LEOPOLD FEJÉR

Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein Möglichst kleines Maximum Besitzt

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e^ série, tome 1, n° 3 (1932), p. 263-276

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_3_263_0>

BESTIMMUNG DERJENIGEN ABSZISSEN EINES INTERVALLES, FÜR WELCHE DIE QUADRATSUMME DER GRUNDFUNKTIONEN DER LAGRANGESCHEN INTERPOLATION IM INTERVALLE EIN MÖGLICHST KLEINES MAXIMUM BESITZT

Von LEOPOLD FEJÉR (Budapest).

§ 1.

1. - Sind $x_1 > x_2 > .... > x_n$ reelle Abszissenwerte, die dem Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ angehören, so lautet die zu dieser Abszissengruppe gehörige LAGRANGEsche Interpolationsformel

$$y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + ... + y_n l_n(x). \tag{1}$$

Sie stellt diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(n-1)^{\text{tem}}$ Grade in x dar, die an den Stellen $x_1, x_2, ..., x_n$, der Reihe nach, die Werte $y_1, y_2, ..., y_n$ annimt. Hier bezeichnet $l_k(x)$ die zur Interpolationsstelle x_k gehörige « *Grundfunktion* » der LAGRANGEschen Interpolation; diese hängt nur von den Interpolationsabszissen $x_1, x_2, ..., x_n$ ab, und ist diejenige ganze rationale Funktion von genau $(n-1)^{\text{tem}}$ Grade, die an der Stelle $x = x_k$ den Wert 1 annimt, an allen übrigen Interpolationsstellen $x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n$ aber verschwindet.

Bekanntlich spielt in der Theorie der Interpolation eine wichtige Rolle die Summe der absoluten Beträge der LAGRANGEschen Grundfunktionen [1]

$$|l_1(x)| + |l_2(x)| + ... + |l_n(x)|; \tag{2}$$

namentlich das *Maximum* dieser Summe im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$

$$\underset{-1 \leqq x \leqq 1}{\operatorname{Max}} \{ |l_1(x)| + |l_2(x)| + ... + |l_n(x)| \} \tag{3}$$

verdient ein besonderes Interesse. Wenn man nämlich die Summe (2) vor Augen hält, so wird man als « beste » Interpolation diejenige betrachten können, bei welcher die n voneinander verschiedenen Abszissen so verteilt sind, daß *das Maximum*

$$\underset{-1 \leqq x \leqq 1}{\operatorname{Max}} \{ |l_1(x)| + ... + |l_n(x)| \} = M(x_1, x_2, ..., x_n) = M$$

möglichst klein ausfällt.

---

[1] Ich erinnere an die Arbeiten von RUNGE, BOREL, LEBESGUE, DE LA VALLÉE POUSSIN, FABER, S. BERNSTEIN, D. JACKSON, TIETZE und HAHN. Die Summen (2) entsprechen den « LEBESGUEschen Konstanten » (« Funktionen ») bei den Orthogonalreihen.

Man kann nun leicht beweisen ([2]), daß eine Abszissenverteilung $x_1, x_2, \ldots, x_n$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ tatsächlich existiert, für welche das Maximum $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von $|l_1(x)| + \ldots + |l_n(x)|$ seinen minimalen Wert — den ich etwa mit M_n bezeichne — annimt. Unbekannt ist aber, bei welcher (oder welchen) Abszissenverteilungen

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} \{ |l_1(x)| + \ldots + |l_n(x)| \} = M_n$$

ist. Weiter ist auch der Wert von M_n unbekannt. Hingegen ist bekannt die Ungleichung ([3])

$$\frac{1}{12} \log n < M_n < 12 \log n \qquad (n = 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

2. - Eine analoge Extremumsaufgabe läßt sich i. B. auf die Quadratsumme ([4])

$$(l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 \tag{5}$$

stellen. Diese soll in den folgenden Zeilen vollständig gelöst werden. Das Resultat lautet folgenderweise:

Ist $-1 \leqq x_n < x_{n-1} < \ldots < x_2 < x_1 \leqq 1$, *so ist der kleinste Wert des Maxi-*

([2]) Beim Beweise hat man die folgende Tatsache zu berücksichtigen, die sich leicht ergibt: Aus

$$|l_1(x)| \leqq C, \quad |l_2(x)| \leqq C, \ldots, \quad |l_n(x)| \leqq C$$

für $-1 \leqq x \leqq 1$ folgt

$$x_k - x_{k+1} \geqq \frac{1}{n^2 C}$$

für $k = 1, 2, \ldots, (n-1)$.

([3]) $\frac{1}{12} \log n < M_n$ rührt von FABER her. (S. FABER 1 und FEJÉR 2, Anhang I, S. 450-453).

