ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GASTON JULIA

Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes (premier mémoire)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 1-2 (1932), p. 113-138

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_113_0>

SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME DES AIRES MULTIPLEMENT CONNEXES

(PREMIER MÉMOIRE)

par GASTON JULIA (Versailles).

Historique: Introduction et résumé succinct du mémoire.

La représentation conforme biunivoque d'une aire multiplement connexe $\mathfrak{A}$ donnée sur une aire *canonique* de même connexion a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Sans entrer dans une bibliographie détaillée nous citerons d'abord le mémoire fondamental (1) de M. SCHOTTKY [J. de Crelle, t. 83]: *Über die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen*, et du même auteur un mémoire (2) se rattachant au même sujet, sous un titre différent (J. de Crelle, t, 117]: *Über die Wertschwankungen der harmonischen Funktionen zweier reeller Veränderlichen und der Funktionen eines komplexen Arguments.* Postérieurement, le sujet a notamment fait l'objet des recherches de MM. HILBERT et COURANT d'une part, de M. KOEBE d'autre part; H. HILBERT a donné une très élégante méthode qui rattache le problème au *Calcul des Variations*; M. KOEBE a très consciencieusement étudié le problème actuel, et en a donné diverses solutions dont quelques-unes très élémentaires: pour l'exposé de ces méthodes et pour la bibliographie antérieure nous renverrons à son mémoire des Acta Matematica t. 41 intitulé: *Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche.*

Tout récemment, M. DE LA VALLÉE-POUSSIN est revenu sur le même sujet. Dans trois notes des *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris* [t. 190, 1930, p. 782; t. 190, p. 1414; t. 192, p. 128], et dans deux mémoires (3) insérés, l'un aux *Annales de l'École Normale Supérieure* [t. 47, 1930, pp. 267-309], l'autre aux *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, classe des Sciences [5e série, tome 17, 1931, pp. 10-27] il a fourni un *nouveau type canonique* d'aires multiplement connexes sur lesquelles il est possible de représenter d'une manière conforme une aire d'ordre de connexion fini.

Sur le conseil de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN, j'ai étudié certaines difficultés

(1) Nous le désignerons dans la suite par S. 1.

(2) Nous le désignerons par S. 2.

(3) Nous les appelons L. V. P. 1 et L. V. P. 2 dans la suite.

auxquelles donne lieu l'application de sa méthode initiale, difficultés signalées dans la 2e note et dans le 2e mémoire précédemment cités.

Ayant fait de la question qui nous occupe l'objet de mon cours de la Sorbonne pendant le 2e semestre de l'année 1930-1931, j'ai été conduit à introduire dans la question une surface de Riemann canonique σ en correspondance conforme et biunivoque avec l'aire donnée $\mathfrak{A}$.

Cette surface σ est *celle que décrit le point* $\zeta = F(z)$, *lorsque* z *décrit l'aire* $\mathfrak{A}$, $F(z)$ étant la fonction définie par M. DE LA VALLÉE-POUSSIN dans son mémoire des Annales E. N. S. Les services manifestes que m'a rendus ici cette surface σ, et dont on verra l'exposé au cours du présent mémoire sont une preuve supplémentaire de l'intérêt primordial qui s'attache à la considération *simultanée* du *domaine d'existence* d d'une fonction holomorphe $F(z)$ et de la *surface de* Riemann Δ engendrée par le point $\zeta = F(z)$ lorsque z décrit le domaine d; Δ est à la fois le *domaine d'existence et d'uniformité de la fonction* $z = \Phi(\zeta)$ *inverse* de $\zeta = F(z)$ et le « *domaine des valeurs* » *de* $F(z)$ *dans* d. Dans des notes et mémoires antérieurs, j'ai déjà à diverses reprises attiré l'attention des géomètres sur cette idée et donné des preuves précises de son intérêt: démonstrations d'existence pour les solutions d'équations fonctionnelles, allure et singularités des fonctions étudiées, relations fonctionnelles qu'elles vérifient, relations d'inégalité et majorantes diverses pour ces fonctions ou leurs dérivées, propriétés de l'ensemble des points où ces fonctions prennent une valeur donnée appartenant à D, etc. [Voir notamment *C. R. Acad. Sc. de Paris*: 20 Février, 6 Mars, 20 Mars 1922; Annales de l'E. N. S. 1922 et 1923; Bulletin de la Soc. Math. de France 1924; voir aussi mes: *Principes Géométriques d'Analyse* Gauthier-Villars, 1929].

Cette même idée m'a conduit ici à introduire comme *élément central du problème la surface de Riemann* σ *correspondant à* $\mathfrak{A}$ (et à toute la classe des aires représentables conformément sur $\mathfrak{A}$) *par* $\zeta = F(z)$. Dans le Chapitre I on étudie ses propriétés générales et on démontre *qu'elles sont caractéristiques:* frontières, nombre des feuillets, *relation fondamentale entre le nombre des points de ramification intérieurs et celui des points de ramification frontière, connexion.* Chemin faisant on met la *fonction principale* de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN en relation avec les *intégrales abéliennes de première espèce de la courbe algébrique associée par M. Schottky à l'aire considérée.*

Dans le Chapitre II, on étudie plus particulièrement le cas où $F'(z)$ a tous ses zéros intérieurs à $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire où tous les *points de ramification de* σ *sont intérieurs à* σ. On précise d'abord la structure de σ et de ses frontières qui sont alors les plus simples possibles. En opérant convenablement le prolongement de cette surface de Riemann σ hors de ses frontières, on montre que les résultats de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN s'obtiennent très aisément et se rattachent à des théorèmes classiques sur les surfaces de Riemann algébriques et leurs représentations conformes. Puis on montre qu'un prolongement différent et tout aussi simple fournit un type nouveau d'aire canonique présentant la même généralité que celui de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN.

Enfin, et surtout, l'introduction de la surface de Riemann canonique σ met en vive lumière la nature des difficultés qu'on peut rencontrer dans l'application de la méthode de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN; elle permet d'étudier tous les cas où l'on doit renoncer à la simplicité et à l'élégance qui caractérisent la méthode initiale exposée dans le mémoire des Annales de l'Ecole Normale précédemment cité.

M. DE LA VALLÉE-POUSSIN avait levé ces difficultés par une élévation convenable du degré des polynomes mis en jeu.

On verra dans un mémoire ultérieur que, sans élever le degré de ces polynomes, on peut se tirer d'affaire en introduisant comme frontières de l'aire canonique *non plus des cassiniennes fermées*, mais éventuellement des *cassiniennes tronquées.*

Pour la lecture du présent mémoire, il est bon de connaître les éléments de la théorie des fonctions algébriques d'une variable et des surfaces de Riemann correspondantes, telle qu'elle est exposée par exemple dans le traité d'Analyse de M. PICARD, tome 2, Chapitres 13 et suivants. [Voir, en particulier, la fin du chapitre 16 pour la correspondance établie par M. SCHOTTKY entre une aire $(p+1)$ fois connexe et une classe de courbes algébriques de genre p]. On utilisera aussi certains résultats du mémoire fondamental de M. SCHOTTKY et, naturellement, les deux mémoires de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN. J'ai fait aux mémoires de M. KOEBE [tomes 40 et 41 des Acta Mathematica], une large place dans mon cours de la Sorbonne, comme on le verra dans la rédaction de ce cours qui sera ultérieurement publiée; toutefois, la lecture de ces mémoires bien qu'elle soit grandement à recommander au lecteur soucieux de se mettre au courant de l'état actuel de la question, n'est pas indispensable à la lecture du présent mémoire.

CHAPITRE I.

Définition de la fonction $F(z)$ de M. de la Vallée-Poussin. Construction et Étude Générale de la surface de Riemann σ correspondante.

1. - Dans ce qui suit, nous envisageons une aire limitée par $p+1$ *courbes continues de Jordan* C_0, $C_1, \ldots, C_p$; la courbe C_0 limitant $\mathfrak{A}$ vers l'extérieur, et C_1, $C_2, \ldots, C_p$ vers l'intérieur. Eventuellement $C_1, \ldots, C_p$ peuvent, partiellement ou totalement, être des arcs ouverts. Ainsi qu'il est classique, des représentations conformes préliminaires appliquées aux aires planes contenant $\mathfrak{A}$ et limitées uniquement par C_0, $C_1, \ldots$, ou C_p, permettent, *sans restreindre la généralité*, de supposer que les C_i $(i=0, 1, \ldots, p)$ *sont des courbes fermées analytiques sans points singuliers.*

Il n'y a pas lieu de se préoccuper du cas ou l'une des courbes frontières se réduirait à un point (frontière dégénérée), car on sait qu'alors une représentation conforme biunivoque quelconque de l'aire, ne saurait transformer ce point en autre chose qu'un point, et la fonction de représentation resterait holomorphe au point considéré. On écarte donc de ce qui suit les frontières dégénérées pour ne s'occuper que des *frontières non dégénérées.*

I. - Définition de $F(z)$ attachée à $\mathfrak{A}$.

2\. - Envisageons les p fonctions fondamentales $U_1, \ldots, U_p$ harmoniques dans $\mathfrak{A}$, et telles que U_K soit égale à 1 sur C_K et à zéro sur les $C_{K'}$ $(K' \neq K)$, auxquelles correspondent des fonctions conjuguées $V_1, V_2, \ldots, V_p$ $[U_K + iV_K$ fonction analytique dans $\mathfrak{A}$, généralement non uniforme à cause des périodes de V_K relatives aux contours $C_K]$.

