ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ADOLFO DEL CHIARO

Sul procedimento di arrotondamento di Schwarz

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 2 (1933), p. 211-226

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_2_211_0>

SUL PROCEDIMENTO DI ARROTONDAMENTO DI SCHWARZ (*)

di ADOLFO DEL CHIARO (Pisa).

Introduzione.

Data una superficie S chiusa e costruita, mediante il procedimento di SCHWARZ, la superficie S' di rotazione attorno ad un asse parallelo all' asse delle z e racchiudente lo stesso volume di S, è stato dimostrato che S' ha un' area più piccola (od al più uguale) di quella di S. Se $z=f(x, y)$ è l' equazione di una superficie aperta S, soddisfacente ad opportune condizioni, e se al contorno del campo D di variabilità di (x, y), la $f(x, y)$ è costante, l' integrale doppio

$$\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy,$$

esprimente l' area di S, ha un valore maggiore (od uguale) di quello relativo alla corrispondente superficie arrotondata S'.

Similmente, se $z=f(x, y)$ è ancora l' equazione di una superficie aperta S soddisfacente ad opportune condizioni, e se al contorno del campo D di variabilità di (x, y), la $f(x, y)$ è costante, considerato l' integrale di DIRICHLET

$$\iint\limits_D \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\} dxdy$$

e lo stesso integrale relativo alla corrispondente superficie arrotondata, abbiamo di nuovo che il primo è maggiore od uguale al secondo.

Inoltre, se non è $f(x, y)\equiv 0$, l' uguaglianza si ha, nei due casi, solo quando S' può ottenersi da S per semplice traslazione.

I casi ora detti furono considerati, sotto particolari ipotesi, da SCHWARZ (1), KRAHN (2) e FABER (3), e nella loro forma più generale, dal TONELLI. Questo Autore studiò il primo nella Memoria: *Sulla proprietà di minimo della*

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) H. A. SCHWARZ: *Beweis des Satzes die Kugel kleinen Oberfläche besitzt, als jeder andere Körper gleichen Volumens* [Gesammelte Abhandlungen (Berlin, Springer, 1890), Bd. II, pp. 327-340].

(2) E. KRAHN: *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises* (Math. Ann., Bd. 94, 1925, p. 98).

(3) G. FABER: *Beweis, dass unter aller homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die Kreisförmige den tiefsten Grundton gibt* (Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, 1923, p. 169).

sfera [4] ed il secondo nell'altra: *Sur un problème de Lord Rayleigh* [5]; in queste memorie i procedimenti seguiti sono diversi.

Ci proponiamo ora di ricercare un tipo generale di funzioni $\psi\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$, dipendenti soltanto da $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, per le quali valga la stessa proprietà sopra indicata e cioè per le quali l'integrale doppio

$$\iint\limits_{D} \psi\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy$$

sia maggiore od uguale dello stesso integrale relativo alla corrispondente superficie arrotondata.

Per questa proprietà, in alcuni importanti problemi di minimo, la ricerca del minimo per l'integrale doppio dato si riduce alla ricerca del minimo per un integrale semplice.

Di questo si è valso appunto il TONELLI nel suo lavoro: *Sur un problème de Lord Rayleigh,* il cui enunciato è il seguente:

Fra tutti i domini piani D, aventi la stessa area, e fra tutte le funzioni $f(x, y)$, date ciascuna su uno dei domini D, soddisfacenti a certe condizioni di continuità e di derivabilità, uguali a zero sulla frontiera del dominio D di definizione, e tali che l'integrale

$$\iint\limits_{D} f^2(x, y)dxdy$$

abbia un valore dato, sempre lo stesso, cercare il dominio D_0 e la funzione $f_0(x, y)$, definita su D_0, in guisa da rendere minimo l'integrale

$$\iint\limits_{D} \left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right\} dxdy.$$

Estendendo opportunamente il metodo usato dal TONELLI nel secondo dei lavori ricordati, siamo pervenuti al teorema generale seguente:

Sia $\psi(z)$ una funzione di z soddisfacente alle seguenti condizioni:

1°) *la $\psi(z)$ è, per $z \geqslant 0$, non negativa;*

2°) *è continua e non decrescente insieme con la sua derivata prima.*

Sia poi $f(x, y)$ una funzione continua nel dominio chiuso $\overline{D}$, corrispondente al dominio aperto e limitato D [6], *assolutamente continua in D, tale che sia*

$$f(x, y) \geqslant 0 \quad \textit{in } D,$$
$$f(x, y) = 0 \quad \textit{sulla frontiera di } D,$$

---

[4] L. TONELLI: *Sulla proprietà di minimo della sfera* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XXXIX, 1915).

[5] L. TONELLI: *Sur un problème de Lord Rayleigh* (Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. XXXVII, 1930, pp. 253-280).

[6] Il dominio chiuso $\overline{D}$ corrispondente al dominio aperto e limitato D, è costituito da tutti i punti di D e della sua frontiera.

e tale inoltre che risulti finito l'integrale

$$I_D[f] \equiv \iint_D \psi(\sqrt{p^2+q^2})\,dxdy,$$

con

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Allora è

(I) $$I_C[\varphi] \equiv \iint_C \psi(\sqrt{\bar{p}^2+\bar{q}^2})\,dxdy \leq I_D[f],$$

essendo $\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ *la funzione corrispondente per arrotondamento alla* $f(x,y)$, C *il cerchio su cui viene definita la* φ *e*

$$\bar{p}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \bar{q}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Nel caso in cui la ψ *sia sempre crescente, ed escluso che sia sempre, in* D, $f(x,y)\equiv 0$, *l'uguaglianza nella* (I) *ha luogo solamente quando il dominio* D *e la superficie* $z=f(x,y)$ *possono ottenersi per semplice traslazione del dominio* C *e della superficie* $z=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

La dimostrazione del teorema enunciato verrà data dapprima per le superficie S poliedriche; poi, con un passaggio al limite, essa verrà estesa alle superficie generali. In questo passaggio al limite, occorre sfruttare la semicontinuità inferiore dell'integrale considerato, per stabilire la quale, ci serviremo dei risultati ottenuti dal TONELLI nel suo lavoro: *Sur la semi-continuité des intégrales doubles du Calcul des Variations* (7).