([4]) Auf die Quadratsumme der LAGRANGEschen Grundfunktionen $(l_1(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2$ habe ich neuerdings hingewiesen (FEJÉR 1). Sie läßt sich leichter beherrschen als die Summe der absoluten Beträge, und dient in meiner soeben angeführten Arbeit u. A. zur Aufstellung einer durchsichtigen, elementaren Konvergenztheorie für die Folge der LAGRANGEschen Interpolationspolynome einer Funktion $f(x)$, die auch im Falle solcher Abszissengruppen anwendbar ist, für welche der Konvergenzbeweis bis jetzt nicht durchgeführt worden ist. (Diese Konvergenztheorie entspricht jener elementaren Konvergenztheorie der FOURIERschen Reihe, bei welcher

$$\varrho_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) \right| dt$$

einfach durch die s. g. SCHWARZsche Ungleichung abgeschätzt wird, die hier

$$\varrho_n \leqq \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} (\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt) \right\}^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \left\{ 2\pi + 4\pi \sum_{k=1}^{n} (\cos^2 kx + \sin^2 kx) \right\}} = \sqrt{1 + 2 \sum_{k=1}^{n} 1} = \sqrt{2n+1}$$

liefert). Es sei weiter erwähnt, daß der « Tafelfehler » (TIETZE)

$$T(x) = \varepsilon_1 l_1(x) + \varepsilon_2 l_2(x) + \ldots + \varepsilon_n l_n(x)$$

mums der Quadratsumme der zur Abszissengruppe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *gehörigen Lagrangeschen Grundfunktionen im Intervalle* $-1 \leqq x \leqq 1$ *gleich* 1. *D. h.*

$$\min_{-1 \leqq x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 \leqq 1} \; \max_{-1 \leqq x \leqq 1} \{(l_1(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2\} = 1. \tag{6}$$

Die einzige Abszissengruppe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq 2)$, *für welche*

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} \{(l_1(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2\} = 1 \tag{7}$$

ist, wird durch die n *Wurzeln der Gleichung*

$$(1-x^2)P'_{n-1}(x) = 0 \tag{8}$$

geliefert, wo $P'_{n-1}(x)$ *die Ableitung nach* x *des* $(n-1)^{\text{ten}}$ *Legendreschen Polynoms bezeichnet* ([5]). *Im Falle dieser « besten » Abszissengruppe ist übrigens für jeden Wert von* x

$$(l_1(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 = 1 - \frac{(1-x^2)(P'_{n-1}(x))^2}{n(n-1)}, \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

oder, indem ich $x = \cos\theta$ *setze,*

$$(l_1(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 = 1 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{dP_{n-1}}{d\theta}\right)^2 \tag{9'}$$

3. - Der Beweis dieses Satzes von « TSCHEBYSCHEFFscher Art » ist äusserst einfach, und lautet folgenderweise.

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ irgendwelche, voneinander verschiedene Abszissen (die aber immer die Ungleichungen $-1 \leqq x_n < x_{n-1} < \ldots < x_2 < x_1 \leqq 1$ befriedigen sollen). Da

$$(l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 \tag{10}$$

an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den Wert 1 annimt, so ist natürlich immer

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} \{(l_1(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2\} \geqq 1. \tag{11}$$

Nehmen wir an, daß für eine Abszissenverteilung $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\max_{-1 \leqq x \leqq 1} \{(l_1(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2\} = 1 \tag{12}$$

besteht, d. h. daß

$$(l_1(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 \leqq 1, \qquad (-1 \leqq x \leqq 1), \tag{13}$$

---

die beiden Abschätzungen

$$|T(x)| \leqq \varepsilon \{|l_1(x)| + \ldots + |l_n(x)|\},$$
$$|T(x)| \leqq \sqrt{\varepsilon_1^2 + \ldots + \varepsilon_n^2}\sqrt{(l_1(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2}$$

gestattet, wo $\varepsilon = \operatorname{Max}(|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_n|)$. Diese beiden Abschätzungen führen auch zu den beiden Extremumsaufgaben « TSCHEBYSCHEFFscher Art » des Textes.

([5]) Zuerst kurz mitgeteilt in FEJÉR 1, Fußnote ([2]).

im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ gültig ist. Dann ist jedenfalls

$$(14) \qquad |l_1(x)| \leqq 1, \quad |l_2(x)| \leqq 1, \ldots, \quad |l_n(x)| \leqq 1$$

für $-1 \leqq x \leqq 1$. Sehen wir nun, was aus den Ungleichungen (14) gefolgert werden kann. Es bezeichne x_k eine beliebige der Interpolationsstellen

$$(15) \qquad x_2, \quad x_3, \ldots, \quad x_{n-1},$$

die, nach Voraussetzung, alle im *Innern* des Intervalles $(-1, +1)$ liegen (d. h. $-1 < x_k < 1$). Da $l_k(x_k) = 1$, und da $|l_k(x)| \leqq 1$ für $-1 \leqq x \leqq 1$, so ist $x = x_k$ eine Maximumstelle für die Grundfunktion $l_k(x)$. Also ist

$$(16) \qquad l_k'(x_k) = 0 \qquad \text{für } k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Bezeichnet nun überhaupt, bei beliebigen voneinander verschiedenen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\omega(x)$ das Polynom

$$(17) \qquad \omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

so ist

$$(18) \qquad l_k(x) = \frac{1}{\omega'(x_k)} \frac{\omega(x)}{x-x_k} = \frac{1}{\omega'(x_k)} \frac{\omega(x_k) + \omega'(x_k)(x-x_k) + \frac{\omega''(x_k)}{2}(x-x_k)^2 + \ldots}{x-x_k} =$$
$$= 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} (x-x_k) + \ldots,$$

so daß also

$$(19) \qquad l_k'(x_k) = \frac{1}{2} \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}.$$