Nous imaginons chaque C_K décrit *dans le sens positif par rapport à l'aire* $\mathfrak{A}$. A chaque C_K $(K=1, 2, \ldots, p)$ correspondent ainsi des périodes (4) ω_{1K}, $\omega_{2K}, \ldots, \omega_{pK}$ pour $V_1, V_2, \ldots, V_p$; considérons le tableau $\|\omega_{iK}\|$ $(i=1, 2, \ldots, p)$; $(K=1, 2, \ldots, p)$. On sait (SCHOTTKY, KOEBE, DE LA VALLÉE-POUSSIN) *que son déterminant est* $\neq 0$. Il est donc possible de choisir les constantes réelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de façon que:

$$U = \lambda_1 U_1 + \ldots + \lambda_p U_p,$$

[harmonique dans $\mathfrak{A}$, prenant les valeurs 0, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sur $C_0, C_1, \ldots, C_p$], ait pour conjuguée une fonction:

$$V = \lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_p V_p$$

dont les périodes (5) relatives à $C_1, \ldots, C_p$ soient toutes égales à (-2π). La période de V relative à C_0 est donc $(p.\,2\pi)$. Les conditions imposées à V déterminent les λ de façon unique. M. DE LA VALLÉE-POUSSIN les appelle les *indices* de l'aire $\mathfrak{A}$. Nous posons $F(z) = e^{U+iV}$; la fonction F est donc holomorphe et uniforme dans $\mathfrak{A}$; *son module est constant sur chaque frontière* et reçoit les valeurs 1, $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_p}$, sur $C_0, C_1, \ldots, C_p$; *son argument augmente de* $(p.\,2\pi)$ *sur* C_0 *et diminue de* 2π *lorsque* z *décrit* C_K $(K=1, 2, \ldots, p)$ *dans le sens positif relativement à* $\mathfrak{A}$. *Ces propriétés déterminent* F *à un facteur constant près de module* 1 (correspondant à la constante réelle arbitraire figurant dans V). On montre aisément que *tous les* λ *sont négatifs* soit par des raisonnements directs du genre de celui de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN (L. V. P. 1, page 281), soit par des raisonnements d'Analysis situs élémentaire du genre de ceux que fait M. KOEBE dans son lemme p. 314 ou p. 319 du mémoire des Acta 41. Il

(4) Il est inutile d'introduire les périodes relatives à C_0, la somme des périodes relatives à $C_0, C_1, \ldots, C_p$ pour une V_i quelconque étant nulle.

(5) Lorsqu'elles sont égales à zéro on a la représentation de SCHOTTKY-KOEBE.

en résulte que, dans $\mathfrak{A}$, $|F|$ reste compris entre 1 et e^{λ_K}, λ_K étant le plus petit des nombres négatifs $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$.

II. - Construction de la surface de Riemann σ.

3. - Par $\zeta = F(z)$ nous associons à chaque point z de $\mathfrak{A}$ un point du plan ζ. Mais, comme il arrivera qu'à 2 points distincts z_1 et z_2 de $\mathfrak{A}$ puisse correspondre la même valeur de $F(z)$, nous imaginerons que les ζ_1 et ζ_2 correspondant à z_1 et z_2 ne sont pas sur le même feuillet du plan et ne *coïncident qu'en projection.* D'une manière précise, voici comment nous procèderons. La fonction $F(z)$ est, comme on sait (Principe de la Symétrie), *holomorphe sur toutes les frontières C_i* et prolongeable analytiquement au-delà. Ainsi que je l'ai montré dans mes *Principes Géométriques d'Analyse* [Chapitre I, Section I et III], chaque point de $\mathfrak{A}$ où $F'(z) \neq 0$ peut être entouré d'une aire plane (δ) limitée par une courbe analytique fermée, à laquelle correspond biunivoquement, par $\zeta = F(z)$ une aire circulaire (Δ). Un point z' de $\mathfrak{A}$ où $F'(z) = 0$ peut être entouré d'une aire plane (δ') limitée par une courbe analytique fermée, à laquelle correspond biunivoquement, par $\zeta = F(z)$, un élément de surface de Riemann (Δ') à K feuillets, présentant au point $\zeta' = F(z')$ un point de ramification d'ordre $K-1$, $\left[\text{si } \frac{d^\lambda F}{dz'^\lambda} = 0 \text{ pour } \lambda = 1, 2, ..., (K-1)\right.$ et $\left.\neq 0 \text{ pour } \lambda = K\right]$, autour duquel se permutent circulairement les K feuillets de (Δ'), la frontière de Δ' étant constituée par un cercle de centre ζ' parcouru K fois de suite dans le sens positif. Les éléments (Δ) sont dits de première espèce, les éléments (Δ') de deuxième espèce. Dans ces conditions, l'holomorphie de F dans $\mathfrak{A}$ et sur les C_i, jointe au lemme classique de BOREL-LEBESGUE, montre qu'on peut couvrir $\mathfrak{A}$ et ses frontières à l'aide *d'un nombre fini d'aires* (δ) *et* (δ'). A ces aires (δ) et (δ') correspondent sur le plan ζ un nombre fini d'aires (Δ) et (Δ') des 2 espèces. Nous faisons le prolongement de $F(z)$ dans tout $\mathfrak{A}$ à partir d'une aire (δ_0) [ou (δ_0')] et nous construisons σ, correspondant à $\mathfrak{A}$ par $\zeta = F(z)$, en adjoignant successivement à l'aire (Δ_0) [ou (Δ_0')], qui correspond à l'aire (δ_0) [ou (δ_0')] initiale, les aires (Δ) et (Δ') correspondant aux (δ) et (δ') qui emplètent sur (δ_0) [ou (δ_0')], puis en continuant de proche en proche de manière à respecter entre deux aires (Δ) ou (Δ') les connexions qui existaient [6] entre les (δ) ou (δ') auxquelles elles correspondent. Un nombre fini d'opérations permettant d'engendrer $\mathfrak{A}$ par adjonctions successives des (δ) ou (δ') empiétant sur la (δ_0) [ou (δ_0')] initiale, puis des (δ) ou (δ') empiétant sur l'aire ainsi obtenue, etc., *un nombre fini d'opérations permettra d'engendrer l'aire de Riemann σ transformée conforme et biunivoque de $\mathfrak{A}$ par $\zeta = F(z)$.*

---

[6] A 2 aires (δ) ou (δ') ayant une partie commune (δ'') correspondront 2 aires (Δ) ou (Δ') ayant en commun la partie (Δ'') transformée de (δ'').

III. - Propriétés générales de σ. Frontières. Nombre des feuillets. Points de ramification.

4. - *Frontières.* — D'abord il est clair que, σ correspondant biunivoquement à $\mathfrak{A}$ par $\zeta = F(z)$, les frontières de σ correspondent biunivoquement à celles de $\mathfrak{A}$.

Lorsque *z décrit C_0 dans le sens positif par rapport à* $\mathfrak{A}$, ζ reste sur le cercle $|\zeta| = +1$ et son argument augmente de (p. 2π); or on a vu précédemment (n.° 2) que 1 est le maximum de $|F(z)|$ dans $\mathfrak{A}$; il en résulte que ζ décrira le cercle unité *en marchant toujours dans le sens positif*, c'est-à-dire que *arg ζ ira constamment en croissant lorsque z décrira C_0, sa variation totale étant* (p. 2π). En effet, ζ ne pourrait rétrograder sur le cercle unité que si ζ passait par une racine z_0 de $F'(z)$, d'ordre impair, située sur C_0, et il en résulterait qu'au voisinage de cette racine z_0, $F(z)$ pourrait recevoir en des points intérieurs à $\mathfrak{A}$ des valeurs >1 en module.

Ceci montre en outre qu'aucune racine de $F'(z) = 0$ ne peut se trouver sur C_0. *σ est donc limitée vers l'extérieur par un cercle γ_0 de rayon* 1, *de centre O, parcouru p fois de suite dans le sens trigonométrique.*

Lorsque z décrira, dans le sens positif par rapport à $\mathfrak{A}$, l'un des contours C_1, $C_2, \ldots, C_p$, on sait que l'argument de $\zeta = F(z)$ diminue au total de 2π, le module restant égal à e^{λ_1}, $e^{\lambda_2}, \ldots,$ ou e^{λ_p}. Par conséquent, lorsque z décrit C_K, ζ décrira la *courbe fermée circulaire* ([7]) γ_K de centre O de rayon e^{λ_K}, de façon que son argument décroisse au total de 2π, ce qui n'empêche évidemment pas à priori certains arcs de γ_K d'être parcourus plusieurs fois en sens contraire. La variation totale de arg ζ étant (-2π), il y a certainement un arc au moins $a_K b_K$ de C_K sur lequel arg ζ décroît lorsque z décrit $a_K b_K$. Sur cet arc, V décroît, et si C_K est orientée dans le sens positif par rapport à $\mathfrak{A}$, on aura $\frac{dV}{dS} \leqslant 0$. Mais la normale intérieure à $\mathfrak{A}$ menée en un point M de cet arc étant Mn, on aura $\frac{dV}{dS} = -\frac{dU}{dn}$. Donc $\frac{dU}{dn} \geqslant 0$ et les arcs $a_K b_K$ sont ceux sur lesquels $\frac{dU}{dn} > 0$. Un point où $\frac{dU}{dn} = 0$ $\left[\text{puisque sur tout } C_K \text{ on a } \frac{dU}{dS} = 0\right]$ est un point où $F'(z) = 0$. Les points séparatifs des arcs où ζ décroît et des arcs où ζ croît sont des racines de $F'(z) = 0$. On voit aussitôt que ce sont des racines d'ordre impair. En définitive, *σ est donc limitée, vers l'intérieur, par p courbes fermées circulaires $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ de centre O de rayons respectifs* e^{λ_1}, $e^{\lambda_2}, \ldots, e^{\lambda_p}$., chaque courbe γ_K pouvant comporter des arcs décrits dans les 2 sens, mais comportant certainement au moins un arc $\alpha_K \beta_K$ (correspondant à $a_K b_K$) décrit dans le

---

([7]) J'appelle ainsi une courbe fermée projetée suivant un cercle sur le plan ζ, mais pouvant avoir des arcs multiples à condition que la variation totale du point qui décrit la courbe une fois, soit en valeur absolue égale à 2π.

sens des aiguilles d'une montre, de façon qu'au total la variation de l'argument de ζ lorsque ζ décrit la frontière γ_K (positivement par rapport à σ) soit égale à (-2π). Nous reviendrons plus loin sur l'étude des racines de $F'(z)=0$ qui donnent naissance à des *points de rebroussement des courbes* γ_K.

Mais on voit que sur la *courbe* C_K *correspondant au* λ_K *minimum* il n'y a certainement pas de racine z_1 de $F'(z)=0$, car une telle racine fournirait sur la frontière γ_K de rayon minimum des points ζ_1 au voisinage desquels devraient exister des points intérieurs à σ de module inférieur au module de ζ_1, ce qui est impossible (raisonnement analogue à celui fait pour C_0). Pour fixer les idées nous supposons les indices 1, 2,...., p des contours choisis de façon que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant .... \geqslant \lambda_p$. Il n'y a alors pas de racines de $F'(z)=0$ sur C_p et par conséquent γ_p *est identique à un cercle de centre O de rayon* e^{λ_p} *décrit une fois dans le sens des aiguilles d'une montre.*

Il en sera de même pour tous les γ_K correspondant à des C_K sur lesquels n'existe pas de racine de $F'(z)=0$.

