ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEONIDA TONELLI

Sull'esistenza del minimo in problemi di calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 1-2 (1932), p. 89-99

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_89_0>

SULL'ESISTENZA DEL MINIMO IN PROBLEMI DI CALCOLO DELLE VARIAZIONI

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

Nella sua Memoria *Über die Existenz der absoluten Minima bei regulären Variationsproblemen auf der Kugel* (¹), C. CARATHÉODORY ha dato un importante teorema di esistenza del minimo assoluto, per problemi *regolari* del Calcolo delle Variazioni, il quale è fondato sulla considerazione del limite inferiore $\varepsilon(P, Q)$ dei valori che l'integrale in questione assume su tutte le ammissibili curve, rettificabili e chiuse, che passano per due punti qualsiasi P e Q del campo base A, in cui si suppongono muoversi le curve ammesse. Come osserva lo stesso CARATHÉODORY, il metodo di dimostrazione da Lui seguito consente di estendere il teorema anche a problemi *non regolari*, purchè, per ciascun punto P del campo A, si possa costruire un *campo di estremali forti* (o *semiforti*), continue o discontinue, uscenti da P e circondanti questo punto completamente. Seguendo una via diversa da quella del CARATHÉODORY, si può però dimostrare (il che faremo nella presente Nota) la validità del teorema per tutti i problemi *quasi-regolari* (*positivi*) *seminormali*, indipendentemente da ogni considerazione relativa alle estremali, e quindi indipendentemente dalla possibilità della costruzione del campo di estremali cui abbiamo accennato; nello stesso tempo, il teorema può venire stabilito sotto condizioni estremamente generali, sia in riguardo al campo A, sia in riguardo alla classe delle curve rispetto a cui il problema di minimo vien posto.

La generalizzazione, che così si ottiene, del risultato del CARATHÉODORY, induce a metterlo a confronto con un altro notevole teorema d'esistenza — dato alcuni anni or sono da H. HAHN (²) per problemi semidefiniti positivi, quasi-regolari seminormali — il quale è fondato sulla limitazione superiore delle lunghezze delle curve, appartenenti al campo A, che annullano l'integrale da render minimo.

Noi generalizzeremo qui anche il teorema di HAHN, in modo da sopprimere completamente la condizione che il problema sia semidefinito; e dopo di ciò, le

(¹) V. questo stesso fascicolo, pp. 79-88.

(²) *Über ein Existenztheorem der Variationsrechnung.* [Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, Mathem.-naturw. Kl. Abt. II-a, Bd. 134 (1925), pp. 437-447].

proposizioni di HAHN e di CARATHÉODORY, così come noi le enunceremo, risulteranno (ammessa una certa condizione — del resto generalissima — sulla frontiera del campo A) fra loro equivalenti.

Considereremo, infine, gli integrali *incompletamente regolari positivi*, per i quali, come mostreremo, i due teoremi di HAHN e di CARATHÉODORY conservano ancora la loro equivalenza.

1. - Supporremo sempre, in ciò che segue, che A sia un *campo* (*insieme di punti*) *limitato e chiuso* del piano (x, y), e che la $F(x, y, x', y')$ sia una funzione finita e continua del punto (x, y, x', y'), per ogni (x, y) appartenente ad A e per ogni coppia x', y' di numeri non ambedue nulli. Supporremo, inoltre, che, per i medesimi punti (x, y, x', y'), esistano finite e continue le derivate parziali dei primi due ordini ([3]) della $F(x, y, x', y')$ rispetto ad x' e y', e che la stessa funzione risulti, sempre rispetto ad x' e y', *positivamente omogenea di grado uno*, tale cioè da soddisfare sempre alla relazione

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y'),$$

per ogni $k > 0$.

2. - Diremo che il campo A soddisfa alla *condizione* a), se, presi un qualsiasi numero λ, maggiore di zero, ed un qualunque punto P di A, si può sempre determinare un cerchio di centro P, in modo che ogni suo punto appartenente ad A sia congiungibile con P mediante una curva continua, rettificabile, tutta appartenente ad A, e di lunghezza minore di λ.

3. - Per ogni curva C *ordinaria* — e cioè continua, rettificabile ed appartenente al campo A — considereremo l'integrale

$$\mathfrak{J}_C = \int_C F(x, y, x', y')\, ds,$$

dove s rappresenta la lunghezza dell'arco della C, contata a partire dal primo estremo della curva, o da un suo punto qualunque se essa è chiusa; e se P e Q sono due punti qualsiasi di A, tali però che esista almeno una curva ordinaria che li congiunga, indicheremo con $\varepsilon(P, Q)$ il limite inferiore dei valori di $\mathfrak{J}_C$ relativi a tutte le curve ordinarie e chiuse che passano per ambedue i punti P e Q.

