ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

NICULAE ABRAMESCO

Le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 1-2 (1932), p. 155-164

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_155_0>

LE MOUVEMENT D'UNE FIGURE PLANE VARIABLE QUI RESTE SEMBLABLE À ELLE MÊME

par NICULAE ABRAMESCO (Cluj).

1. - Introduction. — L'un des plus simples des mouvements des corps déformables est le mouvement d'une figure variable avec conservation de similitude dans le rapport ϱ qui est une fonction du temps. Dans le cas $\varrho=1$, on a la Cinématique classique. Nous étudions le mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle même [1]. Nous montrons qu'il existe un centre I instantané de mouvement (point de vitesse nulle à l'instant t) analogue au centre

---

[1] Voir ma Note: *Sur le mouvement d'une figure plane variable avec conservation de similitude.* Comptes Rendus, t. 192 (1931), pp. 918-920.

Voir pour la bibliographie.

1. MANNHEIM, Nouvelles Annales de Math., 1857, p. 322.
2. DURANDE, Ibid., 1867, p. 80.
3. VIENER: *Sul moto di una figura piana che, mantenendosi simile a se stessa, scorre contro delle sue rette sopra tre punti fissi.* Annali di Matem., serie 2, t. I, 1868, p. 139.
4. LEMOINE, Nouvelles Annales de Math., 1873, p. 386.
5. SCHUMANN: *Beitrage zur Kinematik ähnlich-veränderlicher und affin-veränderlicher Gebilde.* Zeitschrift für Mat. und Physik, 1881, pp. 157-178.
6. ELLIOT, London Mat. Soc. Proc., 14 (1882), p. 62.
7. FORMENTI: *Dinamica dei sistemi che si muovono conservandosi affini a se stessi.* Lomb. Ist. Rend. Milano, (2), 1886.
8. BURMESTER, Kinematik, 1886, vol. I, p. 62.
9. NEUBERG, Liège, Mémoires, (2), 16 (1889), p. 12.
10. MORLEY, Quart of Math., 24 (1890), p. 359.
11. KLEIBER: *Die Amsler'schen Fläschensätze im Gebiete affin-veränderlicher Systeme und auf den Fläschen constanter Gauss'scher Krümmung.* Archiv. der Mat. und Physik, 1896, pp. 405-435.
12. CLUZEAU: *Sur le déplacement d'une figure qui reste semblable à elle même.* Bull. math. spéc., 1900, pp. 69-70.
13. SOMOFF: *Ueber einige Gelenk systeme mit ähnlich-veränderlichen Elementen.* Zeit. für Math. und Physik, 49, 1903, pp. 25-61.
14. RÉVEILLE: *Étude synthétique et analytique du déplacement d'un système qui reste semblable à lui même.* Thèse, Paris, Challamel, 1905.
15. BICKART: *Sur le mouvement d'une figure plane semblable à une figure donnée.* Revue de Math. Spéciales, 1906, pp. 418-423.

instantané de rotation pour une figure de forme invariable. Ce mouvement est déterminé par trois points guides A, B, C, et le centre I est le point commun aux trois cercles circonscrits aux triangles formés par chacun des côtés AB, BC, CA avec les tangentes aux trajectoires de ses extremités. Les lignes de courant sont des spirales logarithmiques, et les droites qui coupent, à un instant donné, sous un angle constant v, donné par la ligne de courant à ce moment, les trajectoires de divers points de la figure en mouvement, concourent au centre I.

La base et la roulante, les courbes lieux du point I sur le plan fixe et sur le plan de la figure mobile, sont tangente en I, et les vitesses du point I sur cettes courbes sont dans le rapport de similitude ϱ.

Nous trouvons les composantes de l'accélération du point M de la figure mobile, sur IM, sur la perpendiculaire à IM et la troisième composante qui fait l'angle v avec la tangente à la base.