5. - *Nombre des feuillets.* — Les feuillets de σ sont donc empilés sur le plan ζ entre les 2 cercles de centre O, de rayons e^{λ_p} et 1. Étudions le *nombre des feuillets* en chaque point a de cet anneau *non situé sur une* γ_K. Ce nombre $n(a)$ est le nombre des racines de l'équation $F(z)-a=0$ appartenant à $\mathfrak{A}$. Comme a n'est sur aucune γ_K, ces racines seront intérieures à $\mathfrak{A}$. Ce nombre est, comme on sait, égal à l'intégrale

$$n(a)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0,\dots,C_p}\frac{F'(z)dz}{F(z)-a}$$

étendue au *contour de* $\mathfrak{A}$ *décrit dans le sens positif* (*par rapport à* ($\mathfrak{A}$)). On peut l'écrire:

$$n(a)=\frac{1}{2\pi}\left[\text{var. totale arg }(\zeta-a)\right]$$

lorsque ζ *décrit les frontières* γ_K *de* σ *dans le sens positif* (par rapport à σ) et il est clair que ce nombre ne change pas tant que a varie sans rencontrer les frontières γ_K.

Lorsque $|a|<e^{\lambda_p}$, a est intérieur à toutes les γ_K et les variations de arg ζ sur γ_0, γ_1,...., γ_p étant respectivement (p. 2π), (-2π),...., (-2π), les variations de arg $(\zeta-a)$ seront les mêmes que pour $a=0$, c'est-à-dire seront égales aux précédentes. La variation totale de arg $(\zeta-a)$ sera

$$(\text{p.}\,2\pi)+(-2\pi)+\ldots.+(-2\pi)=0.$$

Elle sera nulle. *Il n'y a pas de feuillet de* σ *à l'intérieur de* γ_p, ce qu'on savait déjà par ce fait que e^{λ_p} est le minimum absolu de $|F(z)|$ dans $\mathfrak{A}$.

Lorsque a franchit en projection γ_p, la variation de arg $(\zeta-a)$ sur γ_p passe de -2π à 0 et la variation totale de arg $(\zeta-a)$ sur le contour de σ augmente aussi de 2π chaque fois que a traverse en projection une frontière de σ (de l'intérieur vers l'extérieur). Il en résulte que, entre γ_p et γ_{p-1}, *il y a* 1 *feuillet, entre* γ_{p-1} *et* γ_{p-2} *il y a* 2 *feuillets, entre* γ_{p-K-1} *et* γ_{p-K} *il y a* K *feuillets, entre* γ_1 *et* γ_0 *il y a* p *feuillets de* σ. *A l'extérieur de* γ_0 *il n'y a aucun feuillet de* σ [le maximum de $|F|$ dans $\mathfrak{A}$ est d'ailleurs 1, rayon de γ_0]. Les cas limites ou 2 ou plusieurs indices λ_i seraient égaux, se traitent immédiatement comme on vient de le faire, *le nombre des feuillets augmentant de* μ *au passage de* $|a|$ *par* e^{λ_i} *(en croissant), si* μ *des* λ_i *sont égaux.*

En définitive, σ *possède* p *feuillets* qui tous recouvrent l'anneau (γ_0, γ_1), $(p-1)$ d'entre eux recouvrent l'anneau (γ_1, γ_2),...., $(p-K)$ recouvrent l'anneau (γ_K, γ_{K+1}), 1 seul recouvre l'anneau (γ_{p-1}, γ_p), les cas limites se formant comme on l'a dit précédemment. On voit ainsi que, selon la position de a, par rapport à $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$, c'est-à-dire suivant que $|a|$ est dans l'un ou l'autre des intervalles $(1, e^{\lambda_1})$, $(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2})$,...., $(e^{\lambda_{p-1}}, e^{\lambda_p})$ l'équation $F(z)-a=0$ aura dans $\mathfrak{A}$ un nombre de racines égal à p, $(p-1)$, $(p-2)$,...., 1.

Nous examinerons plus loin les connexions des feuillets entre eux. Mais nous pouvons dès maintenant conclure de ce qui a été dit au n.° 4 *que la courbe* γ_0 *appartient aux* p *feuillets de* σ *et que* γ_p *n'appartient qu'à l'un d'entre eux; n'appartient également* qu'à un feuillet toute γ_K sur laquelle ne se trouve aucun point de rebroussement, c'est-à-dire dont la C_K correspondante sur $\mathfrak{A}$ n'a pas de racine de $F'(z)=0$. Lorsque z décrit C_0 dans le sens positif, ζ décrit γ_0 dans le sens positif en passant successivement sur les p feuillets de σ; lorsque la projection de ζ a fait p tours complets autour de O, le point ζ est revenu sur le feuillet initial à sa position initiale.

6. - *Points de ramification. Relation fondamentale.* — La connexion entre les feuillets de σ s'établit, comme on sait, par des lignes de croisement dont le parcours est largement arbitraire mais qui émanent toujours des *points de ramification de* σ, lesquels sont les seuls points obligés de leur tracé. Ces points de ramification correspondent d'une manière biunivoque aux racines de $F'(z)=0$. Le cas général est celui ou $F'(z)=0$ n'a que des racines simples. Dans l'évaluation qui va suivre nous compterons *une racine d'ordre* m *de* $F'(z)=0$ *comme équivalente à* m *racines simples.*

Lorsqu'il n'y a aucun zéro de $F'(z)$ *sur les contours de* $\mathfrak{A}$, M. DE LA VALLÉE-POUSSIN a démontré que le *nombre de ces zéros supposés simples est* $(p-1)$ (L. V. P. 1, page 282); s'il y a des zéros multiples, l'ensemble des zéros de $F'(z)$ équivaut à $(p-1)$ zéros simples avec la convention précédente.

Nous allons montrer que, *dans tous les cas, en désignant par* a *le nombre des zéros simples* (ou équivalents à des simples suivant la convention précédente) *de* $F'(z)$ *intérieurs* à $\mathfrak{A}$, et *par* b *le nombre des zéros simples de* F' *situés sur les contours de* $\mathfrak{A}$, *on a toujours la relation fondamentale*

$$\boxed{2a+b=2p-2}. \tag{1}$$

Considérons pour cela la fonction $f(z) = U + iV$. C'est une fonction analytique de z non uniforme dans $\mathfrak{A}$ mais dont la dérivée ou la différentielle est uniforme puisque U est uniforme et puisque en posant $z = x + iy$ on a:

$$dV = -\frac{\partial U}{\partial y}\,dx + \frac{\partial U}{\partial x}\,dy.$$

Il est clair d'ailleurs que les zéros de $F'(z)$ sont, avec le même ordre de multiplicité, des zéros de $f'(z)$. $f'(z)$ est donc holomorphe et uniforme dans $\mathfrak{A}$ et sur les contours de $\mathfrak{A}$. De plus, sur chaque frontière C_K de $\mathfrak{A}$, U reste constant donc $\frac{dU}{ds} = 0$ en tout point de C_K; par suite $f'(z) \cdot \frac{dz}{ds} = i\frac{dV}{ds} = -i\,\frac{dU}{dn}$ est *purement imaginaire* en chaque point des frontières de $\mathfrak{A}$. $f'(z)$ est donc liée à une importante classe de fonctions étudiées par M. SCHOTTKY dans son premier Mémoire (S. 1) et dont nous rappelons brièvement les propriétés.

7. - Il existe une classe de fonctions $K(z)$ *uniformes dans* $\mathfrak{A}$, *méromorphes dans* $\mathfrak{A}$ *et sur sa frontière, réelles sur la frontiére de* $\mathfrak{A}$. Toutes ces $K(z)$ sont des fonctions *rationnelles à coefficients réels de* 2 *d'entre elles* $r(z)$ *et* $s(z)$ *lesquelles sont liées par une équation algébrique à coefficients réels de genre* p. Nous appelons $A(r, s) = 0$ cette équation algébrique. Lorsque z décrit une courbe frontière C_K de $\mathfrak{A}$, le point de cordonnées cartésiennes (r, s) décrit un arc réel fermé de la courbe algébrique $A(r, s) = 0$; cette courbe a donc $p+1$ arcs fermés distincts. Lorsque z décrit $\mathfrak{A}$, le point $r(z)$ engendre une demi-surface de Riemann $\mathfrak{R}_0$ limitée par $p+1$ courbes fermées Γ_0, Γ_1,...., Γ_p se projetant sur des segments de l'axe réel parcourus dans les 2 sens. Sur $\mathfrak{R}_0$, $s(z)$, envisagé comme fonction de $r(z)$, est *uniforme*. $\mathfrak{R}_0$ est la demi-surface de Riemann de la fonction algébrique $s(r)$ définie pas $A(r, s) = 0$. Si $\mathfrak{R}$ est la surface de Riemann entière de $s(r)$, on reconnaît qu'elle est découpée par les $p+1$ courbes fermées distinctes Γ_0, Γ_1,...., Γ_p précédentes en 2 parties distinctes dont l'une est précisément $\mathfrak{R}_0$ et dont l'autre sera appelée $\mathfrak{R}_0'$. La surface de Riemann $\mathfrak{R}$ est *orthosymétrique de genre* p. Avec M. SCHOTTKY on appelle *courbes de transition ou de passage* les courbes Γ_0, Γ_1,...., Γ_p qui séparent les 2 moitiés $\mathfrak{R}_0$ et $\mathfrak{R}_0'$ de $\mathfrak{R}$. Ajoutons que les points r et r' décrivant $\mathfrak{R}_0$ et $\mathfrak{R}_0'$ étant imaginaires conjugués (les valeurs correspondantes de s l'étant aussi) nous pouvons dire que $\mathfrak{R}_0$ *et* $\mathfrak{R}_0'$ *sont imaginaires conjuguées ou symétriques par rapport à l'axe réel.* Enfin, par $r = r(z)$, $\mathfrak{R}_0$ est représentée d'une façon biunivoque et conforme sur l'aire $\mathfrak{A}$.

8. - En vertu de ce qui précède, $r(z)$ étant méromorphe et réelle sur toute frontière C_K de $\mathfrak{A}$, $\frac{dr}{ds} = r'(z) \cdot \frac{dz}{ds}$ sera réelle en tout point frontière de $\mathfrak{A}$. Puisque $f'(z) \cdot \frac{dz}{ds}$ est purement imaginaire en un tel point, le rapport $\frac{f'(z)}{ir'(z)}$ sera réel, sur la frontière de $\mathfrak{A}$. Il est évidemment uniforme et méromorphe dans $\mathfrak{A}$ et sur sa frontière quisque $f'(z)$ et $r'(z)$ le sont aussi.