4. - Ciò premesso, e conservando la terminologia dei nostri *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* ([4]), dimostriamo il seguente teorema:

([3]) La considerazione delle derivate parziali del 2° ordine potrebbe essere completamente omessa.

([4]) Bologna, Zanichelli; Vol. I, 1921; Vol. II, 1923.

Supponiamo che il campo A soddisfi alla condizione a), che l'integrale $\mathfrak{I}_C$ sia quasi-regolare positivo seminormale ([5]), *e che si abbia sempre $\varepsilon(P, Q) > 0$, qualunque siano i punti P e Q di A, purchè non coincidenti e tali che si possano fra loro congiungere con almeno una curva ordinaria. Allora, fissato comunque un numero M, le lunghezze delle curve ordinarie C, che soddisfano alla disuguaglianza $\mathfrak{I}_C \leq M$, restano tutte inferiori ad un numero fisso.*

Ammettiamo che il teorema non sia vero, vale a dire, ammettiamo che si possa costruire una successione $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ di curve ordinarie, soddisfacenti, per ogni n intero positivo, alle due disuguaglianze

$$\mathfrak{I}_{C_n} \leq M, \qquad L_n > n,$$

dove L_n rappresenta la lunghezza della curva C_n. Senza limitazione alcuna, possiamo senz'altro supporre che i secondi estremi delle C_n convergano tutti, per $n \to \infty$, ad un unico punto T ([6]).

Fissato un numero l, tale che $0 < l \leq 1$, indichiamo con $a_n^{(1)}$ l'arco della C_n, di lunghezza l, che ha il primo estremo coincidente col primo estremo della curva. Gli archi $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}, \ldots$ (essendo contenuti in un campo limitato ed avendo tutti lunghezza inferiore da un numero fisso) ammettono almeno un arco di accumulazione (od arco limite), e dalla successione $C_2, C_3, \ldots, C_n, \ldots$ possiamo perciò estrarne un'altra $C_{1,1}, C_{2,1}, \ldots, C_{n,1}, \ldots$ in modo che la corrispondente successione $a_{1,1}^{(1)}, a_{2,1}^{(1)}, \ldots, a_{n,1}^{(1)}, \ldots$ converga uniformemente verso un arco limite $a^{(1)}$. La lunghezza $l^{(1)}$ di $a^{(1)}$ risulterà $\leq l$.

Indicato con $a_{n,1}^{(2)}$ l'arco della curva $C_{n,1}$, di lunghezza l e che segue immediatamente $a_{n,1}^{(1)}$, analogamente a quanto abbiamo fatto or ora potremo, dalla successione $C_{2,1}, C_{3,1}, \ldots, C_{n,1}, \ldots$ estrarne un'altra $C_{1,2}, C_{2,2}, \ldots, C_{n,2}, \ldots$ in modo che la successione corrispondente $a_{1,2}^{(2)}, a_{2,2}^{(2)}, \ldots, a_{n,2}^{(2)}, \ldots$ converga uniformemente verso un arco limite $a^{(2)}$. La lunghezza $l^{(2)}$ di $a^{(2)}$ risulterà $\leq l$, ed il primo estremo di $a^{(2)}$ coinciderà col secondo estremo di $a^{(1)}$; inoltre, anche la successione $a_{1,2}^{(1)}, a_{2,2}^{(1)}, \ldots, a_{n,2}^{(1)}, \ldots$ convergerà uniformemente verso $a^{(1)}$.

Così proseguendo, otterremo, per ogni intero positivo m, una successione di curve ordinarie $C_{1,m}, C_{2,m}, \ldots, C_{n,m}, \ldots$ tali che sia

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{I}_{C_{n,m}} \leq M, \qquad L_{n,m} > n + m,$$

e che i successivi archi di $C_{n,m}$, di lunghezza $l: a_{n,m}^{(1)}, a_{n,m}^{(2)}, \ldots, a_{n,m}^{(m)}$, convergano uniformemente, per $n \to \infty$, verso i rispettivi archi limiti $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$, i quali risulteranno tutti di lunghezza $\leq l$. Ciascuno di questi archi limiti avrà il

---

([5]) *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I, p. 224.

([6]) Qualora la C_n fosse chiusa, immagineremo di fissare su di essa un punto da riguardare contemporaneamente come primo e secondo estremo.

primo estremo coincidente col secondo estremo del precedente; e noi potremo indicare con P_m e P_{m+1} i due estremi (primo e secondo, rispettivamente) di $a^{(m)}$.

I punti P_1, P_2, P_3,.... ammettono almeno un punto di accumulazione. Dimostreremo ora che di tali punti di accumulazione non ne può esistere che uno solo.