On obtient les projections de l'accélération sur la tangente en M (qui fait l'angle v avec IM), sur la normale en M; on trouve un cercle des inflexions

---

16. BICKART: *Mouvement d'une figure plane semblable à une figure donnée.* Revue de Math. Spéciales, 1906, pp. 546-548.

17. BURMESTER: *Kinetographische Verwandschaft ebener und räumlichen Systeme.* 1907, Münch. Berich., 37, 17-32.

18. MULLER: *Polbestimmung für Verzweigungslagen bei der bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems in seine Ebene.* Deutsche Math. Ver., 1907, pp. 242-243.

19. MULLER: *Über die Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems.* Deutsche Math. Ver., 1910, pp. 29-89.

20. MULLER: *Über die Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems.* Deutsche Math. Ver., 1910, pp. 147-154.

21. KRAUSE: *Zur Theorie der ebenen ähnlich-veränderlichen Systeme.* Deutsche Math. Ver., 1910, pp. 327-339.

22. HARTMANN: *Momentanbewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems.* Diss. Rostock.

23. HERRMANN: *Über die einförmige Bewegung des ebenen Kreisverwandt-veränderlichen Systems.* Diss. Techn. Hochsch., Dresden, 1913.

24. CARL: *Zur Theorie der ebenen ähnlich veränderlichen Systeme.* Diss. Dresden, 1914.

25. KOENIGS: *Recherches sur les mouvements plans à deux paramètres.* Comptes Rendus, t. 163, pp. 511-514, 603-606, 658-670 (1916); Bull. des Sciences Math., (2) 41, pp. 120-127, 153-164, 181-196 (1917).

26. J. LEMAIRE: *Sur l'égalité el la similitude des figures planes.* Revue de l'enseignement des sciences (1919, librairie Alcan).

27. APPELL: *Sur un théorème de Joseph Bertrand rélatif à la Cinématique des milieux continus.* Bull. des Sciences Math., 1917, pp. 23-28.

28. N. ABRAMESCO: *Sur le mouvement des figures planes variables avec conservation de similitude ou d'aire.* Bull. math. de la Société roumaine des sciences, t. 26, 1924, pp. 1-29.

29. N. ABRAMESCO: *Sur le centre instantané de mouvement d'une figure plane variable qui reste semblable à elle-même.* Nouvelles Annales de Math., février 1926, sixième série, t. I, pp. 132-133.

tangent à la base en I, un centre des accélérations. Enfin, nous donnons une méthode géométrique simple pour la construction du centre de courbure en M à la courbe décrite par M.

2. - Les équations du mouvement. — xOy étant le plan fixe et $x_1O_1y_1$ le plan de la figure mobile, les équations du mouvement sont

$$(1)\qquad \begin{aligned} x&=\alpha+\varrho(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta),\\ y&=\beta+\varrho(x_1\sin\theta+y_1\cos\theta),\end{aligned}$$

où α, β, ϱ sont fonctions de θ, et θ dépende du temps t.

D'où

$$(2)\qquad \begin{aligned} x_1&=\frac{1}{\varrho}(x-\alpha)\cos\theta+\frac{1}{\varrho}(y-\beta)\sin\theta,\\ y_1&=-\frac{1}{\varrho}(x-\alpha)\sin\theta+\frac{1}{\varrho}(y-\beta)\cos\theta.\end{aligned}$$

De (1), on a

$$\frac{dx}{dt}=\left[\frac{d\alpha}{d\theta}+\frac{d\varrho}{d\theta}(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)+\varrho(-x_1\sin\theta-y_1\cos\theta)\right]\frac{d\theta}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt}=\left[\frac{d\beta}{d\theta}+\frac{d\varrho}{d\theta}(x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)+\varrho(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)\right]\frac{d\theta}{dt}.$$