Il en résulte que $\frac{f'(z)}{ir'(z)}$ est une fonction de la classe des $K(z)$, c'est par suite une fonction rationnelle à coefficients réels de $r(z)$ et $s(z)$

$$f'(z) = iR(r, s) \cdot r'(z).$$

Il en résulte que $f(z)$ est une intégrale abélienne attachée à la courbe algébrique $A(r, s) = 0$

$$f(z) = i \int R(r, s) dr.$$

C'est une intégrale de *première espèce*; en effet $f(z) = U + iV$ étant évidemment partout finie sur $\mathfrak{A}$, et régulière en tout point intérieur à $\mathfrak{A}$ ou sur sa frontière, sera finie dans la partie $\mathfrak{R}_0$ de $\mathfrak{R}$ [qui correspond à $\mathfrak{A}$ par $r = r(z)$] et sur les $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_p$; elle l'est aussi sur la partie $\mathfrak{R}_0'$, puisqu'en 2 points de $\mathfrak{R}_0$ et $\mathfrak{R}_0'$ symétriques par rapport à l'axe réel [correspondant à des couples (r, s) et (r', s') imaginaires conjugués] les valeurs de $R(r, s)$ sont imaginaires conjuguées puisque R a ses coefficients réels. $f(z)$ est donc partout finie et régulière sur $\mathfrak{R}$, c'est bien une intégrale abélienne de première espèce.

9. - *Les zéros de $f'(z)$ sont donc fournis par les zéros de la différentielle abélienne* de première espèce $R(r, s)dr$ auxquels *ils correspondent d'une façon biunivoque comme nous allons le voir plus loin.* Or on sait que, *pour toute différentielle abélienne attachée à une courbe algébrique de genre p, le nombre des zéros surpasse de* $2(p-1)$ *le nombre des pôles* (chacun étant compté pour autant qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité). En particulier, les différentielles abéliennes de première espèce n'ayant pas de pôle, *le nombre de leurs zéros est* $2(p-1)$. On le voit d'ailleurs immédiatement en écrivant:

$$R(r, s) dr = \frac{Q(r, s)}{A_s'(r, s)} dr,$$

ou $Q(r, s)$ est un polynome adjoint d'ordre $m-3$ attaché à la courbe algébrique $A(r, s) = 0$ de degré m. Les zéros (r, s) cherchés sont les points d'intersection mobiles de $Q(r, s) = 0$ avec $A(r, s) = 0$ et l'on sait par un théorème classique que leur nombre est $2p-2$ avec la convention précédente sur l'ordre de multiplicité. [Pour la démonstration voir p. ex. PICARD: *Traité d'Analyse*, tome 2, chapitre 14, section I, n.° 10].

10. - Pour démontrer le théorème en question, il suffit maintenant de remarquer qu'à un zéro de f' intérieur à $\mathfrak{A}$ correspond un zéro du même ordre de la différentielle abélienne située dans $\mathfrak{R}_0$ et, *à cause de la réalité des coefficients de R et de la symétrie* [8] *de $\mathfrak{R}_0$ et $\mathfrak{R}_0'$ un zéro du même ordre*

---

[8] On peut considérer $\mathfrak{R}_0'$ *comme l'image conforme de la face inférieure du disque* $\mathfrak{A}$, le prolongement à travers C_0 de $f(z)$ en un point z', de cette face, superposé à z de la face

dans $\mathfrak{R}_0'$. **a** zéros de f' intérieurs à $\mathfrak{A}$ fournissent **2a** zéros de la différentielle abélienne non situés sur les courbes $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_p$ de passage. Au contraire, les zéros de f' situés sur la frontière de $\mathfrak{A}$ et les zéros de la différentielle situés sur les courbes $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_p$ se correspondent, d'une manière biunivoque. Il y a donc b zéros de Rdr sur $\Gamma_0, \ldots, \Gamma_p$. Au total, le nombre $2p-2$ des zéros de Rdr est donc bien égal à $(2a+b)$ comme on l'avait annoncé.

11. - A cause de l'importance, pour la suite, de la relation $2a+b=2(p-1)$, nous allons en donner une deuxième démonstration basée sur les éléments classiques de la théorie des fonctions.

Le nombre des zéros simples (ou équivalents) de $f'(z)$ est, comme on sait, égal à l'intégrale:

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_0, \ldots, C_p} \frac{f''(z)}{f'(z)}\, dz$$

étendue au contour de $\mathfrak{A}$ décrit dans le sens positif, c'est-à-dire $N=\frac{1}{2\pi}$ [var. totale $\arg f'(z)$ le long de la frontière de $\mathfrak{A}$] à condition qu'il n'y ait pas de zéros de f' sur la frontière de $\mathfrak{A}$. Lorsqu'il y a b zéros de f' situés sur la frontière avec les notations précédentes, le nombre a des zéros *intérieurs* à $\mathfrak{A}$ sera égal à l'intégrale précédente calculée *le long de la frontière de* $\mathfrak{A}$ *excepté au voisinage des b zéros de f' situés sur cette frontière qu'on évitera par des demi-cercles infiniment petits décrits au voisinage de ces b zéros et tous tracés dans l'intérieur de* $\mathfrak{A}$ *de façon que le nouveau contour d'intégration laisse à l'extérieur les b zéros en question.* Evaluons maintenant la variation totale de $\arg f'(z)$ le long du nouveau contour. On a vu que en tout point d'une C_K on a:

$$f'(z)\cdot\frac{dz}{ds}=-i\frac{dU}{dn}.$$

D'abord, sur C_0, il n'y a certainement aucun zéro de f' et $\frac{dU}{dn}>0$ partout; le point $-i\frac{dU}{dn}$ reste toujours sur l'axe imaginaire négatif et

$$\arg f'(z)=-\frac{\pi}{2}-\arg\frac{dz}{ds}.$$

---

supérieure se faisant par $f(z')=-\overline{f(z)}$, car, sur C_0, $f(z)$ a sa partie réelle nulle ($\bar{f}$ est la valeur conjuguée de f). De même $r(z')=\overline{r(z)}$, $s(z')=\overline{s(z)}$ car r et s sont réelles sur les C_i. Il en résulte qu'à tout zéro de f' intérieur à $\mathfrak{A}$ situé sur la face supérieure correspond un zéro superposé, du même ordre, sur la face inférieure.

Au point de vue adopté ici, les 2 faces du disque constituent *une surface de Riemann générale* (du type Beltrami-Clifford-Klein) de la *courbe algébrique* $A(r,s)=0$. On verrait sans peine que les fonctions fondamentales $U_1, \ldots, U_p$ introduites au n.° 2, fournissent, avec leurs conjuguées V_1, $V_2, \ldots, V_p$, les *intégrales normales de première espèce* J_1, $J_2, \ldots, J_p$ de $A(r,s)=0$ par les formules $2J_K=U_K+iV_K$ etc. Nous aurons l'occasion d'utiliser ces relations dans un mémoire ultérieur ou nous étudierons les surfaces σ générales et leur représentation canonique.

Or $\arg \frac{dz}{ds} = \alpha$, angle avec l'axe réel Ox, de la demi-tangente positive à C_0 au point z variable. Donc:

$$\text{var. totale} \arg f'(z) = -\text{var. totale} \arg \frac{dz}{ds} = -2\pi.$$

Sur tout contour C_K ne renfermant aucun zéro de $f'(z)$, $\frac{dU}{dn}$ conserve un signe constant et le raisonnement précédent montre que:

$$\text{var. totale} \arg f'(z) = -\text{var. totale} \arg \frac{dz}{ds} = +2\pi.$$

Car, ici, C_K étant décrit dans le sens positif par rapport à $\mathfrak{A}$ est décrit dans le sens des aiguilles d'une montre et la variation totale de l'argument de la tangente positive est (-2π).

Donc, si toutes les racines de f' sont intérieures à $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire si $b=0$ on aura

$$a = \frac{1}{2\pi}[-2\pi + \text{p.}\ 2\pi] = p-1$$

la contribution de C_0 à la variation totale de $\arg f'(z)$ étant -2π et celles des p contours $C_1, \ldots, C_p$ étant p. 2π. Ainsi se trouve démontrée très simplement la formule dans le cas $b=0$ envisagé par M. DE LA VALLÉE-POUSSIN.

Examinons maintenant l'intégrale var. $\arg f'(z)$ *le long de C_K lorsque sur C_K se trouvent des zéros simples de $f'(z)$*. En reprenant la formule:

$$f'(z) \cdot \frac{dz}{ds} = -i \frac{dU}{dn}$$

α_K désignant l'angle avec Ox de la tangente positive à C_K en z, on a $\frac{dz}{ds} = e^{i\alpha_K}$ et par suite:

$$f'(z) = e^{-i\left(\alpha_K + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{dU}{dn}.$$

On a vu plus haut que le signe de $\frac{dU}{dn}$ ne change qu'au passage par les zéros de $f'(z)$. On a donc entre 2 points quelconques de C_K limitant un arc sans zéro de f'

$$\text{var.} \arg f'(z) = -\text{var}\ \alpha_K.$$

Examinons ce qui se passe lorsqu'on évite un zéro z_0 de $f'(z)$ par un demi-cercle de centre z_0, situé dans $\mathfrak{A}$, et de rayon infiniment petit. Il est clair que si z_0 est zéro d'ordre ν de f', l'argument de f' diminue de $\nu\pi$, car sur le demi-cercle envisagé l'argument de $z-z_0$ diminue de π à cause du sens de parcours obligé sur C_K. On aura donc:

$$\text{var. totale} \arg f'(z) \text{ sur } C_K = -\sum \text{var}\ \alpha_K - \pi \sum \nu$$

la somme $\sum \text{var}\ \alpha_K$ s'étendant à tous les arcs, en nombre fini, délimités sur C_K par les zéros de f', et la somme $\sum \nu$ s'étendant à tous les zéros de f' situés sur C_K.

Evidemment $\sum \text{var}\, a_K = -2\pi$ et $\sum \nu = b_K$, b_K étant le nombre des zéros simples (ou équivalents) situés sur C_K.