Siano, infatti, P^* e P^{**} due punti (distinti) di accumulazione dei punti P_m, e si indichi con ϱ un numero positivo, minore della metà del segmento P^*P^{**}, e tale che ogni punto del campo A, appartenente al cerchio (P^*, ϱ) (di centro P^* e raggio ϱ), oppure al cerchio (P^{**}, ϱ), si possa congiungere con P^*, oppure rispettivamente con P^{**}, mediante una curva ordinaria di lunghezza minore di $\varepsilon(P^*, P^{**}) : 8\Phi$, dove Φ rappresenta il massimo modulo della $F(x, y, x', y')$ per tutti i punti (x, y) di A e per tutte le coppie x', y' soddisfacenti alla uguaglianza $x'^2+y'^2=1$. Ciò è possibile in virtù dell'ipotesi che il campo A verifichi la condizione a).

Chiamata Γ_m la curva avente per archi successivi $a^{(1)}, a^{(2)},...., a^{(m)}$, siano: P' il primo dei punti P_1, P_2, P_3,.... che cade nel cerchio (P^*, ϱ); P'' il primo di tali punti, successivo a P', che cade in (P^{**}, ϱ); P''' il primo degli stessi punti, successivo a P'', che cade in (P^*, ϱ); e così via. Ognuno degli archi $\widehat{P'P'''}$, $\widehat{P'''P^{(V)}}$,.... di Γ_m, si può completare in modo da formare una curva ordinaria chiusa passante per P^* e P^{**}, e in modo anche da variare al più il valore dell'integrale $\mathfrak{I}$ di una quantità in modulo minore di $\varepsilon(P^*, P^{**}) : 2$. Gli integrali $\mathfrak{I}_{\widehat{P'P'''}}$, $\mathfrak{I}_{\widehat{P'''P^{(V)}}}$,.... risultano perciò tutti maggiori di

$$\varepsilon(P^*, P^{**}) - \frac{1}{2}\,\varepsilon(P^*, P^{**}) = \frac{1}{2}\,\varepsilon(P^*, P^{**}),$$

e, preso un numero H positivo arbitrariamente grande, si potrà scegliere m in modo che sia

(2) $$\mathfrak{I}_{\Gamma_m} > H.$$

Sottoponiamo ϱ alla ulteriore condizione di esser tale che ogni punto del campo A appartenente al cerchio (T, ϱ) possa congiungersi con T mediante una curva ordinaria di lunghezza $< \varepsilon(P^*, P^{**}) : 8\Phi$, e fissiamo una curva ordinaria $\overline{C}$ che abbia il primo estremo interno al cerchio (T, ϱ) ed il secondo interno a (P^*, ϱ) (7). Allora, ogni curva ordinaria C', avente il primo estremo nel cerchio (P^*, ϱ) ed il secondo in quello (T, ϱ), può essere completata, mediante la $\overline{C}$ ed altre quattro curve, tutte di lunghezza $<\varepsilon(P^*, P^{**}) : 8\Phi$, in modo da formare una curva chiusa passante per P^* e T; la C' soddisfa perciò alla disuguaglianza

(3) $$\mathfrak{I}_{C'} > -\mathfrak{I}_{\overline{C}} - \frac{1}{2}\,\varepsilon(P^*, P^{**}).$$

---

(7) Di tali curve ne esistono sicuramente, perchè, per n sufficientemente grande, $C_{n,m}$ ha almeno un arco con gli estremi interni ai cerchi (P^*, ϱ), (T, ϱ).

Dopo di ciò abbiamo, per la semicontinuità inferiore dell'integrale $\mathfrak{J}_C$ (semicontinuità assicurata dall'ipotesi che l'integrale sia quasi-regolare positivo, seminormale ([8])) e per la (2), che, se n è sufficientemente grande, la parte di $C_{n,m}$ costituita dagli archi $a^{(1)}_{n,m}$, $a^{(2)}_{n,m}$,..., $a^{(m)}_{n,m}$, dà all'integrale $\mathfrak{J}$ un valore maggiore di $H:2$, mentre la parte rimanente soddisfa, come la C', alla (3). Dunque, per n sufficientemente grande, è

$$\mathfrak{J}_{C_{n,m}} > \frac{1}{2}H - \mathfrak{J}_{\overline{C}} - \frac{1}{2}\varepsilon(P^*, P^{**}).$$

Siccome H è un numero positivo che possiamo supporre grande a piacere, per

$$H > 2\left(M + \mathfrak{J}_{\overline{C}} + \frac{1}{2}\varepsilon(P^*, P^{**})\right),$$

otteniamo

$$\mathfrak{J}_{C_{n,m}} > M,$$

contrariamente alla prima delle (1).

È così provato che, per $m \to \infty$, P_m *tende* ad un punto determinato P^*.