Observant (1), on obtient

$$\frac{dx}{dt}=\left[\frac{d\alpha}{d\theta}+\frac{1}{\varrho}(x-\alpha)\frac{d\varrho}{d\theta}-(y-\beta)\right]\omega,$$
$$\frac{dy}{dt}=\left[\frac{d\beta}{d\theta}+\frac{1}{\varrho}(y-\beta)\frac{d\varrho}{d\theta}+(x-\alpha)\right]\omega,\qquad \omega=\frac{d\theta}{dt},$$

ou

$$(3)\qquad \begin{aligned} u(x,y)&=\frac{dx}{dt}=\left[\frac{d\alpha}{d\theta}-\frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta}+\beta-y+\frac{x}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta}\right]\omega,\\ v(x,y)&=\frac{dy}{dt}=\left[\frac{d\beta}{d\theta}-\frac{\beta}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta}-\alpha+x+\frac{y}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta}\right]\omega.\end{aligned}$$

3. - Centre instantané de mouvement. — Le point de vitesse nulle, le centre instantané de mouvement I, a sur le plan fixe les coordonnées X, Y, données par

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{d\alpha}{d\theta}-\frac{\alpha}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta}+\beta-Y+X\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta}=0,\\ &\frac{d\beta}{d\theta}-\frac{\beta}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta}-\alpha+X+Y\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta}=0.\end{aligned}$$

D'où

$$(5)\qquad X=\alpha-\xi,\qquad Y=\beta+\eta,$$

$$(6)\qquad \xi=\frac{\alpha' l+\beta'}{1+l^2},\qquad \eta=\frac{\alpha'-\beta' l}{1+l^2},\qquad \alpha'=\frac{d\alpha}{d\theta},\qquad \beta'=\frac{d\beta}{d\theta},\qquad l=\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\theta}.$$

Retranchant de (3) les équations (4) multipliées par ω, on a

$$(7)\qquad \begin{aligned} u(x,y)&=\frac{dx}{dt}=-(y-Y)\omega+(x-X)k,\\ v(x,y)&=\frac{dy}{dt}=(x-X)\omega+(y-Y)k,\qquad k=\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}.\end{aligned}$$

Il résulte que la vitesse du point $M(x, y)$ est la résultante: 1° d'un déplacement, provenant d'une rotation, ω, autour du centre $I(X, Y)$; 2° d'un déplacement, provenant d'une amplification, k, qui est une déformation pure.

Les *lignes de courant* sont données par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{u(x,y)} = \frac{dy}{v(x,y)}, \qquad \frac{dx}{-(y-Y)\omega+(x-X)k} = \frac{dy}{(x-X)\omega+(y-Y)k}$$

ou

$$\frac{dx}{-(y-Y)+(x-X)l} = \frac{dy}{(x-X)+(y-Y)l}, \qquad k = l\omega.$$

Posant $x-X=x_0$, $y-Y=y_0$, c'est-à-dire déplaçant les axes Ox, Oy en $I(X, Y)$, l'équation différentielle devient

$$\frac{dx_0}{-y_0+lx_0} = \frac{dy_0}{x_0+ly_0},$$

et intégrant, on a $\log\sqrt{x_0^2+y_0^2} = l\cdot \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0} + \text{const.}$ Posant $x_0 = r\cos\varphi$, $y_0 = r\sin\varphi$, $r = IM$, on obtient

$$r = e^{l(\varphi-\varphi_0)}, \tag{8}$$

ce qui montre que les lignes de courant sont des *spirales logarithmiques.*

Donc, l'angle v formé par la tangente en M à la courbe (M) décrite par M avec IM est donné par $\operatorname{tg} v = r:\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) = \frac{1}{l} = \frac{\varrho}{\varrho'}$, $\varrho' = \frac{d\varrho}{d\theta}$. Par conséquent, *les droites qui coupent, à l'instant t, sous un angle constant v, trouvé plus haut, les trajectoires de divers points de la figure en mouvement, concourent au centre instantané I.*