Da in unserem Falle $l_k'(x_k) = 0$ ist für $k = 2, 3, \ldots, n-1$, so ist also jetzt

$$(20) \qquad \omega''(x_k) = 0 \qquad \text{für } k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Da aber $\omega''(x)$ ein Polynom von $(n-2)^{\text{tem}}$ Grade ist, und also mehr als $n-2$ Wurzeln nicht haben kann, so kann bei unserer Abszissenverteilung x_1 und x_n nicht im Innern des Intervalles $(-1, +1)$ liegen. Es muß also $x_1 = 1$ und $x_n = -1$ sein. Ich habe also erhalten, daß, wenn für eine Abszissenverteilung die Ungleichung (13) besteht, sodann

$$(21) \qquad \omega(x) = C(1-x^2)\omega''(x)$$

gültig ist, wo C eine Konstante bezeichnet. Da auf der linken Seite von (21) der Koeffizient von x^n gleich 1, auf der rechten Seite aber $-n(n-1)C$ ist, so ist $C = -\frac{1}{n(n-1)}$, so daß ich also für das Polynom n^{ten} Grades $\omega(x)$ die Differentialgleichung

$$(22) \qquad (1-x^2)\omega''(x) + n(n-1)\omega(x) = 0$$

bekommen habe.

Differenziere ich aber in (22) einmal nach x, so erhalte ich für $\omega'(x) = \Omega(x)$ die Differentialgleichung

$$(23) \qquad (1-x^2)\Omega'' - 2x\Omega' + n(n-1)\Omega = 0,$$

d. h. die Differentialgleichung des $(n-1)^{\text{ten}}$ LEGENDREschen Polynoms. Also ist

(24)
$$\omega(x)=c\int P_{n-1}(t)\,dt,$$

und da doch $\omega(x)$ für $x=-1$ (und auch für $x=1$) verschwindet:

(25)
$$\omega(x)=c\int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\,dt,$$

wo c eine von Null verschiedene Konstante bezeichnet.

Ich habe also erhalten, daß die einzige Abszissengruppe $x_1, x_2, \ldots, x_n$, für welche im Intervalle $-1\leqq x\leqq 1$ beständig

(26)
$$(l_1(x))^2+(l_2(x))^2+\ldots+(l_n(x))^2\leqq 1$$

sein kann, durch die n Wurzeln der Gleichung

(27)
$$\int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\,dt=0,$$

(oder, was dasselbe ist, durch die Wurzeln der Gleichung

(28)
$$(1-x^2)P'_{n-1}(x)=0,$$

oder der Gleichung

(29)
$$P_n(x)-P_{n-2}(x)=0)$$

geliefert wird [6].

4. - Jetzt will ich weiter beweisen, daß für diese Abszissen die Ungleichung (26) tatsächlich gültig ist. Diesen Beweis kann ich aber nur mit Hilfe einer allgemeinen

---

[6] Die Differentialgleichung des JACOBIschen Polynoms n^{ten} Grades $J_n(\alpha, \beta, x)=\omega(x)$ mit den Parameterwerten α, β lautet:

$$(1-x^2)\omega''+[2(\alpha-\beta)-2(\alpha+\beta)x]\,\omega'+n[n+2(\alpha+\beta)-1]\,\omega=0.$$

Für $\alpha\geqq 0$, $\beta\geqq 0$ hat $J_n(\alpha, \beta, x)=0$ n voneinander verschiedene reelle Wurzeln, die alle im Intervalle $-1\leqq x\leqq 1$ liegen. Wir sehen, daß unser Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$ identisch ist mit den Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des « extremsten » JACOBIschen Polynoms $J_n(0, 0, x)$. Tatsächlich übergeht für $\alpha=\beta=0$ die obige Differentialgleichung in

$$(1-x^2)\omega''+n(n-1)\omega=0.$$

Es ist

$$\omega(x)=J_n(0, 0, x)=(1-x^2)P'_{n-1}(x)=-n(n-1)\int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\,dt=-\frac{n(n-1)}{2n-1}\,(P_n(x)-P_{n-2}(x)).$$

$\omega(x)=J_n(0, 0, x)$ ist (von einem konstanten Faktor abgesehen) auch identisch mit dem Koeffizienten von r^n in der Entwickelung der Dreiecksseite $\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}$ nach ganzen Potenzen von r (wenn $\cos\theta=x$ gesetzt wird). Das Polynom $J_n(0, 0, x)$ tritt in verschiedenen wichtigen Untersuchungen von RADAU, STIELTJES, EGERVÁRY, I. SCHUR und FEKETE auf. (S. FEJÉR 3, Fußnote [1] zu Nr. 3, und FEJÉR 1, Literaturverzeichnis).

Identität führen, die für beliebige Abszissen $x_1, x_2, \dots, x_n$ gültig ist, und die ich zunächst darlegen möchte.

