmonica, la cui somma è la f data.

Tale scomposizione non richiede del resto la conoscenza di (A'); se infatti si costruisce la serie relativa al sistema (A), che avrà la forma del secondo membro della (1), con la espressione (4) dei coefficienti, si riconosce in più modi, per esempio con la valutazione dei coefficienti, nel modo già usato nella dimostrazione di e), che essa converge entro σ, e vi rappresenta una funzione armonica $\bar{f}$, a cui possono applicarsi le considerazioni iniziali del n.º 8. La serie converge cioè verso $\bar{f}$ anche in media, e $\bar{f}$ è di $\mathfrak{L}_2$. I coefficienti di HILBERT-FOURIER della $\bar{f}$ coincidendo con quelli di f, si deduce che $f-\bar{f}=w$ è ortogonale alle φ_m e ψ_m, e quindi antiarmonica; e si ottiene così la decomposizione richiesta.

Essa è poi unica, chè l'ipotesi opposta conduce ad una funzione F non nulla, insieme armonica e antiarmonica e quindi all'equazione

$$\int F^2 d\sigma=0$$

che è assurda, poichè F è continua.

La parte armonica $\bar{f}$ della f non è altro che l'*armonica viciniore* (secondo LEVI-CIVITA) ([13]) della f, cioè la funzione armonica che meno ne differisce in media. Ed infatti, se $\bar{f}+\lambda$ è un'altra funzione armonica (quindi λ armonica e non identicamente nulla), si ha $f-(\bar{f}+\lambda)=w-\lambda$ e

$$\int_\sigma (w-\lambda)^2 d\sigma-\int_\sigma w^2 d\sigma=\int_\sigma \lambda^2 d\sigma-2\int_\sigma w\lambda d\sigma=\int_\sigma \lambda^2 d\sigma>0$$

perchè w, antiarmonica, è ortogonale a λ.

In modo analogo si vede che la w è la funzione antiarmonica che meno differisce in media dalla f, e che quindi può dirsi l'*antiarmonica viciniore* della f. Concludendo:

β) Ogni funzione di $\mathfrak{L}_2$ si può decomporre, e in un modo solo, in una parte armonica e in una antiarmonica; esse sono rispettivamente l'armonica e l'antiarmonica viciniore della f in σ.

([13]) T. LEVI-CIVITA: *Armonica viciniore di una funzione assegnata.* (Rend. Acc. Lincei (5ª), XXIX, 1° sem. 1920, pp. 197-206). Cfr. anche, per il caso di un campo qualunque, il n.º 47 della mia Memoria citata.