4. - **Interprétation géométrique du mouvement.** — I. On peut obtenir les mêmes résultats par des considérations géométriques. En effet, AB et A_1B_1 étant deux droites homologues des figures semblables F et F_1, désignons par P l'intersection des droites AB et A_1B_1. I étant le point commun aux cercles PAA_1, PBB_1, on voit que les triangles IAB, IA_1B_1 sont semblables. Désignant par Q l'intersection des droites AA_1, BB_1, il résulte que le point I est aussi à l'intersection des cercles QAB, QA_1B_1 et que ce point est le point de MIQUEL du quadrilatère ABB_1A_1. Cela posé, soit AC un élément rectiligne de la figure F et construisons, dans la figure F_1, le point C_1, tel que les triangles IAC, IA_1C_1 soient semblables. Alors, $AC:A_1C_1 = IA:IA_1 = AB:A_1B_1 = \text{const.}$, et donc le point C_1 est dans la figure F_1 l'homologue de C de la figure F. On passe donc de C à C_1, donnant au segment IC une rotation autour de I, d'un angle $CIC_1 = AIA_1 = \text{const.}$, et amplifiant ce segment dans le rapport $IC:IC_1 = IA:IA_1 = \text{const.}$ Procédant de la même manière, on peut construire tous les points de la figure F_1, homologues des points de la figure F, et l'on voit que le point I est le point double des figures F et F_1. On passe donc de la figure F

à la figure F_1, avec une rotation d'un angle autour du point I et une amplification dans un rapport constant. I est le centre instantané des deux figures.

II. Considérons à présent une figure F variable, qui reste semblable à elle même. Soient (A), (B), (C) les courbes décrites par trois points guides A, B, C de la figure F. $A_1B_1C_1$ étant la position infiniment voisine du triangle ABC, les droites AA_1, BB_1, CC_1 tendent vers les tangentes en A, B, C aux courbes (A), (B), (C). Le point double I, le centre instantané de mouvement, au moment considéré en ABC, est à l'intersection des cercles circonscrits aux triangles formés par chacun des côtés AB, BC, CA avec les tangentes aux trajectoires (A), (B), (C) de ses extremités.

M et M_1 étant deux points homologues des figures F et F_1, on voit que les angles $IMM_1 = IAA_1 = \text{const.} = v$; MM_1, AA_1 tendent vers les tangentes MT, AS en M et A aux courbes (M), (A) décrites par M et A. Donc, les angles $IMT = IAS = \text{const.}$, et par conséquent la tangente en un point M de la figure F, à la courbe décrite par M, fait un angle constant avec la droite IM; ou, les droites qui coupent à l'instant t, sous un angle constant, convenablement choisi, les trajectoires des divers points de la figure en mouvement, concourent au point I. On peut de même construire la tangente [2] en un point M de la figure F, à la courbe (M). Les lignes de courant au moment t, ou les courbes tangentes en M aux courbes (M), sont telles que la tangente en M fait un angle constant avec le rayon vecteur IM et donc sont des spirales logarithmiques.

III. Le point I étant aussi à l'intersection des cercles PAA_1 et PBB_1, et comme P tend vers le point γ de contact de AB avec son enveloppe (γ), on voit que le centre instantané I de mouvement, au moment considéré, est le point de rencontre des cercles passant par γ et tangents respectivement en A et B aux courbes (A) et (B). AS étant la tangente en A à (A), on voit que les angles $I\gamma A = IAS$ et donc le point de contact γ d'une droite AB avec son enveloppe est l'intersection de cette droite avec celle menée par I telle que l'angle $I\gamma A = IAS$, AS étant la tangente en A à (A).

5. - Base et roulante. — Les coordonnées (X_1, Y_1) du point I sur le plan mobile sont données par (2) où nous remplaçons x, y avec X, Y; on a

$$X_1 = -\frac{\xi}{\varrho}\cos\theta + \frac{\eta}{\varrho}\sin\theta,$$
$$Y_1 = \frac{\xi}{\varrho}\sin\theta + \frac{\eta}{\varrho}\cos\theta. \tag{9}$$

Le point $I(X, Y)$ décrit sur le plan fixe la base (Γ), et sur le plan mobile $I(X_1, Y_1)$ décrit la roulante (Γ_1), leurs équations étant données par (5) et (9).