Stabilito questo, osserviamo che, essendo l'integrale $\mathfrak{J}_C$ quasi-regolare positivo seminormale, è possibile ([9]) di determinare un numero $r > 0$ in modo che, per ogni punto P del campo A esistano due altri numeri p e q (generalmente variabili con P) tali da rendere soddisfatta la disuguaglianza

$$F(x, y, x', y') - (px' + qy') > 0,$$

per tutti i punti (x, y) di A appartenenti al cerchio (P, r) e per tutte le coppie x', y' verificanti l'uguaglianza $x'^2 + y'^2 = 1$. Indicheremo con p^* e q^* i numeri p e q relativi al punto P^*.

Supponiamo che il numero l considerato più sopra, sia minore della metà di r, e supponiamo pure che, per tutti gli m maggiori di un certo $\overline{m}$, P_m appartenga al cerchio (P^*, r'), con $r' < \frac{1}{3}r$. Fissato un qualunque $m > \overline{m}$, indichiamo con $C'_{n,m}$ la parte di $C_{n,m}$ composta degli archi $a^{(1)}_{n,m}$, $a^{(2)}_{n,m}$,..., $a^{(\overline{m})}_{n,m}$; con $C''_{n,m}$ quella composta di $a^{(\overline{m}+1)}_{n,m}$,..., $a^{(m)}_{n,m}$; e con $C'''_{n,m}$ la parte rimanente. In virtù della semicontinuità inferiore di $\mathfrak{J}_C$, per ogni n maggiore di un certo n', è

$$\mathfrak{J}_{C'_{n,m}} > \sum_{s=1}^{\overline{m}} \mathfrak{J}_{a^{(s)}} - 1.$$

Inoltre, se n' è sufficientemente grande, per $n > n'$, tutti gli archi $a^{(\overline{m}+1)}_{n,m}$,..., $a^{(m)}_{n,m}$ appartengono al cerchio (P^*, r), e detto $\varphi > 0$ il minimo della differenza

$$F(x, y, x', y') - (p^*x' + q^*y')$$

([8]) loc. cit. in ([5]), p. 269.

([9]) loc. cit. in ([5]), p. 239.

per tutti i punti (x, y) di A appartenenti al cerchio ora indicato e per $x'^2+y'^2=1$, si ha

$$\mathfrak{J}_{C''_{n,m}} - \int_{C''_{n,m}} (p^*x'+q^*y')ds \geqslant \varphi l(m-\overline{m}),$$

e quindi

$$\mathfrak{J}_{C''_{n,m}} \geqslant \varphi l(m-\overline{m}) - 2r\{|p^*|+|q^*|\}.$$

Infine, se r è stato scelto sufficientemente piccolo, e se n' è sufficientemente grande, per $n>n'$ si ha, analogamente alla (3),

$$\mathfrak{J}_{C'''_{n,m}} > -\mathfrak{J}_{\overline{C}} - 1.$$

Dunque, per ogni $n>n'$, è

$$\mathfrak{J}_{C_{n,m}} > \left[\sum_{s=1}^{\overline{m}} \mathfrak{J}_{a^{(s)}} - \mathfrak{J}_{\overline{C}} - 2 - 2r\{|p^*|+|q^*|\}\right] + \varphi l(m-\overline{m}).$$

Supponendo qui di aver scelto m in modo che l'espressione del secondo membro di questa disuguaglianza risulti maggiore di M, otteniamo, per ogni $n>n'$,

$$\mathfrak{J}_{C_{n,m}} > M$$

in contrasto con la prima delle (1). Questa contraddizione prova il teorema enunciato.

5. - Da quanto abbiamo dimostrato nel numero precedente, si deduce subito, nel solito modo ([10]), la seguente generalizzazione del teorema di CARATHÉODORY.

Se il campo A soddisfa alla condizione a) e l'integrale $\mathfrak{J}_C$ è quasi-regolare positivo, seminormale; se, inoltre, è sempre $\varepsilon(P, Q)>0$ qualunque siano i punti P e Q di A, purchè non coincidenti e tali che si possano congiungere fra loro con almeno una curva ordinaria; in ogni classe completa ([11]) *di curve ordinarie esiste il minimo (assoluto) di $\mathfrak{J}_C$.*

6. - Passiamo ora a generalizzare il teorema di HAHN, al quale abbiamo accennato nell'introduzione. A tal fine, dimostriamo la seguente proposizione:

Supponiamo che l'integrale $\mathfrak{J}_C$ sia quasi-regolare positivo seminormale e che le curve ordinarie C' che soddisfano alla disuguaglianza $\mathfrak{J}_{C'}\leqslant 0$ abbiano tutte lunghezza inferiore ad un numero fisso Λ. Allora, scelto comunque un numero M, hanno lunghezza inferiore ad un numero fisso anche tutte le curve ordinarie C che soddisfano alla disuguaglianza $\mathfrak{J}_C\leqslant M$ ([12]).