§ 1. - Procedimento di arrotondamento di Schwarz.

1. - Sia $f(x,y)$ una funzione continua nel dominio chiuso $\overline{D}$, corrispondente al dominio aperto D, e supponiamo che si abbia

$$f(x,y)\geq 0 \quad \text{in } D,$$
$$f(x,y)=0 \quad \text{sulla frontiera di } D.$$

Chiamato M il massimo di $f(x,y)$ in $\overline{D}$, consideriamo, per ogni z' tale che

$$0\leq z'\leq M,$$

l'insieme $E_{z'}$ dei punti di $\overline{D}$ ove si ha

$$f(x,y)\geq z'$$

e costruiamo, sul piano $z=z'$, il cerchio avente il centro sull'asse z e l'area uguale alla misura $m(E_{z'})$ dell'insieme $E_{z'}$. L'insieme di tutti questi cerchi viene così

(7) L. TONELLI: *Sur la semi-continuité des intégrales doubles du Calcul des Variations* (Acta Math., T. 53, 1929, pp. 325-346).

a formare un solido di rivoluzione di asse z. Ora $m(E_{z'})$ è funzione di z' sempre decrescente in $(0, M)$ e la superficie del solido di rotazione ora formato è data dal cerchio C' situato nel piano (x, y), avente il centro nell'origine delle coordinate ed area uguale a $m(E_0)=m(\overline{D})$, e da una superficie di rotazione $z=\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

Inoltre, indicato con R' il raggio del cerchio C', $\varphi(\varrho)$ è una funzione continua di ϱ definita sull'intervallo $(0, R')$ e sempre non crescente. Si ha poi

$$\varphi(0)=M, \qquad \varphi(R')=0.$$

La funzione $\varphi(\varrho)$ sarà chiamata la funzione corrispondente per arrotondamento a $f(x, y)$.

Se $f(x, y)$ è una funzione assolutamente continua [8] in D, detto C il cerchio del piano (x, y) avente per centro l'origine delle coordinate ed area uguale a $m(D)$ ed R il suo raggio, si dimostra allora che la funzione $\varphi(\varrho)$ è assolutamente continua nell'intervallo $(0, R)$ [9] e la funzione $\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ è assolutamente continua in C [10].

Abbiamo poi, quasi-dappertutto in C [11],

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho}\right)^2. \tag{1}$$

§ 2. - Alcuni lemmi.

2. - Prima di passare alla dimostrazione del teorema generale, già enunciato nell'introduzione, stabiliamo alcuni lemmi.

LEMMA I. - *Sia $\psi(z)$ una funzione definita per ogni $z\geqslant 0$, continua, derivabile e tale che la sua derivata sia funzione non decrescente di z. Presi quattro numeri positivi qualunque b, c, d, e, si ha*

$$c\psi(b)+e\psi(d)-(c+e)\psi\left(\frac{cb+ed}{c+e}\right)\geqslant 0. \tag{2}$$

La (2) è, infatti, la proprietà caratteristica delle funzioni concave verso l'alto

3. - LEMMA II. - *Sia $\psi(z)$ una funzione definita per ogni $z\geqslant 0$, continua, derivabile e tale che la sua derivata sia funzione non decrescente di z. Se a, x_1, x_2,...., x_n, y_1, y_2,...., y_n sono dei numeri positivi qualunque, si ha*

$$x_1y_1\psi\left(\frac{a}{x_1}\right)+....+x_ny_n\psi\left(\frac{a}{x_n}\right)\geqslant(x_1y_1+....+x_ny_n)\psi\left\{\frac{a(y_1+....+y_n)}{x_1y_1+....+x_ny_n}\right\}. \tag{3}$$

---

[8] Per la definizione di funzioni di due variabili assolutamente continue, cfr. L. TONELLI, loc. cit. [5], p. 255.

[9] Loc. cit. [5], p. 257.

[10] Loc. cit. [5], p. 258.

[11] Loc. cit. [5], p. 259.

Per $n=2$, si ha

$$x_1y_1\psi\left(\frac{a}{x_1}\right)+x_2y_2\psi\left(\frac{a}{x_2}\right)\geqq(x_1y_1+x_2y_2)\psi\left\{\frac{a(y_1+y_2)}{x_1y_1+x_2y_2}\right\}$$

e questa disuguaglianza discende subito dalla (2), quando in essa si ponga

$$b=\frac{a}{x_1},\qquad c=x_1y_1,\qquad d=\frac{a}{x_2},\qquad e=x_2y_2.$$

Ammesso allora che la (3) sia verificata per n, si dimostra che vale per $n+1$. Infatti

$$x_1y_1\psi\left(\frac{a}{x_1}\right)+\dots+x_{n+1}y_{n+1}\psi\left(\frac{a}{x_{n+1}}\right)\geqq(x_1y_1+\dots+x_ny_n)\psi\left\{\frac{a(y_1+\dots+y_n)}{x_1y_1+\dots+x_ny_n}\right\}+$$

$$+x_{n+1}y_{n+1}\psi\left(\frac{a}{x_{n+1}}\right)=\frac{x_1y_1+\dots+x_ny_n}{y_1+\dots+y_n}(y_1+\dots+y_n)\psi\left\{\frac{a}{\dfrac{x_1y_1+\dots+x_ny_n}{y_1+\dots+y_n}}\right\}+$$

$$+x_{n+1}y_{n+1}\psi\left(\frac{a}{x_{n+1}}\right)\geqq(x_1y_1+\dots+x_{n+1}y_{n+1})\psi\left\{\frac{a(y_1+\dots+y_{n+1})}{x_1y_1+\dots+x_{n+1}y_{n+1}}\right\}.$$

La (3) è quindi completamente dimostrata.