---

[2] Voir, pour une autre méthode, MANNHEIM: *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 15, 1894.

Les projections sur les axes fixes de la vitesse de I sur la base (Γ) sont obtenues de (5),

$$\frac{dX}{dt}=(\alpha'-\xi')\frac{d\theta}{dt},\qquad \frac{dY}{dt}=\left(\frac{d\beta}{d\theta}+\frac{d\eta}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}. \tag{10}$$

Les projections sur les axes mobiles de la vitesse de I sur la roulante (Γ_1) sont données par (9),

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt}&=\left(-\frac{\xi'}{\varrho}\cos\theta+\frac{\xi}{\varrho^2}\varrho'\cos\theta+\frac{\xi}{\varrho}\sin\theta+\frac{\eta'}{\varrho}\sin\theta-\frac{\eta}{\varrho^2}\varrho'\sin\theta+\frac{\eta}{\varrho}\cos\theta\right)\frac{d\theta}{dt},\\ \frac{dY_1}{dt}&=\left(\frac{\xi'}{\varrho}\sin\theta-\frac{\xi}{\varrho^2}\varrho'\sin\theta+\frac{\xi}{\varrho}\cos\theta+\frac{\eta'}{\varrho}\cos\theta-\frac{\eta}{\varrho^2}\varrho'\cos\theta-\frac{\eta}{\varrho}\sin\theta\right)\frac{d\theta}{dt}. \end{aligned} \tag{11}$$

Les projections de la même vitesse sur les axes fixes sont

$$\frac{\delta X_1}{dt}=\frac{dX_1}{dt}\cos\theta-\frac{dY_1}{dt}\sin\theta,\qquad \frac{\delta Y_1}{dt}=\frac{dX_1}{dt}\sin\theta+\frac{dY_1}{dt}\cos\theta.$$

Opérant sur les rélations (11), on trouve pour les projections

$$\frac{\delta X_1}{dt}=\frac{\theta'}{\varrho}(-\xi'+\eta+\xi l),\qquad \frac{\delta Y_1}{dt}=\frac{\theta'}{\varrho}(\xi-\eta l+\eta'),\qquad \theta'=\frac{d\theta}{dt}.$$

Remplaçant ξ, η par leurs valeurs (6), on obtient

$$\frac{\delta X_1}{dt}=\frac{\theta'}{\varrho}(-\xi'+\alpha'),\qquad \frac{\delta Y_1}{dt}=\frac{\theta'}{\varrho}(\eta'+\beta').$$

Comparant avec les relations (10), il résulte

$$\frac{dX}{dt}=\varrho\frac{\delta X_1}{dt},\qquad \frac{dY}{dt}=\varrho\frac{\delta Y_1}{dt},$$

c'est-à-dire, les projections sur les axes fixes des vitesses du point I sur la base (Γ) et la roulante (Γ_1) sont proportionnelles dans le rapport ϱ. Donc la base et la roulante sont tangentes au centre instantané de mouvement I et les vitesses du point I sur ces courbes sont dans le rapport ϱ.

EXEMPLE. - Considérons le mouvement de la figure variable, avec conservation de similitude, à laquelle appartient la droite BC passant par le point fixe A de la bissectrice de l'angle donné xOy, qui rencontre les côtés de l'angle en B et C. L'enveloppe de BC étant le point A, les courbes décrites par B et C étant Ox et Oy, le centre instantané de mouvement est à l'intersection des cercles passant par A et tangents respectivement en B et C aux droites Ox et Oy. Le lieu du point I, la base, est une quartique piriforme [3], symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle xOy, ayant en O un point de rebroussement, tangente aux côtés de l'angle, passant par le symetrique de O par rapport à A