([10]) *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II, Cap. I.

([11]) loc. cit. in ([10]), p. 3.

([12]) Questa proposizione fu data da HAHN [loc. cit. in ([2])] con l'ipotesi supplementare che l'integrale $\mathfrak{J}_C$ sia anche semidefinito.

La proposizione è da dimostrarsi soltanto nel caso di $M>0$. Supponiamo dunque che, per un $M>0$, il teorema non sia vero. Sarà allora possibile di costruire una successione $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ di curve ordinarie soddisfacenti alle disuguaglianze

$$\mathfrak{J}_{C_n} \leqslant \frac{M}{n}, \qquad L_n > n,$$

L_n indicando ancora la lunghezza della curva C_n. Ed infatti, in caso contrario, dovrebbe esistere un intero positivo n_0 tale che ogni curva ordinaria $\overline{C}$, soddisfacente alla disuguaglianza $\mathfrak{J}_{\overline{C}} \leqslant M : n_0$, avesse lunghezza $\leqslant n_0$; e siccome ogni curva ordinaria C, soddisfacente alla $\mathfrak{J}_C \leqslant M$, può sempre decomporsi in un numero finito n' di archi su ciascuno dei quali il valore di $\mathfrak{J}$ risulti $\leqslant M : n_0$, e in modo che sia $n' \leqslant n_0$, ne verrebbe che la lunghezza della C sarebbe $\leqslant n_0^2$, vale a dire, inferiore ad un numero fisso, contrariamente a quanto abbiamo supposto.

Fissato un numero l, tale che $0 < l \leqslant 1$, mediante il procedimento indicato nel n.° 4 possiamo ottenere, per ogni intero positivo m, una successione di curve ordinarie $C_{1,m}, C_{2,m}, \ldots, C_{n,m}, \ldots$ in modo che sia sempre

$$\mathfrak{J}_{C_{n,m}} \leqslant \frac{M}{n+m}, \qquad L_{n,m} > n+m, \tag{4}$$

e che i successivi archi di $C_{n,m}$ di lunghezza $l : a^{(1)}_{n,m}, a^{(2)}_{n,m}, \ldots, a^{(m)}_{n,m}$ convergano uniformemente, per $n \to \infty$, ai rispettivi archi limiti $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$ (tutti di lunghezza $\leqslant l$), ognuno dei quali avrà il primo estremo coincidente col secondo estremo del precedente. Indichiamo ancora con Γ_m la curva avente per archi successivi $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(m)}$; chiamiamo poi $C'_{n,m}$ la parte della $C_{n,m}$ composta degli archi $a^{(1)}_{n,m}, a^{(2)}_{n,m}, \ldots, a^{(m)}_{n,m}$, e $C''_{n,m}$ la parte rimanente.

Mostriamo che è, per ogni m,

$$\mathfrak{J}_{\Gamma_m} \leqslant 0. \tag{5}$$

Infatti, se fosse, per un certo m, $\mathfrak{J}_{\Gamma_m} > 0$, dalla semicontinuità inferiore di $\mathfrak{J}_C$ (assicurata dal fatto che l'integrale è quasi-regolare positivo seminormale) risulterebbe, per ogni n maggiore di un certo $\overline{n}$,

$$\mathfrak{J}_{C'_{n,m}} > \frac{1}{2} \mathfrak{J}_{\Gamma_m},$$

e quindi, essendo

$$\mathfrak{J}_{C'_{n,m}} + \mathfrak{J}_{C''_{n,m}} = \mathfrak{J}_{C_{n,m}},$$

$$\mathfrak{J}_{C''_{n,m}} < \mathfrak{J}_{C_{n,m}} - \frac{1}{2} \mathfrak{J}_{\Gamma_m} \leqslant \frac{M}{n+m} - \frac{1}{2} \mathfrak{J}_{\Gamma_m},$$

e, per $\overline{n}$ sufficientemente grande,

$$\mathfrak{J}_{C''_{n,m}} < 0.$$

Ma, per essere $L''_{n,m} = L_{n,m} - L'_{n,m}$, $L'_{n,m} = ml$, dalla seconda delle (4) seguirebbe

$$L''_{n,m} > n + m - ml \geqslant n, \tag{6}$$

e si avrebbero così delle curve ordinarie, rendenti l'integrale $\mathfrak{J}$ negativo, e di lunghezza arbitrariamente grande, contro una delle ipotesi del nostro teorema. La (5) è dunque provata.