4. - LEMMA III. - *Sia $\psi(z)$ una funzione definita per $z\geqq0$, non negativa e, insieme con la sua derivata prima, continua e non decrescente. Sia poi $f(x,y)$ una funzione assolutamente continua nel dominio aperto e limitato D, continua in tutto il dominio chiuso $\overline{D}$ corrispondente e costante sulla frontiera di D; e tale, inoltre, che esista finito l'integrale*

$$I_D[f]\equiv\iint_D\psi(\sqrt{p^2+q^2})dxdy$$

con $p=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Allora è possibile determinare una successione di funzioni $F_1(x,y)$, $F_2(x,y),\dots,$ $F_n(x,y),\dots,$ continue, insieme con le loro derivate parziali del primo ordine, in tutto un dominio aperto e limitato D' contenente nel suo interno $\overline{D}$, e tali da soddisfare in tutto $\overline{D}$, alla disuguaglianza

$$|f(x,y)-F_n(x,y)|<\frac{1}{n},$$

ed anche all'altra

$$|I_D[f]-I_D[F_n]|<\frac{1}{n}.$$

La dimostrazione di questo lemma trovasi in una Memoria del Dott. S. CINQUINI, dal titolo: *Sull'approssimazione delle funzioni di due variabili* ([12]).

§ 3. - Un teorema generale.

5. - Si abbia una funzione $f(x,y)$ assolutamente continua nel dominio aperto limitato D, continua nel corrispondente dominio chiuso $\overline{D}$ e siano per essa soddi-

([12]) Annali di Matematica, Serie IV, Tomo XI, 1933, pp. 295-323; si veda il n.º 9 a pag. 319.

sfatte le condizioni poste al n.° 1; sia poi $\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ la funzione corrispondente per arrotondamento a $f(x, y)$. Chiamato ancora C il cerchio del piano (x, y) avente per centro l'origine delle coordinate ed area uguale alla misura $m(D)$ di D, e posto, al solito,

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad q=\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \bar{p}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \bar{q}=\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

dimostriamo il teorema enunciato nell'introduzione.

Come abbiamo già avvertito nell'introduzione medesima, supporremo, dapprima, che la superficie $z=f(x, y)$ sia poliedrica; indi passeremo al caso generale.

Nell'ipotesi ora detta, poichè $f(x, y)$ è una funzione determinata, le facce della nostra superficie poliedrica non saranno mai perpendicolari al piano (x, y).

Detto M il massimo valore di $f(x, y)$ in $\overline{D}$ e chiamata $Q(z)$ la misura dell'insieme E_z dei punti di $\overline{D}$ ove si ha $f(x, y) \geqq z$, consideriamo un intervallo (z', z'') interno all'intervallo $(0, M)$ e tale che fra e su i piani $z=z'$, $z=z''$ non vi siano vertici della superficie poliedrica. Nell'intervallo (z', z'') la funzione $Q(z)$ è di secondo grado e sempre decrescente e la sua derivata $Q'(z)$ è di primo grado e sempre minore di zero:

$$Q'(z)<0.$$

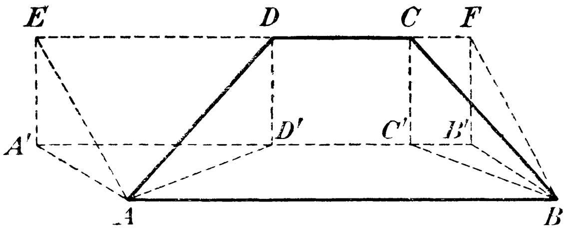

Fig. 1.

Dividiamo ora l'intervallo (z', z'') in n parti uguali per mezzo dei punti $z'=z_0<z_1<z_2< \dots <z_n=z''$ e consideriamo una faccia della superficie poliedrica che sia incontrata dai piani $z=z_r$, $z=z_{r+1}$ con $0 \leqq r<n$. Siano AB e DC le intersezioni di essa coi piani detti ed ω l'area della proiezione $ABC'D'$ di $ABCD$ sul piano $z=z_r$.

Sia inoltre $z=ax+by+c$ l'equazione del piano a cui appartiene la faccia considerata. Si ha allora

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=a^2+b^2.$$

Ma indicando con α l'angolo $\left(\text{positivo e minore di } \frac{\pi}{2}\right)$ che il piano indicato forma col piano (x, y), abbiamo

$$\cos^2 \alpha=\frac{1}{a^2+b^2+1},$$

e quindi

$$\operatorname{tg}^2 \alpha=\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}=\frac{1}{\cos^2 \alpha}-1=a^2+b^2.$$

Inoltre, dal triangolo $AA'E$ (v. fig. 1) si ha

$$\operatorname{tg} \alpha=\frac{A'E}{AA'}=\frac{z_{r+1}-z_r}{AA'};$$

dunque

$$\sqrt{a^2+b^2}=\frac{z_{r+1}-z_r}{AA'}$$

e

$$\psi(\sqrt{a^2+b^2})\omega = \psi\left(\frac{z_{r+1}-z_r}{AA'}\right)\frac{AA'(AB+D'C')}{2}.$$

Ne segue

$$\sum \psi(\sqrt{a^2+b^2})\omega = \sum \psi\left(\frac{z_{r+1}-z_r}{AA'}\right)\frac{AA'(AB+D'C')}{2}, \tag{4}$$

dove il segno $\sum$ è esteso a tutte le facce della superficie poliedrica incontrata dai piani $z=z_r$, $z=z_{r+1}$.