[3] Considérée par WALLIS, étudiée par OSSIAN BONNET (Nouvelles Annales, 1884), BROCARD (1880), et, dans notre cas particulier, par HUYGENS (1657) (voir GOMES TEIXEIRA: *Traité des courbes spéciales remarquables*, t. I, Coïmbre, 1908, p. 289).

où la tangente est perpendiculaire à la bissectrice. L'angle $BIC=BIA+AIC=$ $=ABO+ACO=\sphericalangle xOy=90^{\circ}$, étant droit, I appartient au cercle OBC, qui est la roulante. En cherchant l'enveloppe de ce cercle, on trouve la base, la quartique piriforme. Cette courbe peut être obtenue aussi comme la podaire d'une hyperbole equilatère par rapport à un de ses sommets.

6. - L'accélération d'un point de la figure mobile. — I. Les projections de la vitesse d'un point $M(x, y)$ étant données par (7), celles de l'accélération sont

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}&=-\omega'(y-Y)-\omega\frac{dy}{dt}+\omega\frac{dY}{dt}+k'(x-X)+k\frac{dx}{dt}-k\frac{dX}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\omega'(x-X)+\omega\frac{dx}{dt}-\omega\frac{dX}{dt}+k'(y-Y)+k\frac{dy}{dt}-k\frac{dY}{dt}.\end{aligned}$$

À l'instant t on peut prendre comme nouvelle origine le point $I(X, Y)$, comme axe des x la tangente en I à la base et comme axe des y la normale en I. Dans ces conditions, on a $X=0$, $Y=0$, $\frac{dX}{dt}=\frac{dS}{dt}$, S étant l'arc de la base.

Observant (7) et (12), on déduit

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}&=-\omega'y+k'x-\omega\frac{dy}{dt}+k\frac{dx}{dt}-k\frac{dS}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\omega'x+k'y+\omega\frac{dx}{dt}+k\frac{dy}{dt}-\omega\frac{dS}{dt}.\end{aligned}$$

Remplaçant $\frac{dx}{dt}=-\omega y+kx$, $\frac{dy}{dt}=\omega x+ky$, on trouve

$$(13)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}&=-py+qx-k\frac{dS}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=px+qy-\omega\frac{dS}{dt},\end{aligned}$$

$$p=\omega'+2k\omega,\qquad q=k'+k^2-\omega^2.$$

Désignant par r et φ les coordonnées polaires de M, on a $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, la spirale logarithmique la courbe de courant en M a l'équation (8) $r=e^{l\varphi}$, et l'angle v de la tangente en M avec IM est donné par

$$\operatorname{tg} v=r:\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)=\frac{1}{l},\qquad k=l\omega,\qquad k=\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{dt}.$$

Les formules (13) deviennent

$$(14)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}&=-pr\sin\varphi+qr\cos\varphi-k\frac{dS}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=pr\cos\varphi+qr\sin\varphi-\omega\frac{dS}{dt},\end{aligned}$$

ce qui montre que l'accélération du point M est la somme de trois composantes: la première $\overrightarrow{MA}$ dirigée sur IMA de grandeur $q\cdot r=q\cdot IM$; la deuxième $\overrightarrow{MB}$ dirigée sur la perpendiculaire MB sur MA (l'angle AMB en sens direct) de grandeur $p \cdot r = p \cdot IM$; la troisième composante $\overrightarrow{MC}$, ayant comme projections sur les axes $-k\frac{dS}{dt}$, $-\omega\frac{dS}{dt}$, est parallèle à la droite IW située dans l'angle xIy, telle que $\operatorname{tg} xIW = \left(\omega\frac{dS}{dt}\right):\left(k\frac{dS}{dt}\right) = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{l\omega} = \frac{1}{l} = \operatorname{tg} v$; donc cette troisième composante de l'accélération de M est dirigée en sens contraire sur la droite qui fait l'angle v avec la tangente à la base, et de grandeur $\sqrt{k^2+\omega^2}\frac{dS}{dt}$.