La lunghezza Λ_m di Γ_m è allora sempre $<\Lambda$, ed il secondo estremo P_{m+1} di Γ_m tende necessariamente ad un limite P^*.

Come già abbiamo osservato nel n.° 4, possiamo determinare tre numeri $r>0$, p^* e q^*, in modo da rendere soddisfatta la disuguaglianza

$$F(x, y, x', y') - \{p^* x' + q^* y'\} > 0$$

in tutti i punti (x, y) di A appartenenti al cerchio (P^*, r) e per $x'^2 + y'^2 = 1$. Rappresenteremo ancora con φ il minimo (>0) del primo membro della disuguaglianza scritta per tutti gli (x, y) e (x', y') indicati.

Essendo $\Lambda_m \leq \Lambda_{m+1} < \Lambda$, possiamo determinare un $\overline{m}$ tale che, per ogni $m > \overline{m}$, l'arco $\widehat{P_{\overline{m}+1} P_{m+1}}$ di Γ_m risulti di lunghezza minore di un numero positivo arbitrariamente prefissato, e sia quindi tutto contenuto nel cerchio $\left(P^*, \frac{1}{3} r\right)$. Per $m > \overline{m}$, indichiamo con $\overline{C}'_{n,m}$ la parte di $C'_{n,m}$ composta dagli archi $a^{(1)}_{n,m}$, $a^{(2)}_{n,m}, \ldots, a^{(\overline{m})}_{n,m}$, e con $\overline{C}''_{n,m}$ la parte rimanente. Supposto $m > \overline{m}$ e scelto un $\overline{n} > \Lambda$ e sufficientemente grande, dalla semicontinuità inferiore di $\mathfrak{J}_C$ abbiamo, per ogni $n > \overline{n}$,

$$\mathfrak{J}_{\overline{C}'_{n,m}} > \mathfrak{J}_{\Gamma_{\overline{m}}} - 1\,;$$

abbiamo inoltre, sempre per ogni $n > \overline{n}$, che $\overline{C}''_{n,m}$ è tutta contenuta nel cerchio (P^*, r) e che vale pertanto la disuguaglianza

$$\mathfrak{J}_{\overline{C}''_{n,m}} - \int\limits_{\overline{C}''_{n,m}} \{p^* x' + q^* y'\}\, ds \geq \varphi l(m - \overline{m}),$$

ossia

$$\mathfrak{J}_{\overline{C}''_{n,m}} \geq \varphi l(m - \overline{m}) - 2r\,\{|p^*| + |q^*|\}.$$

Infine, in virtù della (6), abbiamo $L''_{n,m} \geq n > \overline{n} > \Lambda$, onde, per una delle ipotesi del nostro teorema,

$$\mathfrak{J}_{C''_{n,m}} > 0.$$

Otteniamo così che, fissato un $m > \overline{m}$, per ogni n maggiore di un certo $\overline{n}$, è

$$\mathfrak{J}_{C_{n,m}} > \mathfrak{J}_{\Gamma_{\overline{m}}} - 1 - 2r\,\{|p^*| + |q^*|\} + \varphi l(m - \overline{m})\,;$$

e supponendo di aver fissato m in modo che l'espressione del secondo membro di questa disuguaglianza risulti $> M$, ne viene

$$\mathfrak{J}_{C_{n,m}} > M,$$

contro la prima delle (4). Con ciò il teorema enunciato è provato completamente.

7. - La proposizione or ora stabilita conduce subito (anche qui nel solito modo) alla seguente generalizzazione del teorema di HAHN:

Se l'integrale $\mathfrak{I}_C$ è quasi-regolare positivo seminormale e se le curve ordinarie C' che verificano la disuguaglianza $\mathfrak{I}_{C'} \leqslant 0$ hanno tutte lunghezza inferiore ad un numero fisso, in ogni classe completa di curve ordinarie esiste il minimo (assoluto) di $\mathfrak{I}_C$.

8. - Ciò che abbiamo provato nel n.° 4 mostra che, *supposte soddisfatte le ipotesi del teorema del n.° 5, risultano soddisfatte anche quelle del teorema del n.° 7.*