Es sei

$$y_1 h_1(x) + y_2 h_2(x) + \dots + y_n h_n(x) \tag{30}$$

die spezielle HERMITEsche Interpolationsformel für Treppenparabeln. Die Formel (30) stellt diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)^{\text{tem}}$ Grade dar, die an den Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$, der Reihe nach, die Werte $y_1, y_2, \dots, y_n$ annimt, und deren Ableitung an allen Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ verschwindet. Wenn wieder $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, so ist, wie leicht ersichtlich,

$$h_k(x) = v_k(x)(l_k(x))^2, \tag{31}$$

wo

$$v_k(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k), \qquad k = 1, 2, \dots, n. \tag{32}$$

Setzt man nun in der Formel (30) $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1$, so erhält man die allgemeine Identität

$$v_1(x)(l_1(x))^2 + v_2(x)(l_2(x))^2 + \dots + v_{n-1}(x)(l_{n-1}(x))^2 + v_n(x)(l_n(x))^2 \equiv 1, \tag{33}$$

wo also

$$v_k(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k), \qquad k = 1, 2, \dots, n. \tag{34}$$

5. - Da in unserem Falle $\omega''(x_k) = 0$ ist für $k = 2, 3, \dots, n-1$, so ist also nach (34)

$$v_2(x) = v_3(x) = \dots = v_{n-1}(x) \equiv 1. \tag{35}$$

Um das zu $x_1 = 1$ gehörige $v_1(x)$ bestimmen zu können, müssen wir nur

$$\frac{\omega''(x_1)}{\omega'(x_1)} = \frac{\omega''(1)}{\omega'(1)}$$

berechnen. Wenn wir aber in (23) $x = 1$ setzen, so erhalten wir unmittelbar

$$\frac{\Omega'(1)}{\Omega(1)} = \frac{\omega''(1)}{\omega'(1)} = \frac{n(n-1)}{2}. \tag{36}$$

Also ist

$$v_1(x) = 1 - \frac{\omega''(1)}{\omega'(1)}(x-1) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}(1-x). \tag{37}$$

Ähnlich erhält man

$$v_n(x) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}(1+x). \tag{38}$$

Die Identität (33) liefert also, mit Rücksicht auf (35), (37) und (38),

$$\left(1 + \frac{n(n-1)}{2}(1-x)\right)(l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \dots + (l_{n-1}(x))^2 + \\ + \left(1 + \frac{n(n-1)}{2}(1+x)\right)(l_n(x))^2 = 1. \tag{39}$$

Da aber, für $-1 \leqq x \leqq 1$, $v_1(x) \geqq 1$, $v_n(x) \geqq 1$ ist, so folgt aus (39)

$$(l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \dots + (l_n(x))^2 \leqq 1 \qquad \text{für } -1 \leqq x \leqq 1, \tag{40}$$

d. h. die Ungleichung (26).

Hiermit ist aber schon vollständig bewiesen, daß für die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von

$$\int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\,dt = 0,$$

und nur für dieses Wertsystem $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$(l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 \leqq 1$$

ist im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$. (Dasselbe Wurzelsystem besitzen die Gleichungen $(1-x^2)P'_{n-1}(x) = 0$ und $P_n(x) - P_{n-2}(x) = 0$).

6. - Die Identität (39) ist auch zur Ausrechnung der Quadratsumme

$$(l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2$$

geeignet. Aus ihr folgt nämlich zunächst

$$(41)\quad (l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 = 1 - \frac{n(n-1)}{2}\{(1-x)(l_1(x))^2 + (1+x)(l_n(x))^2\}.$$

Da aber

$$(42)\qquad l_1(x) = \frac{1}{\omega'(1)}\frac{\omega(x)}{x-1}, \qquad l_n(x) = \frac{1}{\omega'(-1)}\frac{\omega(x)}{x+1},$$

so ist, wenn wir für $\omega(x)$ die Form

$$(43)\qquad \omega(x) = \int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\,dt$$

wählen, $\omega'(x) = P_{n-1}(x)$; es ist also

$$\omega'(1) = P_{n-1}(1) = 1, \quad \omega'(-1) = P_{n-1}(-1) = (-1)^{n-1},$$

so daß wir

$$(44)\qquad (1-x)(l_1(x))^2 + (1+x)(l_n(x))^2 = (\omega(x))^2\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) =$$
$$= \frac{2}{1-x^2}(\omega(x))^2 = \frac{2}{1-x^2}\left(\int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\,dt\right)^2$$

erhalten. (41) und (44) liefern endlich

$$(45)\qquad (l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 = 1 - \frac{n(n-1)}{1-x^2}\left(\int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)\,dt\right)^2,$$

woraus dann

$$(46)\qquad (l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 = 1 - \frac{1}{n(n-1)}(1-x^2)(P'_{n-1}(x))^2,$$

oder auch

$$(47)\quad (l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 = 1 - \frac{n(n-1)}{(2n-1)^2}\frac{1}{1-x^2}(P_n(x) - P_{n-2}(x))^2$$

folgt. Setze ich $x = \cos\theta$, so ergibt (46) endlich noch die Form

$$(48)\qquad (l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \ldots + (l_n(x))^2 = 1 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{dP_{n-1}}{d\theta}\right)^2.$$

7. - Die Formeln (45)-(48) gestatten eine nähere Diskussion der Quadratsumme der Grundpolynome; in diese möchte ich aber hier nicht eingehen. Ich erwähne nur das folgende Resultat, das sich leicht ergibt:

$$\lim_{n=\infty} \{(l_1(x))^2+(l_2(x))^2+\dots+(l_n(x))^2\}=1 \qquad \text{für } -1\leqq x\leqq 1. \tag{49}$$

Die Konvergenz ist *gleichmäßig* in jedem Intervalle $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$, wo ε eine positive Zahl bezeichnet, aber *nicht gleichmäßig* im ganzen Intervalle $-1\leqq x\leqq 1$.

§ 2.