II. On trouve aussi un *point d'accélération nulle*, de coordonnées

$$X' = \frac{p\omega + qk}{p^2+q^2}\frac{dS}{dt}, \qquad Y' = \frac{q\omega - kp}{p^2+q^2}\frac{dS}{dt},$$

données par (13)

$$-pY' + qX' - k\frac{dS}{dt} = 0, \qquad pX' + qY' - \omega\frac{dS}{dt} = 0.$$

En retranchant ces équations de (13), on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -p(y-Y') + q(x-X'),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = p(x-X') + q(y-Y').$$

Donc, l'accélération d'un point $M(x, y)$ est la résultante: 1° d'un déplacement provenant d'une rotation p autour du *centre d'accélération*, le point d'accélération nulle (X', Y'); 2° d'un déplacement provenant d'une amplification q; une opération analogue à celle avec conservation de similitude, qui a eu lieu pour la vitesse, aussi comme l'accélération.

7. - Les projections de l'accélération sur la tangente et sur la normale à la courbe décrite par un point. — On voit que la tangente MT en M à la courbe (M) fait avec la droite IMA l'angle v, IMA fait avec Ix l'angle φ, donc l'angle de MT avec Ix est $v+\varphi$. Comme le prolongement de MC avec Ix fait l'angle v, il résulte que l'angle de CM (prolongement de MC) avec MT est φ. Donc, les projections de l'accélération du point $M(x, y)$ sur la tangente MT en M et sur la normale MN (dirigée vers le centre de courbure) sont

$$\overrightarrow{MT}, \qquad \gamma_t = qr\cos v + pr\sin v - \sqrt{k^2+\omega^2}\frac{dS}{dt}\cos\varphi,$$
$$\overrightarrow{MN}, \qquad \gamma_n = -qr\sin v + pr\cos v + \sqrt{k^2+\omega^2}\frac{dS}{dt}\sin\varphi.$$

Comme $\operatorname{tg} v = \frac{1}{l} = \frac{\omega}{k}$, $\sin v = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+k^2}}$, $\cos v = \frac{k}{\sqrt{\omega^2+k^2}}$, les projections de l'accélération sur la tangente MT et la normale MN sont

$$(15) \qquad \gamma_t = \frac{p\omega + qk}{\sqrt{\omega^2+k^2}}r - \sqrt{\omega^2+k^2}\frac{dS}{dt}\cos\varphi,$$
$$\gamma_n = \frac{-q\omega + pk}{\sqrt{\omega^2+k^2}}r + \sqrt{\omega^2+k^2}\frac{dS}{dt}\sin\varphi.$$

8. - **Le cercle des inflexions.** — Les projections de l'accélération de $M(x, y)$ sur les axes Ix, Iy étant données par (13) et celles de la vitesse de M étant données par (7) où l'on fait $X=0$, $Y=0$, sont

$$\frac{dx}{dt}=-y\omega+kx, \qquad \frac{dy}{dt}=\omega x+ky. \tag{16}$$

La composante normale γ_n de l'accélération est nulle quand l'accélération est parallèle à la vitesse, donc les paramètres directeurs proportionnels,

$$\frac{-py+qx-k\dfrac{dS}{dt}}{-\omega y+kx}=\frac{px+qy-\omega\dfrac{dS}{dt}}{\omega x+ky}.$$

D'où

$$x^2+y^2-\frac{k^2+\omega^2}{q\omega-kp}\cdot\frac{dS}{dt}\cdot y=0,$$

donc le lieu des points M, où l'accélération normale est nulle, est un cercle tangent en I à la base. C'est le cercle des inflexions, car la composante normale de l'accélération étant $\frac{V^2}{R}$, V étant la vitesse et R le rayon de courbure en M, on voit que dans ce cas $R\to\infty$, M est un point d'inflexion.