Appliquant le résultat précédent à C_0, $C_1, \ldots, C_p$ et ajoutant, nous aurons:

$$\text{var. totale arg} f' \text{ sur frontière de } \mathfrak{A} = \text{p.}\, 2\pi - 2\pi - \pi \cdot b$$

la contribution de C_0 au deuxième membre étant (-2π) et chacun des $C_1, \ldots C_p$ contribuant pour $(+2\pi)$, leur contribution d'ensemble fait (p. 2π).

Le nombre a des zéros simples (ou équivalents) de f' intérieurs à $\mathfrak{A}$ sera donc:

$$a = \frac{1}{2\pi} [\text{var. totale arg. } f' \text{ sur frontière de } \mathfrak{A}] = p - 1 - \frac{b}{2}$$

ce qui donne la relation à démontrer:

$$2a + b = 2p - 2$$

entre le nombre $\mathfrak{a}$ des zéros intérieurs et celui $\mathfrak{b}$ des zéros frontière de f', chacun d'eux compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

12. - La relation fondamentale $2a + b = 2p - 2$ prouve que *le nombre des zéros simples de $F'(z)$ situés sur les frontières de $\mathfrak{A}$ est toujours pair*, il en est de même du *nombre des points de ramification* ([9]) *situés aux frontières de σ*. Nous allons, dans le chapitre suivant, étudier en détail le cas où $b = 0$. Pour le cas général, nous montrerons dans un mémoire ultérieur que toutes les distributions par couples des racines de F' sur les frontières sont possibles aux restrictions près signalées au n.° 4, et nous n'y insisterons pas ici. Mais remarquons dès maintenant que, en vertu du n.° 5, la présence d'un seul feuillet de σ projeté entre γ_p et γ_{p-1} exclut la présence de tout point de ramification de σ dont le module soit $< e^{\lambda_{p-1}}$, c'est-à-dire *que les valeurs de $F(z)$ en toutes les racines de $F'(z) = 0$ sont en module $\geqslant e^{\lambda_{p-1}}$*.

13. - *Connexion de σ.* — La surface σ étant la transformée biunivoque de $\mathfrak{A}$ par $\zeta = F(z)$, aura les mêmes propriétés de connexion que $\mathfrak{A}$: 1°) *Son ordre de connexion est* $(p+1)$; 2°) $\mathfrak{A}$ est morcelée par toute courbe fermée dont les points sont tous intérieurs à $\mathfrak{A}$, il en sera donc de même de σ: il est donc impossible de tracer sur σ une rétrosection ne la morcelant pas; on dit quelquefois que σ, comme $\mathfrak{A}$, est de *genre zéro* (schlichtartig) pour résumer cette deuxième propriété.

([9]) Cette expression est, à vrai dire, impropre ici, car un point ne peut être un point de ramification (ici ils sont tous algébriques), que s'il est *intérieur à σ*, mais il faut entendre par là un point de ramification β_0 pour la surface qu'on obtiendrait en adjoignant à $\mathfrak{A}$ tout le voisinage du zéro b_0 de F' qui a fourni le point β_0 envisagé, c'est-à-dire l'intérieur d'un cercle suffisamment petit de centre b_0; β_0 serait, si l'on veut, point de ramification pour le *prolongement analytique* de σ *dans tout le voisinage de β_0*.

Remarque. - Il est clair, sans insister, que 2 aires $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_1$ en correspondance conforme et biunivoque, conduisent à la même aire σ, à une rotation près autour de l'origine.

En effet, si $z=g(z_1)$ est la fonction, holomorphe dans $\mathfrak{A}_1$, qui réalise la correspondance conforme entre $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_1$, la fonction $F_1(z_1)$ de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN correspondant à $\mathfrak{A}_1$ sera évidemment, à un facteur près de module 1, $F_1(z_1)=F[g(z_1)]$, $F(z)$ étant celle qui correspond à $\mathfrak{A}$. Par suite, la surface de Riemann engendrée par $\zeta=F_1(z_1)$ est identique à celle qu'engendre $\zeta=F(z)$ à une rotation près autour de l'origine.

14. - *Conclusion. Résumé des propriétés de σ. Réciproques.* — En résumé, σ est une surface de Riemann à p *feuillets* limitée extérieurement par la courbe fermée γ_0 composée du cercle $|\zeta|=1$ parcouru p fois de suite dans le sens positif ([10]). Intérieurement, elle est limitée par p courbes fermées γ_1, γ_2,.... γ_p. La courbe γ_i se projette sur le cercle $|\zeta|=e^{\lambda_i}$; elle peut avoir des points de rebroussement, le point ζ qui la décrit dans le sens positif par rapport a σ pouvant ne pas tourner toujours dans le même sens autour de l'origine O, mais ces points sont toujours en nombre pair, en sorte que la variation totale de l'argument du point ζ qui décrit γ_i une et une seule fois est toujours égale à (-2π), cet argument pouvant présenter des phases de croissance intercalées entre les phases de décroissance. Ce qu'on vient de dire est vrai pour $i=1, 2,...., p-1$. Nous supposons ici $1>e^{\lambda_1}\geqslant e^{\lambda_2}....\geqslant e^{\lambda_p}$; il y a p feuillets de σ projetés entre γ_0 et γ_1, $(p-1)$ entre γ_1 et γ_2,...., 1 entre γ_{p-1} et γ_p; il n'y a aucun feuillet à l'intérieur de γ_p qui se confond toujours avec le cercle $|\zeta|=e^{\lambda_p}$, c'est-à-dire que sur γ_p *l'argument de ζ décroît constamment et varie* au total de (-2π). *Tous les nombres λ_1, λ_2,...., λ_p sont négatifs finis et* $\neq 0$. Certains peuvent être égaux. σ présente *a points de ramification simples intérieurs* (un point de ramification d'ordre K où se permute un cycle de $(K+1)$ feuillets de σ compte pour K points simples) *et b points de ramification simples sur la frontière* (ces points deviendraient points de ramification intérieurs si on prolongeait analytiquement σ dans tout le voisinage de ces points-frontière). b peut être nul mais on a toujours la *relation fondamentale*:

$$2a+b=2p-2.$$

Les connexions des feuillets de σ entre eux sont telles que le *genre de σ est nul* (toute rétrosection morcelle σ); le nombre des contours étant $p+1$, *l'ordre de connexion de σ sera* $(p+1)$.

([10]) L'argument du point ζ qui décrit une et une seule fois γ_0 dans le sens positif est une fonction constamment croissante dont la variation totale est $(+\text{p}.\,2\pi)$.

15. - Considérons à *priori* une surface de Riemann σ étalée sur le plan ζ et possédant toutes les propriétés résumées dans le numéro précédent. En vertu des théorèmes généraux sur la représentation conforme des surfaces de Riemann ([11]), on peut toujours, d'une infinité de manières, trouver une fonction $z(\zeta)$, holomorphe à l'intérieur de σ, prenant des valeurs distinctes en des points distincts de σ, de façon que, lorsque ζ décrira σ, le point z décrira dans le plan z une aire simple $\mathfrak{A}$, ne se recouvrant nulle part. [Cette aire $\mathfrak{A}$ de connexion $(p+1)$ peut d'ailleurs être choisie dans un des types canoniques introduits par MM. SCHOTTKY, HILBERT, KOEBE: Aires limitées par des cercles ou des arcs de cercle ou des segments de droites parallèles]. Il y a correspondance biunivoque et conforme entre les intérieurs de $\mathfrak{A}$ et σ; les contours de σ étant analytiques et ceux de $\mathfrak{A}$ pouvant être pris tels (si $\mathfrak{A}$ est prise dans un des types canoniques) la correspondance sera encore biunivoque et conforme entre les frontières ([12]). Par conséquent, il existe dans le plan z une aire plane $\mathfrak{A}$ (et même une infinité), d'ordre de connexion $(p+1)$ limitée par $p+1$ contours analytiques C_0, $C_1, \dots, C_p$, en correspondance conforme avec l'aire donnée σ par une fonction $\zeta=\zeta(z)$, holomorphe dans $\mathfrak{A}$ et sur toutes les frontières C_i.

Il est clair que cette fonction $\zeta=\zeta(z)$ aura toutes les propriétés de $F(z)$. En effet, sur C_0 contour extérieur de $\mathfrak{A}$, on a $|\zeta|=1$ et lorsque z décrit C_0 dans le sens positif son correspondant ζ décrira γ_0 dans le sens positif, donc arg ζ croîtra certainement pour varier au total de (p. 2π).

Sur C_i contour intérieur de $\mathfrak{A}$ $(i=1, 2, \dots, p)$ on aura $|\zeta|=e^{\lambda_i}$ avec $\lambda_i<0$, car γ_i, correspondant de C_i, a un rayon <1; et lorsque z décrit C_i dans le sens positif par rapport à $\mathfrak{A}$, ζ décrira γ_i dans le sens positif par rapport à σ, donc la variation totale de $\arg\zeta$ sera (-2π). Or on a vu (L. V. P. 1, n.° 16) que ces propriétés déterminent la fonction $F(z)$ à un facteur constant près de module 1. Donc $\zeta(z)=F(z)$ fonction caractéristique de l'aire $\mathfrak{A}$.

Par conséquent, *les propriétés de σ énumérées au n.° 14 sont bien caractéristiques des surfaces de Riemann provenant, par $\zeta=F(z)$, des aires planes $\mathfrak{A}$ de connexion $p+1$.*

16. - On peut donc *considérer σ comme une aire de Riemann canonique correspondant conformément et biunivoquement à toute la classe* ($\mathfrak{A}$) *des aires du plan z représentables conformément et biunivoquement sur une aire quelconque $\mathfrak{A}$ donnée à priori.* σ n'est, il est vrai, déterminée qu'à une

([11]) V. p. ex. KOEBE: *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven* (3$^{\text{te}}$ Mitteilung), dans Göttinger Nachrichten 11 Juillet 1908, 3$^{\text{ème}}$ page « Ein allgemeines Abbildungsprinzip ».

([12]) En un point de rebroussement d'une γ_i frontière de σ, ceci se précise comme d'habitude en considérant le prolongement analytique de σ autour du point considéré.

rotation près autour de l'origine ce qui ne présente aucun inconvénient et pourrait d'ailleurs être précisé de plus d'une manière. Pour que 2 aires du plan z soient représentables conformément l'une sur l'autre, il faut et il suffit que leurs aires σ soient identiques, c'est-à-dire se déduisent l'une de l'autre par rotation autour de l'origine.