8. - Im Nr. 6. habe ich die Summe

$$(l_1(x))^2+(l_2(x))^2+\dots+(l_n(x))^2$$

für die Nullstellen $x_1, x_2,\dots, x_n$ des JACOBIschen Polynoms $J_n(0, 0, x)$ ausgerechnet. Hier möchte ich nun diese Quadratsumme für die Nullstellen $x_0, x_1,\dots, x_{n-1}$ des JACOBIschen Polynoms $J_n\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, x\right)=T_n(x)$, d. h. für die Nullstellen des TSCHEBYSCHEFFschen Polynoms $T_n(x)=T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ ausrechnen.

Jetzt ist

$$x_k=\cos\,(2k+1)\frac{\pi}{2n}=\cos\theta_k, \qquad k=0, 1, 2,\dots, n-1, \tag{50}$$

wo also

$$\theta_k=(2k+1)\frac{\pi}{2n}, \qquad k=0, 1, 2,\dots, n-1. \tag{51}$$

Es sei in abgekürzter Bezeichnung:

$$\sqrt{\frac{1}{n}}=\varphi_0(\theta), \quad \sqrt{\frac{2}{n}}\cos\theta=\varphi_1(\theta),\dots, \quad \sqrt{\frac{2}{n}}\cos\,(n-1)\theta=\varphi_{n-1}(\theta). \tag{52}$$

Man setze nun in die Reihe der n Funktionen

$$\varphi_0(\theta), \quad \varphi_1(\theta), \quad \varphi_2(\theta),\dots, \quad \varphi_{n-1}(\theta) \tag{53}$$

für θ, der Reihe nach, die n Werte

$$\theta_0, \quad \theta_1, \quad \theta_2,\dots, \quad \theta_{n-1}. \tag{54}$$

Dann entsteht die quadratische Matrix mit n^2 Elementen

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(\theta_0), & \varphi_1(\theta_0), & \varphi_2(\theta_0),\dots, & \varphi_{n-1}(\theta_0) \\ \varphi_0(\theta_1), & \varphi_1(\theta_1), & \varphi_2(\theta_1),\dots, & \varphi_{n-1}(\theta_1) \\ \varphi_0(\theta_2), & \varphi_1(\theta_2), & \varphi_2(\theta_2),\dots, & \varphi_{n-1}(\theta_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_0(\theta_{n-1}), & \varphi_1(\theta_{n-1}), & \varphi_2(\theta_{n-1}),\dots, & \varphi_{n-1}(\theta_{n-1}) \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Diese Matrix ist bekanntlich eine *orthogonale* Matrix, was sich durch elementare Rechnung ergibt.

Wenn ich nun die Reihe der n Funktionen unter (53) nacheinander mit den Reihen der Matrix (55) *komponiere*, so erhalte ich die n Kosinuspolynome $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$
(56)\quad \left\{\begin{array}{l}
l_0(\cos\theta)=\varphi_0(\theta_0)\varphi_0(\theta)+\varphi_1(\theta_0)\varphi_1(\theta)+\dots+\varphi_{n-1}(\theta_0)\varphi_{n-1}(\theta)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
l_k(\cos\theta)=\varphi_0(\theta_k)\varphi_0(\theta)+\varphi_1(\theta_k)\varphi_1(\theta)+\dots+\varphi_{n-1}(\theta_k)\varphi_{n-1}(\theta)\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right. .
$$

Ich behaupte nun, daß $l_0(x)$, $l_1(x)$,...., $l_{n-1}(x)$ die LAGRANGEschen Grundpolynome i. B. auf x_0, x_1,...., x_{n-1} sind. Tatsächlich ist, in Folge der Orthogonalität der Matrix (55), $l_k(\cos\theta_\nu)=1$ für $\nu=k$, und $=0$ für $\nu\neq k$. Da aber, nach (56), $l_0(x)$, $l_1(x)$,...., $l_{n-1}(x)$ aus $\varphi_0(\theta)$, $\varphi_1(\theta)$,...., $\varphi_{n-1}(\theta)$ durch eine orthogonale lineare Transformation entstehen, so erhalten wir mit einem Schlage

$$
\begin{aligned}
(57)\quad (l_0(x))^2+(l_1(x))^2+\dots+(l_{n-1}(x))^2&=(\varphi_0(\theta))^2+(\varphi_1(\theta))^2+\dots+(\varphi_{n-1}(\theta))^2=\\
&=\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\cos^2\theta+\frac{2}{n}\cos^2 2\theta+\dots+\frac{2}{n}\cos^2(n-1)\theta=\\
&=\frac{1+2\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\cos^2\nu\theta}{n}=\frac{1+\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}(1+\cos 2\nu\theta)}{n}=\\
&=\frac{n+\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}\cos 2\nu\theta}{n}=1+\frac{\cos 2\theta+\cos 4\theta+\dots+\cos 2(n-1)\theta}{n}.
\end{aligned}
$$

Ich habe also das folgende Resultat erhalten:

Im Falle der Tschebyscheffschen Abszissen

$$
(58)\qquad x_k=\cos(2k+1)\frac{\pi}{2n},\qquad k=0,1,\dots,n-1,
$$

ist die Quadratsumme der Lagrangeschen Grundfunktionen

$$
\begin{aligned}
(59)\quad (l_0(x))^2+(l_1(x))^2+\dots+(l_{n-1}(x))^2&=1+\frac{\cos 2\theta+\cos 4\theta+\dots+\cos 2(n-1)\theta}{n}=\\
&=1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\,\frac{\sin(2n-1)\theta}{\sin\theta},\\
x=\cos\theta,\qquad 0\leqq\theta\leqq\pi.&
\end{aligned}
$$