Essendo $\psi'(z)$ una funzione di z non decrescente, per ipotesi, possiamo ora applicare alla (4) la (3) ed abbiamo

$$\sum \psi(\sqrt{a^2+b^2})\omega \geqq \psi\left(\frac{(z_{r+1}-z_r)\sum(AB+D'C')}{2\sum \frac{AA'(AB+D'C')}{2}}\right)\sum\frac{AA'(AB+D'C')}{2},$$

cioè, osservando che

$$\sum \frac{AA'(AB+D'C')}{2} = \sum \omega$$

e chiamando $l(\bar{z})$ la lunghezza dell'intersezione della nostra superficie poliedrica col piano $z=\bar{z}$ $(z'\leqq \bar{z}\leqq z'')$,

$$\sum \psi(\sqrt{a^2+b^2})\omega \geqq \psi\left(\frac{(z_{r+1}-z_r)[l(z_r)+l(z_{r+1})]}{2\sum\omega}\right)\sum\omega.$$

Di qui, poichè è

$$\sum \omega = Q(z_r)-Q(z_{r+1}),$$

otteniamo

$$\sum \psi(\sqrt{a^2+b^2})\omega \geqq \psi\left(\frac{(z_{r+1}-z_r)[l(z_r)+l(z_{r+1})]}{2[Q(z_r)-Q(z_{r+1})]}\right)[Q(z_r)-Q(z_{r+1})],$$

od anche, intendendo che sia, per $z<0$, $\psi(z)=\psi(-z)$,

$$\sum \psi(\sqrt{a^2+b^2})\omega \geqq \psi\left(\frac{l(z_r)+l(z_{r+1})}{2} : \frac{Q(z_{r+1})-Q(z_r)}{z_{r+1}-z_r}\right)[Q(z_r)-Q(z_{r+1})],$$

ovvero,

$$\sum \psi(\sqrt{a^2+b^2})\omega \geqq -(z_{r+1}-z_r)\psi\left(\frac{l(z_r)+l(z_{r+1})}{2} : \frac{Q(z_{r+1})-Q(z_r)}{z_{r+1}-z_r}\right)\frac{Q(z_{r+1})-Q(z_r)}{z_{r+1}-z_r}.$$

Si ha perciò

$$\sum_{r=0}^{n-1}\left\{\sum \psi(\sqrt{a^2+b^2})\omega\right\} \geqq -\sum_{r=0}^{n-1}(z_{r+1}-z_r)\psi\left(\frac{l(z_r)+l(z_{r+1})}{2} : \frac{Q(z_{r+1})-Q(z_r)}{z_{r+1}-z_r}\right)\frac{Q(z_{r+1})-Q(z_r)}{z_{r+1}-z_r},$$

da cui, detto D' il dominio aperto che si ottiene proiettando sul piano (x, y) la parte di superficie poliedrica compresa fra i piani $z=z'$, $z=z''$,

$$\iint_{D'} \psi(\sqrt{p^2+q^2})\,dxdy \geqq -\sum_{r=0}^{n-1}(z_{r+1}-z_r)\psi\left(\frac{l(z_r)+l(z_{r+1})}{2} : \frac{Q(z_{r+1})-Q(z_r)}{z_{r+1}-z_r}\right)\frac{Q(z_{r+1})-Q(z_r)}{z_{r+1}-z_r}.$$

Passando al limite per $n\to\infty$, abbiamo, infine,

$$\iint_{D'} \psi(\sqrt{p^2+q^2})\,dxdy \geqq -\int_{z'}^{z''} \psi\left(\frac{l(z)}{Q'(z)}\right)Q'(z)\,dz.$$

Aumentiamo ora progressivamente la distanza fra i piani $z=z'$, $z=z''$ fino a farli passare per i vertici più prossimi della superficie poliedrica. Dette $\bar{z}'$, $\bar{z}''$ le distanze di questi vertici dal piano (x, y), e D_1' il dominio aperto proiezione sul piano (x, y) della parte di superficie poliedrica compresa fra i piani $z=\bar{z}'$, $z=\bar{z}''$, abbiamo

$$\iint\limits_{D_1'} \psi(\sqrt{p^2+q^2})dxdy \geqslant -\int_{\bar{z}'}^{\bar{z}''} \psi\left(\frac{l(z)}{Q'(z)}\right) Q'(z)dz.$$

E finalmente, sommando un numero finito di queste disuguaglianze, avremo

$$I_D[f] \geqslant -\int_0^M \psi\left(\frac{l(z)}{Q'(z)}\right) Q'(z)dz. \tag{5}$$

Ora, per la disuguaglianza $l^2(z) > 4\pi Q(z)$, poichè la ψ è, per ipotesi, non decrescente, per $z>0$, si ha

$$-\int_0^M \psi\left(\frac{l(z)}{Q'(z)}\right) Q'(z)dz \geqslant -\int_0^M \psi\left(\frac{\sqrt{4\pi Q(z)}}{Q'(z)}\right) Q'(z)dz. \tag{6}$$

Ma posto $Q(z)=\pi\varrho^2$, da cui $z=\varphi(\varrho)$, si ha

$$Q'(z)=2\pi\varrho\frac{d\varrho}{dz}=\frac{2\pi\varrho}{\varphi'(\varrho)},$$

e quindi

$$\frac{\sqrt{4\pi Q(z)}}{Q'(z)}=\frac{\sqrt{4\pi^2\varrho^2}}{2\pi\varrho}\varphi'(\varrho)=\varphi'(\varrho).$$

Sostituendo nella (6) si ottiene

$$-\int_0^M \psi\left(\frac{l(z)}{Q'(z)}\right) Q'(z)dz \geqslant -\int_R^0 \psi(\varphi'(\varrho))\frac{2\pi\varrho}{\varphi'(\varrho)}\varphi'(\varrho)d\varrho=$$

$$=2\pi\int_0^R \psi(\varphi'(\varrho))\varrho d\varrho=\int_0^{2\pi}\int_0^R \psi(\varphi'(\varrho))\varrho d\varrho d\alpha,$$

cioè, per la (1),

$$-\int_0^M \psi\left(\frac{l(z)}{Q'(z)}\right) Q'(z)dz \geqslant I_C[\varphi].$$

Di qui, tenendo presente la (5), segue

$$I_D[f] \geqslant I_C[\varphi].$$

La (I) del teorema enunciato nell'introduzione è quindi dimostrata nel caso in cui $z=f(x, y)$ sia una superficie poliedrica.