17. - Nous n'insisterons pas ici sur les applications qu'on peut faire de cette σ à la recherche des aires $\mathfrak{A}$ admettant des transformations conformes automorphes (directes ou inverses). Constatons seulement que σ dépend essentiellement de $3p-3$ paramètres réels. Nous avons d'abord $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ qui sont p nombres réels négatifs; nous avons ensuite a points de ramification intérieurs équivalant à $2a$ paramètres réels, il y a enfin les arguments des b points de ramification, frontière, soit encore b paramètres réels. Au total, cela fait

$$p+2a+b=3p-2, \quad \text{car} \quad 2a+b=2p-2.$$

Mais σ n'étant déterminée qu'à une rotation près, il y a un paramètre réel superflu; restent donc essentiellement $3p-3$ paramètres réels correspondant comme on sait aux $3p-3$ modules réels de la classe des courbes algébriques $A(r, s)=0$ correspondant à $\mathfrak{A}$ suivant la méthode de M. SCHOTTKY signalée au n.° 7.

CHAPITRE II.

Étude particulière du cas où σ n'a que des points de ramification intérieurs. Prolongements de σ hors de ses frontières. Représentations canoniques correspondantes.

18. - C'est le cas étudié par M. DE LA VALLÉE-POUSSIN dans son premier Mémoire. Avec les notations précédentes il vient $a=p-1$. Les p courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, frontières intérieures de σ, sont des cercles concentriques à l'origine et situés *chacun sur un des feuillets de la surface.* La frontière extérieure γ_0 se compose du cercle unité parcouru p fois de suite dans le sens trigonométrique (sens positif).

Nous pourrons toujours numéroter les feuillets de telle façon que, *partant d'un certain point ζ_1 de γ_0 fixé à l'avance et situé sur le premier feuillet,* on revienne au point ζ_2 superposé à ζ_1 sur le *deuxième feuillet après un tour positif* décrit sur le cercle trigonométrique, puis au point ζ_3 superposé à ζ_1 sur le *troisième feuillet après deux tours,* etc....., enfin au point ζ_p superposé à ζ_1 *sur le p^e feuillet après $(p-1)$ tours*; si l'on exécute enfin le p^e tour on reviendra au point initial ζ_1 du premier feuillet.

Les p feuillets sont ainsi reliés à γ_0 et d'autre part ils sont reliés entre eux 2 à 2 par les points de ramification intérieurs. En supposant ces points de ramification simples, c'est-à-dire correspondant à des racines simples de $F'(z)=0$, on reconnaît aussitôt que chaque point de ramification unit 2 feuillets de σ et 2 seulement. D'autre part, σ étant d'un seul tenant, on peut passer d'un feuillet quelconque de σ à un autre feuillet quelconque sans sortir de σ. Ceci exige que, sur chaque feuillet de σ, il y ait au moins un point de ramification. Nous reviendrons ultérieurement, sur la distribution de ces points et sur les lignes de croisement de σ qui uniront les points de ramification à des points de γ_0.

19. - Prolongement de σ au-delà des frontières intérieures. — On vient de voir que σ est limitée, vers l'intérieur, par p cercles $\gamma_1, \gamma_2,...., \gamma_p$ situés chacun sur un feuillet différent de σ.

Nous adjoignons à σ, sur chaque feuillet, les p disques circulaires (γ_1), (γ_2),...., (γ_p), intérieurs respectivement à $\gamma_1, \gamma_2,...., \gamma_p$.

Nous obtenons ainsi une surface de Riemann σ_1.

Au point de vue l'Analysis situs, chacun des disques est homéomorphe à chacune des aires intérieures à $C_1, C_2,...., C_p$ dans le plan z; par conséquent l'intérieur de $\mathfrak{A}$ étant homéomorphe à l'intérieur de σ, la surface σ_1 sera homéomorphe à l'intérieur de C_0, c'est donc *une aire de Riemann simplement connexe à p feuillets limitée par la courbe fermée* γ_0. Chacun des p feuillets de σ_1 recouvre tout l'intérieur du cercle trigonométrique. Ils sont réunis entre eux comme l'étaient les p feuillets de σ, aucune connexion ne s'établissant par l'intérieur des disques (γ_1), (γ_2),...., (γ_p). Enfin si l'on décrit γ_0 dans le sens positif à partir du point ζ_1 du premier feuillet (voir n.° 18), on passe successivement sur le deuxième, le troisième,.... le p^e feuillet, et après p tours autour de O on revient en ζ_1.

20. - Prolongements à l'extérieur de γ_0. — On pourrait, dès maintenant, faire une représentation conforme de σ_1 sur une aire canonique simplement connexe d'un plan u, d'ou résulterait une représentation de σ, partie de σ_1. Mais la question s'éclaire davantage lorsqu'on considère σ_1 elle-même comme partie *d'une surface de Riemann algébrique fermée de genre zéro recouvrant tout le plan* ζ. Nous ferons de deux manières ce prolongement de σ_1 hors de γ_0.

21. - Premier prolongement de σ_1 hors de γ_0. — Adjoignons à σ_1, l'élément de surface de Riemann σ_2 décrit par le point $\zeta=w^p$ lorsque w décrit le domaine $|w|\geqslant 1$. Cet élément σ_2 est simplement connexe et il est limité par la même courbe γ_0 que σ_1. En effet, lorsque w décrit la frontière $|w|=1$ avec arg w croissant, le point $\zeta=w^p$ décrit le cercle trigonométrique p fois de suite dans le sens positif et on pourra numéroter les feuillets de σ_2 à partir du point ζ_1 du premier feuillet de façon qu'en décrivant la frontière de σ_2 on passe de ζ_1

à ζ_2 (deuxième feuillet) puis à ζ_3,.... puis à ζ_p et enfin à ζ_1, (après 1, 2,.... p tours autour de O dans le sens positif) (les points $\zeta_1, \zeta_2,...., \zeta_p$ sont ceux du n.° 18).

Au point de vue de l'Analysis situs, σ_2 est homéomorphe à l'extérieur de C_0 et σ_1 à l'intérieur de C_0.

Donc, en soudant σ_1 et σ_2 par la courbe γ_0, on obtient une surface de Riemann algébrique fermée Σ_1 homéomorphe au plan z complété par le point à l'infini. Σ_1 possède p feuillets dont chacun recouvre tout le plan, elle a $p-1$ points de ramification simples (ou équivalents) qui sont ceux de σ, et un point de ramification multiple à l'infini ($\zeta=\infty$) comptant pour $p-1$ points simples. σ et σ_1 sont des parties de Σ_1. Σ_1 est de genre zéro puisqu'elle est homéomorphe au plan complet z. Elle est divisée en 2 parties simplement connexes σ_1 et σ_2 par γ_0 (cercle trigonométrique p fois parcouru).

22. - Deuxième prolongement de σ_1 hors de γ_0. — Au lieu de prolonger σ_1 par σ_2 qui ne dépend en aucune manière de la nature géométrique de σ_1 ou de σ, on peut faire ce prolongement d'une façon plus homogène. Il n'y a qu'à prendre la *symétrique* σ_1' *de* σ_1 *par rapport à sa frontière* γ_0, deux points correspondants ζ et ζ' de σ_1 et σ_1' *étant toujours symétriques par rapport au cercle trigonométrique* $\left[\zeta'=\frac{1}{\bar{\zeta}}\ (\bar{\zeta}\text{ conjugué de }\zeta)\right]$ *et toujours situés sur le même feuillet.* Il est clair que σ_1' est, comme σ_1, simplement connexe; elle est limitée par γ_0, comme σ_1; elle recouvre p fois l'extérieur du cercle unité. Par conséquent, en soudant σ_1 et σ_1' par la courbe γ_0 on obtiendra une surface algébrique fermée Σ_2 homéomorphe au plan complet z. Σ_2 possède p feuillets dont chacun recouvre tout le plan; elle a d'une part $(p-1)$ points de ramification simples (ou équivalents) qui sont ceux de σ, et elle a d'autre part $(p-1)$ points de ramification symétriques de ceux-là par rapport à γ_0 et établissant respectivement la connexion entre les mêmes feuillets que les points de σ dont ils sont les symétriques. Σ_2 est de genre zéro; enfin la courbe γ_0 partage Σ_2 en 2 parties symétriques σ_1 et σ_1'.

23. - Représentation conforme de Σ_1 sur un plan. — D'après un théorème général de SCHWARZ toute surface de Riemann fermée de *genre zéro* (c'est-à-dire morcelée par toute courbe fermée tracée sur elle) peut être mise en correspondance conforme avec un *plan complet* (plan complété par son point à l'infini). Et pour déterminer cette correspondance on peut se donner arbitrairement 3 couples de points correspondants de la surface et du plan (ou l'équivalent dans les cas limites). On peut dire encore que la fonction réalisant la correspondance dépend de 3 constantes complexes arbitraires. Soit ζ le point qui décrit Σ_1, soit u le point correspondant du plan dans la représentation précédente. $u(\zeta)$ sera *holomorphe sur tout* Σ_1 (elle sera non uniforme dans le plan ζ) et lorsque ζ décrira Σ_1, $u(\zeta)$ décrira le plan complet u. Pour normaliser la correspondance nous ferons correspondre au point $\zeta=\infty$ de Σ_1 le point $u=\infty$ du plan complet. La fonction $u(\zeta)$, envisagée dans le *plan* ζ, a p determinations finies en chaque point; elle présentera *au point* $\zeta=\infty$ *du plan* ζ un point critique d'ordre $p-1$ autour duquel se permutent circulairement ses p déterminations qui deviennent d'ailleurs toutes infinies pour $\zeta=\infty$; elle présentera des points critiques simples aux ζ projections des $p-1$ points de ramification à distance finie de σ. La fonction $u(\zeta)$ est une fonction algébrique de ζ. Son inverse $\zeta(u)$ est une fonction uniforme de u, puisque le domaine décrit par u en correspondance avec le domaine Σ_1 de ζ se compose du plan *u à un seul feuillet.* $\zeta(u)$ est holomorphe en tout u à distance finie, $\zeta(u)$ devient infinie lorsque u devient infini. Comme les points à l'infini du plan u et de Σ_1 se correspondent, on voit que $\zeta(u)$ admet le point à l'infini du plan u comme pôle d'ordre p. *C'est donc un polynome de degré* $p \cdot \zeta=P(u)$.