Viceversa, *ammesso che il campo A verifichi la condizione a), e supposte soddisfatte le ipotesi del teorema del n.° 7, risultano soddisfatte anche quelle del teorema del n.° 5.* Infatti, se, per una coppia di punti distinti di A, P e Q, fosse $\varepsilon(P, Q) \leqslant 0$, esisterebbe una successione $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ di curve ordinarie chiuse, tutte passanti per ambedue i punti P e Q, e tali che $\mathfrak{I}_{C_n} \to \varepsilon(P, Q) \leqslant 0$. Per ogni n maggiore di un certo $\bar{n}$, si avrebbe allora

$$\mathfrak{I}_{C_n} < \varepsilon(P, Q) + 1,$$

e, per la proposizione del n.° 6, le lunghezze delle C_n risulterebbero tutte inferiori ad un numero fisso. Le C_n ammetterebbero, pertanto, almeno una curva C^* di accumulazione, chiusa e passante per P e Q, come tutte le C_n. In virtù della semicontinuità inferiore di $\mathfrak{I}_C$ e della $\mathfrak{I}_{C_n} \to \varepsilon(P, Q) \leqslant 0$, ne verrebbe $\mathfrak{I}_{C^*} = \varepsilon(P, Q) \leqslant 0$, e quindi, chiamando C^*_m la curva composta di m archi tutti uguali alla C^*, $\mathfrak{I}_{C^*_m} \leqslant 0$, con C^*_m curva di lunghezza grande a piacere con m, contro una delle ipotesi del teorema del n.° 7. È perciò sempre $\varepsilon(P, Q) > 0$ e la nostra affermazione è provata.

9. - Veniamo, infine, ad occuparci degli integrali *incompletamente regolari positivi* ([13]). Seguendo un metodo, da noi già introdotto nei nostri « *Fondamenti....* », il caso di questi integrali si può trattare utilizzando i risultati stabiliti nei numeri precedenti per gli integrali quasi-regolari positivi seminormali. A tal fine, occorre servirsi di un integrale ausiliare

$$\mathfrak{F}_C = \int_C G(x, y, x', y')\, ds,$$

definito alla pag. 193 del Vol. II dei « *Fondamenti....* », integrale che è quasi-regolare positivo seminormale, con $G(x, y, x', y') \leqslant F(x, y, x', y')$. Per questo $\mathfrak{F}_C$ (supponendo $\mathfrak{I}_C$ incompletamente regolare positivo) vale il seguente lemma:

([13]) loc. cit. in ([10]), p. 192. Per simili integrali si ha la possibilità di costruire, intorno a ciascun punto *interno al campo A*, quel campo di estremali a cui abbiamo accennato nell'introduzione; l'estensione ad essi del teorema del CARATHÉODORY è quindi contenuta nel lavoro citato in ([1]) dello stesso CARATHÉODORY.

Se C è una curva ordinaria tutta composta di punti interni al campo A, preso un $\eta > 0$, ad arbitrio, si può sempre costruire un' altra curva ordinaria C', avente gli stessi estremi della C, contenuta in A, appartenente ordinatamente all' intorno (η) della C, di lunghezza $L' > L - \eta$, e tale che sia

$$\mathfrak{J}_{C'} = \mathfrak{F}_{C'} \leq \mathfrak{F}_C .$$

La dimostrazione di questo lemma si ottiene suddividendo la C in n archi $\widehat{P_r P_{r+1}}$ $(r = 1, 2, ..., n-1)$, tutti della stessa lunghezza, e nel sostituire ad ogni arco $\widehat{P_r P_{r+1}}$ la curva minimante $\mathfrak{F}$ fra tutte le curve ordinarie che hanno il primo estremo in P_r ed il secondo in P_{r+1}, e che giacciono interamente nel cerchio (P_r, η'), con $\eta' < \eta : 2$. Per η' sufficientemente piccolo ed n sufficientemente grande, questo cerchio risulta composto tutto di punti del campo A, la curva minimante indicata esiste ed è unica, e su di essa gli integrali $\mathfrak{F}$ e $\mathfrak{J}$ assumono lo stesso valore ([14]). La nuova curva C', che così si viene a costruire, soddisfa, se n è sufficientemente grande, alle condizioni indicate nel lemma.

10. - In quello che segue indicheremo con A_0 un campo chiuso, tutto costituito di punti interni ad A e tale che sia possibile di determinare un numero positivo δ in modo che tutte le *estremaloidi semplici* ([15]) relative alla funzione $F(x, y, x', y')$, che congiungono due punti qualsiasi P e Q di A_0 e che giacciono nel cerchio (P, δ), appartengano interamente al campo A_0. Indicheremo poi con $\varepsilon_0(P, Q)$ il numero analogo a $\varepsilon(P, Q)$, ma relativo soltanto alle curve ordinarie che giacciono interamente in A_0.

11. - Con queste premesse, abbiamo:

Se $\mathfrak{J}_C$ è un integrale incompletamente regolare positivo, e se è sempre $\varepsilon_0(P, Q) > 0$, qualunque siano i punti distinti P e Q del campo A_0, purchè fra loro congiungibili mediante una curva ordinaria tutta appartenente ad A_0:

a) fissato comunque un numero M, le lunghezze delle curve ordinarie C di A_0, che soddisfano alla $\mathfrak{J}_C \leq M$, restano tutte inferiori ad un numero fisso;

b) nella classe K di tutte le curve ordinarie di A_0 che uniscono due punti dati P e Q, esiste il minimo (assoluto) di $\mathfrak{J}_C$.