6. - Per passare al caso generale, osserviamo anzitutto che, sotto le ipotesi ammesse, l'integrale $I_D[f]$ è quasi-regolare positivo.

Infatti (supponendo dapprima che esista anche la derivata seconda ψ'') abbiamo

$$\psi_p = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\,\psi'$$

$$\psi_{pp} = \frac{p^2}{p^2+q^2}\,\psi'' + \frac{\sqrt{p^2+q^2} - \dfrac{p^2}{\sqrt{p^2+q^2}}}{p^2+q^2}\,\psi' = \frac{p^2}{p^2+q^2}\,\psi'' + \frac{q^2}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,\psi'$$

$$\psi_{qq} = \frac{q^2}{p^2+q^2}\,\psi'' + \frac{p^2}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,\psi'$$

$$\psi_{pq} = \frac{pq}{p^2+q^2}\,\psi'' - \frac{pq}{(p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,\psi'$$

e quindi

$$\psi_{pp}\psi_{qq} - \psi_{pq}^2 = \psi'\psi''\left[\frac{p^4+q^4-2p^2q^2}{(p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}}\right] = \frac{\psi'\psi''(p^2-q^2)^2}{(p^2+q^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Essendo, per le ipotesi fatte,

$$\psi' \geqslant 0, \qquad \psi'' \geqslant 0,$$

segue

$$\psi_{pp} \geqslant 0, \qquad \psi_{qq} \geqslant 0, \qquad \psi_{pp}\psi_{qq} - \psi_{pq}^2 \geqslant 0,$$

e l'integrale $I_D[f]$ è quasi-regolare positivo.

Se poi la ψ'' non esiste, per dimostrare che $I_D[f]$ è quasi-regolare positivo basterà verificare la disuguaglianza ([13])

$$(7) \qquad \psi(\sqrt{p^2+q^2}) - \psi(\sqrt{p_0^2+q_0^2}) - (p-p_0)\frac{p_0}{\sqrt{p_0^2+q_0^2}}\,\psi'(\sqrt{p_0^2+q_0^2}) - \\ -(q-q_0)\frac{q_0}{\sqrt{p_0^2+q_0^2}}\,\psi'(\sqrt{p_0^2+q_0^2}) \geqslant 0.$$

Il primo membro di questa disuguaglianza può scriversi nella forma

$$\psi(\sqrt{p^2+q^2}) - \psi(\sqrt{p_0^2+q_0^2}) - \left\{\frac{pp_0+qq_0}{\sqrt{p_0^2+q_0^2}} - \sqrt{p_0^2+q_0^2}\right\}\psi'(\sqrt{p_0^2+q_0^2}) =$$

$$= \psi(\sqrt{p^2+q^2}) - \psi(\sqrt{p_0^2+q_0^2}) - \left\{\sqrt{p^2+q^2}\,\frac{pp_0+qq_0}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{p_0^2+q_0^2}} - \sqrt{p_0^2+q_0^2}\right\}\psi'(\sqrt{p_0^2+q_0^2}),$$

ed essendo sempre

$$\left|\frac{pp_0+qq_0}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{p_0^2+q_0^2}}\right| \leqslant 1$$

e

$$\psi' \geqslant 0$$

il primo membro della (7) risulta sempre

$$\geqslant \psi(\sqrt{p^2+q^2}) - \psi(\sqrt{p_0^2+q_0^2}) - \{\sqrt{p^2+q^2} - \sqrt{p_0^2+q_0^2}\}\,\psi'(\sqrt{p_0^2+q_0^2}) =$$

$$= \{\sqrt{p^2+q^2} - \sqrt{p_0^2+q_0^2}\}\,\{\psi'(\sqrt{\overline{p}^2+\overline{q}^2}) - \psi'(\sqrt{p_0^2+q_0^2})\},$$

([13]) Loc. cit. ([7]), p. 331.

con $\sqrt{\bar{p}^2+\bar{q}^2}$ compresa fra $\sqrt{p^2+q^2}$ e $\sqrt{p_0^2+q_0^2}$. Per essere ψ' non decrescente, l'espressione ora scritta è sempre $\geqslant 0$ e pertanto la (7) è verificata.

Stabilito così che l'integrale $I_D[f]$ è quasi-regolare positivo, osserviamo che, per il lemma III del n.° 4, possiamo determinare un polinomio P_n tale che sia

$$|f-P_n|<\varepsilon \quad \text{in tutto } \overline{D}$$

e

$$|I_D[f]-I_D[P_n]|<\varepsilon.$$

Consideriamo allora una successione di polinomi

$$P_1(x,y), \quad P_2(x,y),\ldots, \quad P_n(x,y),\ldots$$

in guisa che sia

$$|f(x,y)-P_n(x,y)|<\frac{1}{n} \tag{8}$$

per tutti i punti di $\overline{D}$ ed inoltre

$$|I_D[f]-I_D[P_n]|<\frac{1}{n}. \tag{9}$$

Introduciamo quindi una nuova funzione $\Pi_n(x,y)$ definita in tutto il piano nella maniera seguente:

Sia $\Pi_n(x,y)=0$ in tutti i punti (x,y) non di $\overline{D}$ e nei punti di $\overline{D}$ nei quali si abbia

$$P_n(x,y)-\frac{1}{n}\leqslant 0,$$

e sia $\Pi_n(x,y)=P_n(x,y)-\frac{1}{n}$ nei rimanenti punti. Poichè sulla frontiera di D si ha $f(x,y)=0$, segue, dalla (8), che in tali punti si ha pure $\Pi_n(x,y)=0$; parimenti, per la continuità di $f(x,y)$, si ha $\Pi_n(x,y)=0$ anche nei punti sufficientemente vicini alla frontiera. In tutti i punti di $\overline{D}$ abbiamo inoltre

$$\Pi_n(x,y)\leqslant f(x,y)$$

e

$$\Pi_n(x,y)\geqslant P(x,y)-\frac{1}{n}>f(x,y)-\frac{2}{n},$$

cioè

$$f(x,y)-\frac{2}{n}<\Pi_n(x,y)\leqslant f(x,y). \tag{10}$$

Infine, dalla definizione stessa della funzione Π_n, segue

$$I_D[\Pi_n]\leqslant I_D[P_n]. \tag{11}$$

Ciò posto, costruiamo ancora una superficie poliedrica $z=f_n(x,y)$, in guisa che siano soddisfatte le seguenti condizioni, evidentemente compatibili:

1°) $|\Pi_n(x,y)-f_n(x,y)|<\frac{1}{n}$ in tutto $\overline{D}$;
2°) $f_n(x,y)=0$ sulla frontiera di $\overline{D}$;
3°) $I_D[f_n]<I_D[\Pi_n]+\frac{1}{n}$.

Ora, dalla (10) si ha

$$|f_n(x, y) - \Pi_n(x, y)| < \frac{2}{n}$$

e per 1°)

$$|f(x, y) - f_n(x, y)| < \frac{3}{n}.$$

Per $n \to \infty$ si ha quindi $f_n(x, y) \to f(x, y)$, uniformemente in $\overline{D}$. Così pure, per 3°), dalla (11) segue

$$I_D[f_n] < I_D[P_n] + \frac{1}{n}$$

e per la (9)

$$I_D[f_n] < I_D[f] + \frac{2}{n}. \tag{12}$$

Chiamata ora $\varphi_n(\sqrt{x^2+y^2})$ la funzione corrispondente per arrotondamento a $f_n(x, y)$, per i risultati del n.° 5 abbiamo

$$I_C[\varphi_n] \leq I_D[f_n]. \tag{13}$$

Passando al limite per $n \to \infty$, si ha poi

$$\varphi_n(\sqrt{x^2+y^2}) \to \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$$

uniformemente in C. Ma poichè $\varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ è assolutamente continua e sono verificate tutte le condizioni imposte da un teorema del TONELLI ([14]), si ha la semicontinuità inferiore di $I_C[\varphi]$ e quindi

$$\varliminf I_C[\varphi_n] \geq I_C[\varphi]. \tag{14}$$

Allora, per le disuguaglianze (12) e (13), segue finalmente

$$I_C[\varphi] \leq I_D[f]. \tag{15}$$

La disuguaglianza (I) del teorema enunciato è quindi dimostrata in tutti i casi.

7. - Resta ora da dimostrare che, se la $\varphi(z)$ è funzione crescente, ed escluso che sia sempre, in D, $f(x, y) \equiv 0$, nella (15) il segno di uguaglianza può aversi solo nel caso in cui il dominio D e la superficie $z = f(x, y)$ possono ottenersi per traslazione da C e dalla superficie $z = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$.

Supponiamo, infatti, che D e la superficie $z = f(x, y)$ non possano ottenersi da C e dalla superficie $z = \varphi(\sqrt{x^2+y^2})$ per semplice traslazione. Possiamo allora determinare un intervallo (z_1, z_2) interno a $(0, M)$ ed un $\delta > 0$ tali che per n abbastanza grande e per ogni z di (z_1, z_2) si abbia

$$l_n^2(z) > 4\pi Q_n(z) + \delta,$$

dove $l_n(z)$ e $Q_n(z)$ sono le funzioni $l(z)$ e $Q(z)$ corrispondenti alla super-

([14]) Loc. cit. ([7]), p. 344.

ficie $z = f_n(x, y)$ introdotta nel numero precedente. Supposto, come è lecito, $\delta < 1$ e considerato un altro numero δ' tale che sia

$$0 < \delta' < \frac{\delta}{1 + 2\sqrt{4\pi Q_n(z_1)}},$$

avremo, a più forte ragione, per ogni z di (z_1, z_2),

$$l_n^2(z) > 4\pi Q_n(z) + \delta' + 2\delta' \sqrt{4\pi Q_n(z_1)}$$

ed essendo $0 < \delta' < \delta < 1$,

$$l_n^2(z) > 4\pi Q_n(z) + \delta'^2 + 2\delta' \sqrt{4\pi Q_n(z_1)}.$$

Ma $Q_n(z)$ è funzione di z non crescente, per cui, in tutto (z_1, z_2) è

$$4\pi Q_n(z) \leqslant 4\pi Q_n(z_1);$$

e quindi

$$l_n^2(z) > 4\pi Q_n(z) + \delta'^2 + 2\delta' \sqrt{4\pi Q_n(z)}$$
$$l_n^2(z) > (\sqrt{4\pi Q_n(z)} + \delta')^2,$$

cioè

$$l_n(z) > \sqrt{4\pi Q_n(z)} + \delta'. \tag{16}$$

Detto I l'insieme dei due intervalli (di cui uno può anche essere nullo) che si ottengono da $(0, M)$ togliendovi (z_1, z_2), per la (16) si ha

$$-\int_0^M \psi\left(\frac{l_n(z)}{Q_n'(z)}\right) Q_n'(z)dz > -\int_I \psi\left(\frac{\sqrt{4\pi Q_n(z)}}{Q_n'(z)}\right) Q_n'(z)dz - \int_{z_1}^{z_2} \psi\left(\frac{\sqrt{4\pi Q_n(z)} + \delta'}{Q_n'(z)}\right) Q_n'(z)dz.$$