24. - **Classe de polynomes fournie par** Σ_1. — Nous appellerons $\zeta=P_0(u)$ l'un quelconque des polynomes faisant la représentation normalisée précédente. *Tout autre polynome réalisant une telle représentation sera de la forme*

$$\zeta=P_0(au+b).$$

En effet si $u=u_0(\zeta)$ est la fonction inverse de $\zeta=P_0(u)$, et si $u=u_1(\zeta)$ est une représentation conforme quelconque de Σ_1 sur le plan u faisant correspondre $u=\infty$ et $\zeta=\infty$, on voit aussitôt que u_1 sera fonction holomorphe de u_0 pour tout u_0 fini et réciproquement. De plus si u_0 devient infini, u_1 le devient et réciproquement. Donc u_0 sera une *fonction linéaire* de u_1,

$$u_0=au_1+b,$$

(a et b constantes complexes arbitraires) et $\zeta=P_0(u)$ étant la fonction inverse de $u=u_0(\zeta)$ il est clair que $\zeta=P_0(au+b)$ sera la fonction inverse de $u=u_1(\zeta)$. Tout polynome normalisé est donc du type $\zeta=P_0(au+b)$. Nous disons que *tous ces polynomes appartiennent à la même classe*, et l'on voit que cette classe est parfaitement déterminée par Σ_1 c'est-à-dire par σ. Nous conviendrons de normaliser la classe en imposant à tous les polynomes $P(u)$ d'avoir un *coefficient de u^p égal à un en module.* Il est clair qu'alors on devra avoir $|a|=1$ pour que $P_0(au+b)$ satisfasse à cette condition en même temps que $P_0(u)$. Il restera donc 3 *constantes réelles arbitraires* θ, b_1, b_2 dans la classe d'expression générale

$$P(u)=P_0[ue^{i\theta}+b] \qquad \text{où} \qquad b=b_1+ib_2.$$

25. - **Représentation conforme de σ sur une aire canonique limitée par des cassiniennes** (L. V. P. 1). — Considérons l'un des polynomes $P(u)$ de la classe que détermine Σ_1: la fonction inverse de $\zeta=P(u)$, soit $u=\pi(\zeta)$, est holomorphe sur Σ_1 et admet $\zeta=\infty$ pour pôle simple; elle est en particulier holomorphe sur σ

qui est intérieure à Σ_1. L'équation $P(u)=F(z)$ définit donc une fonction de z dont l'expression est $u=\pi[F(z)]$. Elle est évidemment *holomorphe en tout point intérieur à* $\mathfrak{A}$ *et sur la frontière de* $\mathfrak{A}$. Lorsque z décrit $\mathfrak{A}$, $\zeta=F(z)$ décrit σ, et $u=\pi[F(z)]$ décrira la partie D du plan u que décrit $u=\pi(\zeta)$ lorsque ζ décrit σ, partie de Σ_1. A 2 points distincts de $\mathfrak{A}$ correspondent 2 points distincts de σ, donc 2 points distincts de l'aire D du plan u. L'aire D ne se recouvre nulle part, elle est limitée par $p+1$ contours analytiques correspondant biunivoquement aux contours C_0, C_1, C_2,...., C_p de $\mathfrak{A}$. Nous les appellerons K_0, K_1,....K_p. Il y a donc correspondance biunivoque entre les aires D et $\mathfrak{A}$ et leurs frontières, les 2 fonctions $u=\pi[F(z)]$ et $z=\Phi[P(u)]$ [où $u=\pi(\zeta)$ est l'inverse de $\zeta=P(u)$ et $z=\Phi(\zeta)$ l'inverse de $\zeta=F(z)$] étant les fonctions holomorphes et univalentes respectivement dans $\mathfrak{A}$ et D et sur leurs contours qui assurent cette correspondance.

26. - Les courbes K_0, K_1,...., K_p proviennent de γ_0, γ_1,...., γ_p par la représentation conforme $u=\pi(\zeta)$, fonction inverse du polynome $\zeta=P(u)$.

Lorsque ζ décrit une des courbes γ_i $(i=1, 2,...., p)$ frontière d'un disque (γ_i) de Σ_1 contenant un point de Σ_1 superposé à l'origine, $u=\pi(\zeta)$ décrira évidemment une aire simple limitée par une courbe analytique fermée K_i entourant une racine simple u_i et une seule du polynome $P(u)$. K_i est un arc fermé de la courbe $|P(u)|=e^{\lambda_i}$, l'arc entourant la racine u_i. Avec M. DE LA VALLÉE-POUSSIN, nous dirons que chacune des courbes K_1, K_2,...., K_p est une *cassinienne* entourant une et une seule racine simple du polynome $P(u)$. Au contraire, lorsque ζ décrira γ_0, frontière de la surface σ_1, partie de Σ_1 qui contient à son intérieur la surface σ et tous les disques (γ_1).... (γ_p), le point $u=\pi(\zeta)$ décrira une courbe analytique fermée K_0 sans point double, entourant une aire simple D_1, qui contiendra à son intérieur l'aire D et les p aires limitées par K_1, K_2,...., K_p. K_0 représente la totalité de la courbe dont l'équation est:

$$|P(u)|=1.$$

C'est une cassinienne entourant les p racines du polynome $P(u)$.

L'aire canonique D sur laquelle on fait la représentation conforme de $\mathfrak{A}$ par $u=\pi[F(z)]$ est donc une *aire limitée extérieurement par la cassinienne* K_0 d'équation $|P(u)|=1$ et par p cassiniennes intérieures K_1,...., K_p arcs fermés des courbes d'équations respectives $|P(u)|=e^{\lambda_1}$, e^{λ_2},...., e^{λ_p}, entourant chacun une racine et une seule de $P(u)$.

27. - On a vu au n.° 24 que les polynomes $P(u)$, dépendent encore de 3 constantes arbitraires réelles. L'aire canonique D sur laquelle on représente $\mathfrak{A}$ n'est donc déterminée qu'à une transformation près du type $[u, ue^{i\theta}+b]$, c'est-à-dire *à un déplacement euclidien quelconque près du plan* u. Si donc D

n'est pas déterminée de façon unique, sa forme et sa grandeur le sont. À chaque domaine $\mathfrak{A}$, dont la fonction F a une dérivée F' sans zéro frontière, on fait donc correspondre conformément un domaine D du plan u, *dont la forme et la grandeur sont parfaitement déterminées.* Tous les domaines du plan u directement égaux à D forment une classe. Il est clair que tous les domaines représentables conformément sur $\mathfrak{A}$ fourniront la même surface σ et conduiront au même domaine canonique D. Par conséquent, tous les domaines du plan z représentables conformément sur un domaine $\mathfrak{A}$ donné de connexion $(p+1)$ et du type précédent forment une *classe* à laquelle correspond par ce qui précède une *classe de domaines canoniques D, tous directement égaux.*

On peut encore dire que la représentation conforme $u=\pi[F(z)]$ entre z et u, réalisée dans ce qui précéde, a eu pour effet de *transformer la correspondance conforme et biunivoque* qui existe dans le plan z entre deux domaines quelconques de la classe de $\mathfrak{A}$, en un déplacement arbitraire du plan u, c'est-à-dire en une transformation linéaire $(u \,|\, ue^{i\theta}+b)$ arbitraire entre deux domaines quelconques de la classe de D dans le plan u. L'effet de la représentation conforme $u=\pi[F(z)]$ a donc été de *linéariser la correspondance conforme entre aires de la classe* $(\mathfrak{A})$.

Nous n'insisterons pas davantage sur l'étude de ce cas et sur les particularités qu'il peut offrir, car on a reconnu, dans les domaines canoniques D qu'on vient d'obtenir, précisément les domaines canoniques introduit par M. DE LA VALLÉE-POUSSIN dans son premier mémoire. Il nous suffira de renvoyer à ce mémoire pour les cas particuliers, notamment pour les D invariants par des déplacements (ou des symétries) du type introduit précédemment, lesquels correspondent aux $\mathfrak{A}$ admettant des transformations automorphes conformes biunivoques (ou des symétries généralisées). Nous nous contenterons ici d'avoir rattaché le travail de M. DE LA VALLÉE-POUSSIN aux résultats classiques sur les surfaces de Riemann algébriques et leur représentation conforme et cela de la façon la plus simple grâce à l'introduction des surfaces σ, σ_1, Σ_1.

28. - **Représentation conforme de Σ_2 sur un plan complet v.** — Le prolongement de σ par σ_1 et Σ_2 opéré au n.° 22, grâce à une symétrie relative à γ_0, va nous conduire très simplement à un nouveau type canonique d'aire D' sur lequel pourra se représenter conformément $\mathfrak{A}$.

Considérons en effet la surface simplement connexe σ_1 à p feuillets limitée par γ_0, on peut la représenter d'une manière conforme et biunivoque sur l'intérieur du cercle $|v| \leqslant 1$, par une fonction $v=v(\zeta)$ holomorphe dans σ_1 et sur sa frontière; la fonction inverse $\zeta=\zeta(v)$ étant holomorphe dans $|v| \leqslant 1$ et sur son contour. La fonction $v=v(\zeta)$ n'est d'ailleurs pas unique. Toutes les fonctions v satisfaisant à la question se déduiront de l'une d'entre elles v_0 par une substitution linéaire $v=\frac{v_0-a}{1-\bar{a}v_0}\,e^{i\theta}$ conservant le cercle $|v| \leqslant 1$.

Ces substitutions sont connues [13] et dépendent de 3 constantes réelles arbitraires.