Indichiamo, infatti, con $\varepsilon_0^*(P, Q)$ l' analogo di $\varepsilon_0(P, Q)$, relativamente all' integrale $\mathfrak{F}$. È immediatamente $\varepsilon_0^*(P, Q) \leq \varepsilon_0(P, Q)$, e per il lemma del n.° 9, $\varepsilon_0^*(P, Q) = \varepsilon_0(P, Q)$. Pertanto, dalla $\varepsilon_0(P, Q) > 0$ segue $\varepsilon_0^*(P, Q) > 0$; e siccome è $\mathfrak{F}_C \leq \mathfrak{J}_C$, il teorema del n.° 4, applicato a $\mathfrak{F}$ ed al campo A_0, dà la proprietà a).

Per la $\mathfrak{F}_C \leq \mathfrak{J}_C$ e per il lemma del n.° 9, nella classe K i limiti inferiori

---

([14]) Ciò risulta da quanto è detto nel n.° 62 dei « *Fondamenti....* », Vol. II.

([15]) « *Fondamenti....* », Vol. II, p. 189.

di $\mathfrak{J}$ e di $\mathfrak{F}$ coincidono; e siccome dal teorema del n.° 5 segue l'esistenza di almeno una curva C_0 minimante per $\mathfrak{F}$ in K, ed ancora per il lemma del n.° 9 esiste una curva C_0' tale che $\mathfrak{J}_{C_0'} = \mathfrak{F}_{C_0'} = \mathfrak{F}_{C_0}$, ne viene l'esistenza del minimo (assoluto) di $\mathfrak{J}_C$ in K.

12. - Abbiamo pure:

Se $\mathfrak{J}_C$ è un integrale incompletamente regolare positivo e se le curve ordinarie C', di A_0, che soddisfano alla $\mathfrak{J}_{C'} \leq 0$ hanno tutte lunghezza inferiore ad un numero fisso Λ:

a) scelto comunque un numero M, hanno lunghezza inferiore ad un numero fisso anche tutte le curve ordinarie di A_0 che verificano la $\mathfrak{J}_C \leq M$;

b) nella classe K di tutte le curve ordinarie di A_0 che uniscono due punti dati P e Q, esiste il minimo (assoluto) di $\mathfrak{J}_C$ (16).

Dalle ipotesi ora fatte, segue, per il lemma del n.° 9 e per le condizioni poste, nel n.° 10, relativamente al campo A_0, che, se C è una curva ordinaria di A_0 soddisfacente alla $\mathfrak{F}_C \leq 0$, esiste una curva ordinaria C' di A_0 tale che $\mathfrak{J}_{C'} = \mathfrak{F}_{C'} \leq \mathfrak{F}_C \leq 0$, con $L' > L - 1$. E siccome è $L' < \Lambda$, risulta $L < \Lambda + 1$. Il teorema del n.° 6, applicato a $\mathfrak{F}$ ed al campo A_0, dà perciò la proprietà *a*).

La proprietà *b*) si stabilisce come nel n.° 11.

Osservazione. Il teorema qui dimostrato e quello del n.° 11 non valgono per una qualunque classe K completa di curve ordinarie di A_0. Così pure gli stessi teoremi possono cadere in difetto se il campo A_0 non soddisfa alle condizioni indicate nel n.° 10.

13. - Analogamente a quanto abbiamo detto nel n.° 8, *supposte verificate le ipotesi del teorema del n.° 11, risultano soddisfatte anche quelle del teorema del n.° 12, e viceversa.* Ragionando come nel n.° 8, ed essendo $\mathfrak{F}_{C_n} \leq \mathfrak{J}_{C_n}$, con $\mathfrak{J}_{C_n} \to \varepsilon_0(P, Q) \leq 0$, per la semicontinuità inferiore di $\mathfrak{F}$, si avrebbe $\mathfrak{F}_{C^*} \leq 0$. Per il lemma del n.° 9, esisterebbe dunque una curva C', ordinaria, di A_0, chiusa e passante per P e Q, e tale che $\mathfrak{J}_{C'} = \mathfrak{F}_{C'} \leq \mathfrak{F}_{C^*} \leq 0$, il che è impossibile per la ragione già detta nel n.° 8.

14. - *Osservazione.* Procedendo col metodo costantemente seguito nei nostri « *Fondamenti....* », tutti i ragionamenti del presente lavoro si rendono indipendenti dal postulato di ZERMELO.

---

(16) Proposizioni analoghe a quelle dei n.i 11 e 12 valgono anche per il problema con uno o con ambedue gli estremi mobili.