Ma preso per z un valore qualunque $a \geqslant 0$ e dato ad a un incremento $h > 0$ si ha

$$\psi(a+h) - \psi(a) = \int_a^{a+h} \psi'(z)dz$$

e così pure

$$\psi(h) - \psi(0) = \int_0^h \psi'(z)dz.$$

Essendo inoltre $\psi'(z)$ funzione di z positiva e non decrescente, il valore assunto in un punto qualunque $\bar{z}$ di $(0, h)$ è minore o al più uguale di quello assunto nel punto $\bar{z} + a$ dell'intervallo $(a, a+h)$ e quindi

$$\int_a^{a+h} \psi'(z)dz \geqslant \int_0^h \psi'(z)dz;$$

ossia

$$\psi(a+h) - \psi(a) \geqslant \psi(h) - \psi(0)$$
$$\psi(a+h) \geqslant \psi(a) + \{\psi(h) - \psi(0)\}.$$

Si avrà perciò

$$\psi\left(\frac{\sqrt{4\pi Q_n(z)} + \delta'}{Q_n'(z)}\right) = \psi\left(\frac{\sqrt{4\pi Q_n(z)}}{Q_n'(z)} + \frac{\delta'}{Q_n'(z)}\right) \geqslant \psi\left(\frac{\sqrt{4\pi Q_n(z)}}{Q_n'(z)}\right) + \left\{\psi\left(\frac{\delta'}{Q_n'(z)}\right) - \psi(0)\right\},$$

per cui

$$-\int_{z_1}^{z_2}\psi\left(\frac{\sqrt{4\pi Q_n(z)}+\delta'}{Q_n'(z)}\right)Q_n'(z)dz \geqq -\int_{z_1}^{z_2}\psi\left(\frac{\sqrt{4\pi Q_n(z)}}{Q_n'(z)}\right)Q_n'(z)dz - $$
$$-\int_{z_1}^{z_2}\left\{\psi\left(\frac{\delta'}{Q_n'(z)}\right)-\psi(0)\right\}Q_n'(z)dz,$$

e quindi

$$(17)\qquad -\int_0^M\psi\left(\frac{l_n(z)}{Q_n'(z)}\right)Q_n'(z)dz > -\int_0^M\psi\left(\frac{\sqrt{4\pi Q_n(z)}}{Q_n'(z)}\right)Q_n'(z)dz -$$
$$-\int_{z_1}^{z_2}\psi\left(\frac{\delta'}{Q_n'(z)}\right)Q_n'(z)dz+\psi(0)\int_{z_1}^{z_2}Q_n'(z)dz = -\int_0^M\psi\left(\frac{\sqrt{4\pi Q_n(z)}}{Q_n'(z)}\right)Q_n'(z)dz -$$
$$-\int_{z_1}^{z_2}\psi\left(\frac{\delta'}{Q_n'(z)}\right)Q_n'(z)dz-\psi(0)\{Q_n(z_1)-Q_n(z_2)\}.$$

Essendo $\psi(-z)=\psi(z)$, possiamo poi scrivere

$$-\int_{z_1}^{z_2}\psi\left(\frac{\delta'}{Q_n'(z)}\right)Q_n'(z)dz=\int_{z_1}^{z_2}\psi\left(\frac{\delta'}{-Q_n'(z)}\right)(-Q_n'(z))dz,$$

ed applicando la disuguaglianza di JENSEN [15],

$$\psi\left\{\frac{\int_{z_1}^{z_2}(-Q_n'(z))\dfrac{\delta'}{-Q_n'(z)}dz}{\int_{z_1}^{z_2}(-Q_n'(z))dz}\right\}\leqq\frac{\int_{z_1}^{z_2}(-Q_n'(z))\psi\left(\dfrac{\delta'}{-Q_n'(z)}\right)dz}{\int_{z_1}^{z_2}(-Q_n'(z))dz},$$

da cui

$$\psi\left(\frac{\delta'(z_2-z_1)}{Q_n(z_1)-Q_n(z_2)}\right)\leqq\frac{\int_{z_1}^{z_2}(-Q_n'(z))\psi\left(\dfrac{\delta'}{Q_n'(z)}\right)dz}{Q_n(z_1)-Q_n(z_2)},$$

ossia

$$\int_{z_1}^{z_2}(-Q_n'(z))\psi\left(\frac{\delta'}{Q_n'(z)}\right)dz\geqq\{Q_n(z_1)-Q_n(z_2)\}\,\psi\left(\frac{\delta'(z_2-z_1)}{Q_n(z_1)-Q_n(z_2)}\right).$$

Da quest' ultima disuguaglianza segue che

$$-\int_{z_1}^{z_2}\psi\left(\frac{\delta'}{Q_n'(z)}\right)Q_n'(z)dz-\psi(0)\{Q_n(z_1)-Q_n(z_2)\}\geqq$$
$$\geqq\{Q_n(z_1)-Q_n(z_2)\}\left\{\psi\left(\frac{\delta'(z_2-z_1)}{Q_n(z_1)-Q_n(z_2)}\right)-\psi(0)\right\};$$

---

[15] J. L. W. V. JENSEN: *Sur les fonctions convexes* (Acta Math., T. 30, 1906, pp. 175-193).

e poichè $Q_n(z_1) - Q_n(z_2)$ tende, per $n \to +\infty$, ad una quantità finita maggiore di zero, potremo determinare un numero $\delta'' > 0$, tale che, per ogni n abbastanza grande, si abbia

$$\{Q_n(z_1) - Q_n(z_2)\}\left\{\psi\left(\frac{\delta'(z_2 - z_1)}{Q_n(z_1) - Q_n(z_2)}\right) - \psi(0)\right\} > \delta''.$$

La (17) si scrive perciò

$$-\int_0^M \psi\left(\frac{l_n(z)}{Q_n'(z)}\right) Q_n'(z)dz > -\int_0^M \psi\left(\frac{\sqrt{4\pi Q_n(z)}}{Q_n'(z)}\right) Q_n'(z)dz + \delta''.$$

In luogo della disuguaglianza $I_D[f_n] \geqslant I_D[\varphi_n]$ si ha dunque

$$I_D[f_n] \geqslant I_C[\varphi_n] + \delta''$$

e quindi anche

$$I_D[f] \geqslant I_C[\varphi] + \delta''$$

da cui

$$I_D[f] > I_C[\varphi],$$

come, appunto, avevamo affermato.