Auf Grund der Ausrechnung (59) läßt sich natürlich die Quadratsumme leicht diskutieren. Ich erwähne nur die Ungleichung

$$
(60)\qquad (l_0(x))^2+(l_1(x))^2+\dots+(l_{n-1}(x))^2\leqq 2-\frac{1}{n},\qquad -1\leqq x\leqq 1,
$$

und die Limesgleichung

$$
(61)\qquad \lim_{n=\infty}\{(l_0(x))^2+(l_1(x))^2+\dots+(l_{n-1}(x))^2\}=\left\{\begin{array}{ll}1, & \text{für}\quad -1<x<1,\\ 2, & \text{für}\quad x=\pm 1.\end{array}\right.
$$

9. - Obzwar ich mich in dieser Note nur mit parabolischer Interpolation beschäftige, möchte ich hier doch die Quadratsumme im Falle der klassischen *Lagrangeschen trigonometrischen Inlerpolation* berechnen.

Bei LAGRANGE wird das Intervall $0 \leqq x < 2\pi$ in $2n+1$ gleiche Teile zerlegt. Es seien

$$\theta_k = k\frac{2\pi}{2n+1}, \qquad k=0, 1, 2, \ldots, 2n, \tag{62}$$

die $2n+1$ Interpolationsabszissen. Es sei jetzt

$$\varphi_0(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}, \quad \varphi_1(\theta) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\cos\theta, \quad \varphi_2(\theta) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\sin\theta, \ldots \tag{63}$$
$$\varphi_{2n-1}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\cos n\theta, \quad \varphi_{2n}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\sin n\theta.$$

Man setze in die $2n+1$ Funktionen

$$\varphi_0(\theta), \quad \varphi_1(\theta), \quad \varphi_2(\theta), \ldots, \quad \varphi_{2n-1}(\theta), \quad \varphi_{2n}(\theta) \tag{64}$$

für θ, der Reihe nach, die $2n+1$ Werte

$$\theta_0, \quad \theta_1, \quad \theta_2, \ldots, \quad \theta_{2n-1}, \quad \theta_{2n}. \tag{65}$$

Man erhält dann wieder eine *orthogonale* Matrix, diesmal mit $(2n+1)^2$ Elementen:

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(\theta_0), & \varphi_1(\theta_0), & \varphi_2(\theta_0), \ldots, & \varphi_{2n-1}(\theta_0), & \varphi_{2n}(\theta_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(\theta_k), & \varphi_1(\theta_k), & \varphi_2(\theta_k), \ldots, & \varphi_{2n-1}(\theta_k), & \varphi_{2n}(\theta_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \tag{66}$$

Wenn man nun die Funktionenreihe (64) mit den Zeilen der Matrix (66) komponiert, so erhält man $2n+1$ trigonometrische Polynome n^{ter} Ordnung $\lambda_0(\theta), \ldots, \lambda_{2n}(\theta)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_0(\theta) = \varphi_0(\theta_0)\varphi_0(\theta) + \varphi_1(\theta_0)\varphi_1(\theta) + \ldots + \varphi_{2n}(\theta_0)\varphi_{2n}(\theta) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_k(\theta) = \varphi_0(\theta_k)\varphi_0(\theta) + \varphi_1(\theta_k)\varphi_1(\theta) + \ldots + \varphi_{2n}(\theta_k)\varphi_{2n}(\theta) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{67}$$

Nun ist aber in Folge der Orthogonalität der Matrix (66) $\lambda_k(\theta_\nu) = 1$ für $\nu = k$, und $=0$ für $\nu \neq k$. $\lambda_k(\theta)$ ist also das k^{te} Grundpolynom unserer trigonometrischen Interpolation. Mit Rücksicht auf die Orthogonalität des Koeffizientensystems in (67) erhält man also unmittelbar

$$(\lambda_0(\theta))^2 + (\lambda_1(\theta))^2 + \ldots + (\lambda_{2n}(\theta))^2 = (\varphi_0(\theta))^2 + (\varphi_1(\theta))^2 + \ldots + (\varphi_{2n}(\theta))^2 = \tag{68}$$
$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta + \ldots + 2\cos^2 n\theta + 2\sin^2 n\theta}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{2n}{2n+1} = 1.$$

Ich habe also das folgende Resultat erhalten:

Im Falle der klassischen Lagrangeschen trigonometrischen Interpolation, d. h. bei

$$\theta_k = k\frac{2\pi}{2n+1}, \qquad k=0, 1, 2, 3, \ldots, 2n,$$

ist die Quadratsumme der Lagrangeschen Grundfunktionen der Interpolation identisch gleich 1; *d. h.*

$$(\lambda_0(\theta))^2 + (\lambda_1(\theta))^2 + \ldots + (\lambda_{2n}(\theta))^2 \equiv 1. \tag{69}$$

Bekanntlich ist die Summe der gewöhnlichen LAGRANGEschen Grundfunktionen bei jeder parabolischen oder trigonometrischen Interpolation gleich 1. Es ist also auch für die Abszissen (62)

$$\lambda_0(\theta)+\lambda_1(\theta)+\ldots+\lambda_{2n}(\theta)\equiv 1. \tag{70}$$

Für die Abszissen (62) besteht aber außerdem noch, wie wir eben bewiesen haben,

$$(\lambda_0(\theta))^2+(\lambda_1(\theta))^2+\ldots+(\lambda_{2n}(\theta))^2\equiv 1. \tag{71}$$

§ 3.