On peut voir aussi que le lieu des points dont l'accélération normale est nulle est le cercle des inflexions

$$r=\frac{\omega^2+k^2}{q\omega-kp}\frac{dS}{dt}\sin\varphi,$$

obtenu en égalant à 0 la composante γ_n donnée par (15). Le diamètre de ce cercle est sur la normale en M et a pour valeur $IG=\frac{\omega^2+k^2}{q\omega-kp}\frac{dS}{dt}$. D étant le point d'intersection de ce cercle avec IM, on a

$$ID=IG\sin\varphi=\frac{\omega^2+k^2}{q\omega-kp}\frac{dS}{dt}\sin\varphi. \tag{17}$$

De même, le lieu des points pour lesquels l'accélération tangentielle $\gamma_t=0$, est le cercle

$$r=\frac{\omega^2+k^2}{p\omega+kq}\frac{dS}{dt}\cos\varphi,$$

tangent en I à la normale à la base. Le centre d'accélération est le point d'intersection de ces cercles.

9. - **Le centre de courbure à la courbe décrite par un point de la figure mobile.** — La vitesse V du point M est donnée par (16),

$$V^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(-\omega y+kx)^2+(\omega x+ky)^2=(x^2+y^2)(k^2+\omega^2),$$
$$V^2=(k^2+\omega^2)\overline{IM}^2=(k^2+\omega^2)r^2.$$

L'accélération normale étant $\frac{V^2}{R}$, $R=M\mu$ le rayon de courbure en M, on a

$$\frac{V^2}{R}=\gamma_n, \qquad \frac{V^2}{R}=\frac{-q\omega+kp}{\sqrt{\omega^2+k^2}}r+\sqrt{\omega^2+k^2}\frac{dS}{dt}\sin\varphi,$$

où remplaçant V^2, on obtient

$$\frac{r^2(k^2+\omega^2)}{R}=\frac{-q\omega+kp}{\sqrt{\omega^2+k^2}}\left(r-\frac{\omega^2+k^2}{q\omega-kp}\frac{dS}{dt}\sin\varphi\right).$$

Observant (17), on trouve

$$\frac{r^2}{R}=\frac{-q\omega+kp}{(\omega^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}(r-ID),$$

$$\overline{IM}^2=M\mu\cdot m(IM-ID),\qquad m=\frac{-q\omega+kp}{(\omega^2+k^2)^{\frac{3}{2}}},$$

(18) $$\overline{IM}^2=M\mu\cdot EM,\qquad EM=m\cdot DM,$$

E étant le point sur IM, tel que $EM=m\cdot DM$, et D le point d'intersection du cercle des inflexions de diamètre IG (IG perpendiculaire à la tangente Ix à la base en I) avec IM.

En prenant sur MI le point ν tel que $M\nu=M\mu$, la relation (18) devient

(19) $$\overline{IM}^2=M\nu\cdot EM,$$

et donc pour construire le centre de courbure μ sur la normale en M, il faut trouver le point ν sur IM donné par la relation (19).

Nous suivrons une méthode analogue à celle employée par POINCARÉ [4]. Soient H l'intersection de GM avec la parallèle menée par I à GE, ν le point de rencontre de IM avec la parallèle de H à IG. Les triangles semblables MIG, $M\nu H$ et MGE, MHI donnent

$$\frac{MI}{M\nu}=\frac{MG}{MH},\qquad \frac{MG}{MH}=\frac{ME}{MI}.$$

D'où

$$\frac{MI}{M\nu}=\frac{ME}{MI},\qquad MI^2=ME\cdot M\nu,$$

et donc $M\nu$ est connue.

Prenons sur la normale en M (perpendiculaire sur la tangente en M, qui fait l'angle v avec IM) la longueur $M\mu=M\nu$ et l'on a $\overline{IM}^2=M\mu\cdot EM$; donc μ est le centre de courbure en M à la courbe (M) décrite par ce point.

On voit que dans le cas $\varrho=1$, on retrouve la Cinématique classique.

[4] POINCARÉ: *Cinématique et Mécanismes, Potentiel et Mécanique des fluides* (1899), p. 51.