Con questo, il teorema enunciato nell'introduzione è completamente dimostrato.

Trattiamo, ora, qualche caso particolare.

§ 4. - Il caso $\psi(z) \equiv z^{2m}$.

8. - Un caso particolare di funzione $\psi(z)$ considerata nel teorema del paragrafo precedente, si ha per

$$\psi(z) \equiv z^{2m}$$

con $m \geqslant \frac{1}{2}$.

Infatti, in questa ipotesi, è

$$\psi'(z) \equiv 2mz^{2m-1},$$

ed essendo $m \geqslant \frac{1}{2}$, $\psi(z)$ e $\psi'(z)$ sono entrambe non decrescenti ed anzi, la prima di esse è funzione di z sempre crescente. Pertanto, supposte verificate le condizioni poste nell'enunciato del teorema dimostrato, relativamente alla $f(x, y)$ e all'esistenza dell'integrale $\iint_D (p^2 + q^2)^m dxdy$, abbiamo

$$\iint_D (p^2 + q^2)^m dxdy \geqslant \iint_C (\bar{p}^2 + \bar{q}^2)^m dxdy. \tag{18}$$

Si noti, infine, che essendo ora $\psi(z)$ funzione crescente di z, l'uguaglianza, nella (18), avrà solo luogo (escluso che sia sempre $f(x, y) \equiv 0$), quando il dominio D e la superficie $z = f(x, y)$ possono ottenersi per semplice traslazione dal dominio C e dalla superficie $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

9. - Parimenti, se la funzione $\psi(z)$ è un polinomio in z^2 a coefficienti positivi, integrando termine a termine ed applicando a ciascun termine il risultato precedente, si ha

$$\iint_D \psi(\sqrt{p^2+q^2})dxdy \geqq \iint_C \psi(\sqrt{\bar{p}^2+\bar{q}^2})dxdy.$$

10. - Più in generale, se è

$$\psi(z) \equiv az^{2m} + bz^{2n} + \ldots. + cz^{2p},$$

con $m, n, \ldots., p$ reali e $\geqq \frac{1}{2}$ ed $a, b, \ldots., c$ positivi, abbiamo ancora, integrando termine a termine,

$$\iint_D \psi(\sqrt{p^2+q^2})dxdy \geqq \iint_C \psi(\sqrt{\bar{p}^2+\bar{q}^2}dxdy.$$

§ 5. - Il caso $\psi(z) \equiv (c^2+z^2)^m$.

11. - Consideriamo adesso un altro caso particolare interessante:

$$\psi(z) \equiv (c^2+z^2)^m,$$

dove c è una costante qualunque ed m è un numero reale qualunque, purchè $\geqq \frac{1}{2}$, e dimostriamo che, se $f(x, y)$ soddisfa a tutte le condizioni imposte dal teorema generale dimostrato, e se l'integrale

$$\iint_D (c^2+p^2+q^2)^m dxdy$$

è finito, si ha

$$\iint_D (c^2+p^2+q^2)^m dxdy \geqq \iint_C (c^2+\bar{p}^2+\bar{q}^2)^m dxdy.$$

Infatti, poichè è

$$\psi(z) \equiv (c^2+z^2)^m,$$

la funzione $\psi(z)$, di z, è sempre crescente. Inoltre, essendo

$$\psi'(z) \equiv 2mz(c^2+z^2)^{m-1}$$

e

$$\begin{aligned}\psi''(z) &\equiv 2m(c^2+z^2)^{m-1} + 4m(m-1)z^2(c^2+z^2)^{m-2} = \\ &= 2m(c^2+z^2)^{m-2}\{c^2+z^2+2z^2(m-1)\} = 2m(c^2+z^2)^{m-2}\{c^2+z^2(2m-1)\},\end{aligned}$$

poichè $m \geqq \frac{1}{2}$, si ha sempre

$$\psi'(z) \geqq 0, \qquad \psi''(z) \geqq 0.$$

Sono perciò verificate tutte le condizioni richieste dal teorema generale, e quindi è

$$\iint_D (c^2+p^2+q^2)^m dxdy \geqq \iint_C (c^2+\bar{p}^2+\bar{q}^2)^m dxdy \tag{19}$$

come avevamo asserito.

Anche in questo caso è da notare che essendo $\psi(z)$ funzione crescente, nella (19) si avrà il segno di uguaglianza solo quando (escluso che sia sempre $f(x, y) \equiv 0$) il dominio D e la superficie $z = f(x, y)$ possono ottenersi per semplice traslazione del cerchio C e della superficie $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

12. - Come al n.° 9, anche ora abbiamo che, se la funzione $\psi(z)$ è un polinomio a coefficienti positivi in z^2, risulta

$$\iint_D \psi(\sqrt{c^2 + p^2 + q^2})dxdy \geqq \iint_C \psi(\sqrt{c^2 + \overline{p}^2 + \overline{q}^2})dxdy.$$

13. - E più in generale, se è

$$\psi(z) \equiv az^{2m} + bz^{2n} + \ldots. + cz^{2p},$$

con $m, n, \ldots., p$ reali e $\geqq \frac{1}{2}$ ed $a, b, \ldots., c$ positivi qualunque, abbiamo ancora

$$\iint_D \psi(\sqrt{c^2 + p^2 + q^2})dxdy \geqq \iint_C \psi(\sqrt{c^2 + \overline{p}^2 + \overline{q}^2})dxdy.$$

Giungiamo poi agli stessi risultati, facendo delle combinazioni lineari a coefficienti positivi di termini di uno dei tipi visti in questo paragrafo, con termini di uno dei tipi visti nel paragrafo precedente.