10\. - Ich kehre zur parabolischen Interpolation zurück und möchte nun Einiges mitteilen über die Quadratsumme der LAGRANGEschen Grundfunktionen

$$(l_1(x))^2+(l_2(x))^2+\ldots+(l_n(x))^2, \tag{72}$$

wenn die Interpolationsabszissen $x_1, x_2,\ldots, x_n$ JACOBIsch sind, d. h. wenn sie die n Wurzeln der Gleichung

$$J_n(\alpha,\beta,x)=0 \tag{73}$$

sind, wo $J_n(\alpha,\beta,x)$ das JACOBIsche Polynom n^{ten} Grades mit den Parameterwerten α, β bezeichnet. Mit den beiden Spezialfällen $\alpha=\beta=0$, $\alpha=\beta=\frac{1}{4}$ habe ich mich schon beschäftigt; jetzt sollen über den allgemeinen Fall einige Bemerkungen gemacht werden. Ich beschränke mich aber auf den « Hauptfall », d. h. auf den Fall, in welchem die Parameter α, β den Ungleichungen

$$0\leqq\alpha<\frac{1}{2},\qquad 0\leqq\beta<\frac{1}{2} \tag{74}$$

genügen.

In meiner letzten Arbeit (7) über LAGRANGEsche Interpolation habe ich bewiesen, daß in diesem Hauptfalle

$$(l_1(x))^2+(l_2(x))^2+\ldots+(l_n(x))^2\leqq\operatorname{Max}\left(\frac{1}{1-2\alpha},\ \frac{1}{1-2\beta}\right), \tag{75}$$

d. h. daß die Quadratsumme für alle n beschränkt ist im Intervalle $-1\leqq x\leqq 1$ und nicht größer werden kann, als die größere (nicht kleinere) der beiden positiven Zahlen $\frac{1}{1-2\alpha}$, $\frac{1}{1-2\beta}$.

Mit Hilfe eines allgemeinen Satzes von SZEGÖ über die Treppenparabeln für JACOBIsche Abszissen (der demnächst in der Math. Zeitschrift veröffentlicht werden soll) kann ich nun die folgende Limesgleichung beweisen:

$$\lim_{n=\infty}\left\{(l_1(x))^2+(l_2(x))^2+\ldots+(l_n(x))^2\right\}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-2\beta}, & \text{für}\quad x=1\\ 1, & \text{für}\quad -1<x<1\\ \dfrac{1}{1-2\alpha}, & \text{für}\quad x=-1.\end{cases} \tag{76}$$

(7) FEJÉR 1.

Daraus folgt, daß die Abschätzung (75) in gewissem Sinne nicht weiter verbessert werden kann.

Für $\alpha=\beta=0$ geht (76) in (49), und für $\alpha=\beta=\frac{1}{4}$ in (61) über.

Auf den Beweis von (76) werde ich hier nicht eingehen.

11. - Etwas ausführlicher möchte ich nur noch den Grenzfall $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, d. h. den LEGENDRE-GAUßschen Fall behandeln. Jetzt sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Wurzeln der Gleichung

$$P_n(x)=0, \tag{77}$$

wo $P_n(x)$ das n^{te} LEGENDREsche Polynom bezeichnet.

Ich will zunächst die Quadratsumme

$$(l_1(x))^2+(l_2(x))^2+\ldots+(l_n(x))^2 \tag{78}$$

an der Stelle $x=1$ untersuchen, weil ich bei dieser Untersuchung mit dem klassischen Satze von GAUß über die mechanische Quadratur, und mit dem sich anschließenden Konvergenzsatz von STIELTJES auskommen kann.

Für eine im Intervalle $-1\leqq x\leqq 1$ beschränkte und in Riemannschen Sinne integrierbare Funktion $f(x)$ lautet der Wert der GAUßschen mechanischen Quadratur bei dem n^{ten} Schritte bekanntlich ([8])

$$Q_n(f)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{2}{(1-x_k^2)(P_n'(x_k))^2}. \tag{79}$$

Es sei nun

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{für } -1\leqq x<-1+\varepsilon \\ \frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}, & \text{für } -1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon \\ 0, & \text{für } 1-\varepsilon<x\leqq 1, \end{cases} \tag{80}$$

wo ε eine feste positive Größe bezeichnet.

Für diese Funktion $f(x)$ ist aber

$$Q_n(f)=\sum_{-1+\varepsilon\leqq x_k\leqq 1-\varepsilon}\frac{1}{2}\frac{1+x_k}{1-x_k}\frac{2}{(1-x_k^2)(P_n'(x_k))^2}=\sum_{-1+\varepsilon\leqq x_k\leqq 1-\varepsilon}\frac{1}{(1-x_k)^2(P_n'(x_k))^2}, \tag{81}$$

wo also die Summation nicht über sämmtliche Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von $P_n(x)=0$ zu erstrecken ist, sondern nur über diejenige, die in das Intervall $-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon$ fallen. Da aber

$$l_k(x)=\frac{P_n(x)}{(x-x_k)P_n'(x_k)}, \tag{82}$$ $$l_k(1)=\frac{P_n(1)}{(1-x_k)P_n'(x_k)}=\frac{1}{(1-x_k)P_n'(x_k)}, \tag{83}$$

([8]) $Q_n(f)$ bedeutet den Wert

$$\int_{-1}^{+1} g(x)dx,$$

wo $g(x)$ eine (beliebige) ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)^{\text{tem}}$ Grade bezeichnet, für welche an den LEGENDRE-GAUßschen Abszissen $g(x_k)=f(x_k)$, $k=1, 2, \ldots, n$, gültig ist.

und also

(84) $$(l_k(1))^2 = \frac{1}{(1-x_k)^2(P_n'(x_k))^2},$$

so ist, mit Rücksicht auf (81) und (84),

(85) $$Q_n(f) = \sum_{-1+\varepsilon \leqq x_k \leqq 1-\varepsilon} (l_k(1))^2,$$

und erst recht

(86) $$Q_n(f) \leqq \sum_{k=1}^{n} (l_k(1))^2.$$

Nach dem bekannten Satz von STIELTJES konvergiert aber der Wert $Q_n(f)$ der GAUẞschen mechanischen Quadratur bei dem n^{ten} Schritte für $n \to \infty$ zu

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx;$$

es ist also

(87) $$\lim_{n=\infty} Q_n(f) = \int_{-1}^{+1} f(x)dx = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{2}\frac{1+x}{1-x}dx = \log\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} - (1-\varepsilon).$$

Auf Grund von (86) und (87), und mit Rücksicht darauf, daß ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet, erhalten wir also

(88) $$\lim_{n=\infty} \{(l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \dots + (l_n(x))^2\} = +\infty, \quad \text{für} \quad x = \pm 1.$$

12. - Nach Erledigung der Grenzstellen -1 und $+1$ unseres Intervalles, sei a eine innere Stelle des Intervalles $(-1, +1)$, d. h. $-1 < a < 1$. Es sei weiter $f(x)$ eine beliebige Funktion, die im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ etwa überall stetig ist. Es sei endlich $H_n(x)$ die n^{te} Treppenparabel von $f(x)$ i. B. auf die LEGENDRE-GAUẞschen Abszissen $x_1, x_2, \dots, x_n$, d. h. $H_n(x)$ sei diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)^{\text{tem}}$ Grade, für welche an diesen Abszissen

(89) $$H_n(x_k) = f(x_k), \qquad H_n'(x_k) = 0, \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

gültig ist. Dann ist

(90) $$\lim_{n=\infty} H_n(a) = f(a).$$

Es ist dies der erste Satz, den ich über Treppenparabeln veröffentlicht habe [9].

Wenden wir diesen Satz auf die gebrochene rationale Funktion in x

(91) $$f(x) = \frac{1-x^2}{1-2ax+x^2}$$

an, die wegen $|a| < 1$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ stetig ist.

Da allgemein, für jede Funktion $f(x)$,

(92) $$H_n(a) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{1-2ax_k+x_k^2}{1-x_k^2} (l_k(a))^2,$$

---

[9] S. FEJÉR 3, Theorem VII.

so ist für die Funktion $f(x)$ unter (91)

$$H_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-x_k^2}{1-2ax_k+x_k^2} \frac{1-2ax_k+x_k^2}{1-x_k^2} (l_k(a))^2, \tag{93}$$

d. h.

$$H_n(a) = \sum_{k=1}^{n} (l_k(a))^2, \tag{94}$$

d. h. die Quadratsumme der LAGRANGEschen Grundpolynome an einer inneren Stelle a des Intervalles $(-1, +1)$ ist im Falle LEGENDRE-GAUßscher Abszissen gleich dem Werte der n^{ten} Treppenparabel der Funktion $\frac{1-x^2}{1-2ax+x^2}$ an der Stelle $x=a$. Da aber

$$f(a) = \frac{1-a^2}{1-2a^2+a^2} = 1, \tag{95}$$

so ist nach meinem Satze (90)

$$\lim_{n=\infty} \{ (l_1(a))^2 + \dots + (l_n(a))^2 \} = 1. \tag{96}$$

Zusammenfassend habe ich also das folgende Resultat erhalten:

Für die Legendre-Gaußschen Abszissen $x_1, x_2, \dots, x_n$, d. h. für die Wurzeln der Gleichung $P_n(x)=0$, wo $P_n(x)$ das n^{te} Legendresche Polynom bezeichnet, gilt für die Quadratsumme der Lagrangeschen Grundpolynome:

$$\lim_{n=\infty} \{ (l_1(x))^2 + (l_2(x))^2 + \dots + (l_n(x))^2 \} = \begin{cases} +\infty, & \text{für } x=1 \\ 1, & \text{für } -1<x<1 \\ +\infty, & \text{für } x=-1. \end{cases} \tag{97}$$

LITERATURVERZEICHNIS

G. FABER: 1. *Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen.* Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 23 (1914), S. 192-210.

L. FEJÉR: 1. *Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte.* Mathematische Annalen, Bd. 106 (1932), S. 1-55.

L. FEJÉR: 2. *Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfragen Hermitescher Interpolationsreihen.* Mathematische Zeitschrift, Bd. 32 (1930), S. 426-457.

L. FEJÉR: 3. *Über Interpolation.* Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-Phys., Klasse 1916, S. 66-91.