29. - Or la relation $v=v(\zeta)$ établit une correspondance conforme $(1, p)$ de l'intérieur du cercle trigonométrique en lui-même. En effet, envisagée comme fonction de ζ, $v(\zeta)$ est définie dans le cercle $|\zeta| \leqslant 1$, en chaque point elle a p déterminations. Si ce point ζ n'est pas projection d'un point de ramification de σ, ces p déterminations sont distinctes et toutes <1, en module. Autour d'un point ζ projection d'un tel point de ramification, 2 des déterminations précédentes se permutent qui deviennent égales au point ζ considéré. $v(\zeta)$ est donc dans $|\zeta| \leqslant 1$ une fonction analytique à p déterminations ne présentant que $p-1$ points critiques simples. Enfin, lorsque $|\zeta|$ devient $=1$, les p déterminations sont distinctes et égales à 1 en module. Au contraire, $\zeta=\zeta(v)$ est holomorphe et <1 dans $|v|<1$ et devient $=1$ pour $|v|=1$ en restant holomorphe. J'ai montré [v. *Principes d'Analyse*, I, pages 54-55] que $\zeta=\zeta(v)$ *est alors une fonction rationnelle à cercle fondamental de degré* p transformant l'intérieur du cercle fondamental $|v|<1$ en son intérieur p fois recouvert, ici en σ_1. On peut d'ailleurs le démontrer directement comme il suit. $\zeta=\zeta(v)$ étant holomorphe dans $|v| \leqslant 1$ et prenant sur $|v|=1$ des valeurs $|\zeta|=1$ sera prolongeable hors de $|v| \leqslant 1$ par symétrie. A 2 points v et v' symétriques par rapport à $|v|=1$ correspondent 2 points ζ et ζ' symétriques par rapport à $|\zeta|=1$. On peut dire encore ceci: lorsque v décrit $|v| \leqslant 1$, ζ décrit σ_1 bordée par γ_0; *lorsque* v' *décrira* $|v| \geqslant 1$, *le point* ζ' *décrira la surface de Riemann* σ_1' *symétrique de* σ_1 *par rapport à* γ_0, introduite au n.° 22. Donc $\zeta=\zeta(v)$ sera holomorphe dans tout le plan complété par $v=\infty$ sauf aux p points v' symétriques par rapport à $|v|=1$ des p zéros distincts de $\zeta(v)$; [ces zéros sont distincts car ils correspondent aux p points distincts de σ_1 superposés à l'origine dans le plan ζ]; en ces points, $\zeta(v)$ présentera des pôles simples. Donc $\zeta=\zeta(v)$ est une *fonction rationnelle de degré* p présentant p zéros et p pôles simples distincts; elle conserve le cercle fondamental de rayon 1. Nous la désignerons par $\zeta=R(v)$.

30. - Classe de fonctions rationnelles fournie par Σ_2. — Nous savons que, R_0 étant l'une des fractions rationnelles satisfaisant à la question, toutes les autres sont données par la formule $R(v)=R_0\left[\frac{v-a}{1-\bar{a}v} \cdot e^{i\theta}\right]$, où a représente un nombre complexe quelconque de module <1, $\bar{a}$ son conjugué, θ un nombre réel quelconque. Cela résulte de la remarque faite à la fin du n.° 23.

---

[13] V. p. ex. G. JULIA: *Principes géométriques d'Analyse*, I, page 33, ou bien G. JULIA: *Leçons sur la représentation conforme*, page 30, θ paramètre réel arbitraire, a nombre complexe arbitraire de module <1, $\bar{a}$ son conjugué.

L'aire σ détermine ainsi, par l'intermédiaire de σ_1, une classe de fonctions rationnelles $\zeta = R(v)$, de degré p, dépendant de 3 constantes réelles arbitraires et telles que leurs inverses $v = \varrho(\zeta)$ représentent Σ_2 d'une façon conforme sur le plan complet v, de façon que la courbe γ_0 qui divise Σ_2 en 2 parties symétriques σ_1 et σ_1' se transforme dans le cercle fondamental que nous appellerons K_0' et de façon que les 2 moitiés σ_1 et σ_1' deviennent respectivement l'intérieur et l'extérieur de K_0'.

31. - Représentation conforme de σ sur une aire canonique limitée par le cercle fondamental et par p cassiniennes généralisées. — Nous appellerons ici *cassinienne généralisée une courbe du plan v sur laquelle reste constant le module d'une fonction rationnelle.*

Ces courbes ont fait l'objet de nombreux travaux géométriques. En particulier, lorsque la fraction est du deuxième degré, LAGUERRE (*Oeuvres* tome 2) les a étudiées et nommées cassiniennes. DARBOUX les a ensuite étudiées, notamment p. 66 de son livre: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, et aussi dans sa: *Théorie des surfaces*, tome premier, p. 224 et suivantes de la deuxième édition. Si les a_i et les b_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ sont les zéros et les pôles de la fraction rationnelle, une cassinienne généralisée fait partie de la courbe d'équation cartésienne $\prod_1^p |v - a_i|^2 - \mu^2 \prod_1^p |v - b_i|^2 = 0$, μ étant une constante positive finie et $\neq 0$. C'est une courbe algébrique du degré $2p$.

Lorsque μ est voisin de zéro, ou de l'∞, la courbe précédente se décompose en p cassiniennes généralisées fermées dont chacun entoure un zéro a_i (ou un pôle b_i).

Reprenons alors l'une des fractions rationnelles $\zeta = R(v)$ introduites au n.° 30 et sa fonction inverse $v = \varrho(\zeta)$. Lorsque ζ décrira σ, partie de σ_1, le point v décrira une aire D', partie du cercle $|v| < 1$ qui correspond à σ_1. À chacun des disques $(\gamma_1) \ldots (\gamma_p)$, dont l'adjonction à σ a formé σ_1, correspondra par $v = \varrho(\zeta)$ une aire plane limitée par une courbe analytique *fermée* sans point double *entourant un et un seul zéro simple de $R(v)$*. Nous obtenons ainsi p courbes, sans point commun 2 à 2, que nous appellerons K_1', $K_2', \ldots K_p'$, les p aires $(K_1') \ldots (K_p')$ correspondant aux disques $(\gamma_1) \ldots (\gamma_p)$. Ces courbes $K_1' \ldots K_p'$ sont des *cassiniennes généralisées* correspondant à la fraction rationnelle à cercle fondamental $R(v)$, dont K_0', cercle $|v| = 1$, est la cassinienne fondamentale. On a respectivement $|R(v)| = e^{\lambda_i}$ sur K_i' $(i = 1, 2, \ldots p)$ et $|R(v)| = 1$ sur K_0'.

32. - *En définitive, D', aire canonique, sera limitée par K_0' cercle unité, et par p cassiniennes généralisées $K_1', \ldots, K_p'$, fournies par une fonction rationnelle $R(v)$ de la classe appartenant à l'aire Σ_2, chacune entourant un des zéros de R.* Il reste dans l'aire canonique D', associée à σ, 3 paramètres réels arbitraires, comme dans l'aire D du n.° 21. La variation de ces 3 para-

mètres remplace D' par une aire de la même classe qui s'en déduit par la transformation

$$\left[v \,\middle|\, \frac{v-a}{1-\bar{a}v}\, e^{i\theta}\right]$$

qui conserve l'intérieur du cercle $|v|=1$. Cette transformation représente le *déplacement non euclidien le plus général* de l'espace plan non euclidien de LOBATSCHEFSKI-POINCARÉ représenté par l'intérieur du cercle. On peut donc dire que D', *aire canonique correspondant à* σ, *est déterminée à un déplacement non euclidien près.*

Remarquons d'ailleurs que $\mathfrak{A}$ est représentée d'une manière conforme et biunivoque sur D' (frontières comprises) par la fonction $v=\varrho[F(z)]$, dont la fonction inverse est $z=\Phi[R(v)]$, ces 2 fonctions étant respectivement holomorphes et univalentes dans $\mathfrak{A}$ et dans D', ainsi que sur leurs contours. Tout domaine du plan z appartenant à la *même classe que* $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire représentable conformément sur $\mathfrak{A}$ donnera naissance à la même surface σ et par suite au même domaine canonique D' à un déplacement non euclidien près. Convenons que tous les domaines canoniques D' du plan v déduits de l'un d'entre eux par tous les déplacements non euclidiens de l'intérieur du cercle fondamental

$$\left[v \,\middle|\, \frac{v-a}{1-\bar{a}v}\, e^{i\theta}\right]$$

appartiennent *à la même classe*. Ce qui précède nous permet donc d'associer à la classe ($\mathfrak{A}$) des domaines du plan z représentables conformément sur un domaine $\mathfrak{A}$ (dont la $F'(z)$ n'a pas de zéro frontière) une classe (D') de domaines du plan v se déduisant de l'un d'entre eux D' par une substitution linéaire conservant le cercle fondamental $|v|\leqslant 1$. Tout domaine $\mathfrak{A}$ de la classe ($\mathfrak{A}$) est représentable conformément et biunivoquement sur tout domaine D' de la classe (D'); par cette représentation $v=\varrho[F(z)]$, la *correspondance conforme et biunivoque qui, dans le plan* z, *existe entre* 2 *domaines quelconques de la classe* ($\mathfrak{A}$), est transformée en une *substitution linéaire* (déplacement non euclidien)

$$\left[v \,\middle|\, \frac{v-a}{1-\bar{a}v}\, e^{i\theta}\right]$$

entre 2 domaines quelconques de la classe (D'). L'effet de la représentation conforme $(z\,|\,v)$ est donc de *linéariser* [comme au n.° 27, mais au *sens non euclidien*], *la correspondance conforme entre domaines de la classe* ($\mathfrak{A}$).

33. - Modules d'une classe d'aires ($\mathfrak{A}$). — En effectuant la première représentation canonique (L.V.P.1) le domaine D dépend: 1°) des p indices réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$; 2°) des p racines simples du polynome $P(u)$ [14].

---

[14] Le module du premier coefficient de P étant toujours égal à 1 n'intervient plus dans le domaine D.

Cela donne $p+2p=3p$ paramètres réels dont dépend D. Mais sur ces $3p$ paramètres il y en a 3 d'accessoires qui correspondent au déplacement euclidien arbitraire qu'on peut imprimer à D en restant dans la classe (D) correspondant a la classe $(\mathfrak{A})$. En definitive la classe $(\mathfrak{A})$ ici envisagée dépend des $3p-3$ paramètres réels dont dépend la classe (D). C'est un cas particulier du théorème classique de Riemann sur les modules d'une classe de courbes algébriques. En effet, par les considérations de M. SCHOTTKY rappelées au n.° 7, à toutes les aires de la classe $(\mathfrak{A})$ est associée la classe des courbes algébriques (A) dérivant de la courbe $A(r, s)=0$ à coefficients réels par les substitutions birationnelles à coefficients réels. La courbe $A(r, s)=0$, de genre p, a ses $3p-3$ modules de Riemann réels, donc la classe (A) et par suite la classe $(\mathfrak{A})$ dépend bien de $(3p-3)$ paramètres réels. Il faut noter que toute aire $\mathfrak{A}$, de la classe ici envisagée, est soumise à une restriction (la dérivée de sa fonction $F(z)$ ne s'annule pas sur les frontières); par conséquent *les* $3p-3$ *paramètres réels de la classe* $(\mathfrak{A})$ *envisagée dans ce chapitre ne pourront pas prendre toutes les valeurs,* car nous démontrerons dans un mémoire ultérieur qu'il existe des aires $\mathfrak{A}$ non soumises à cette restriction.

34. - En effectuant de même la deuxième représentation canonique, on verra que le domaine D' dépend: 1°) des p indices réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$; 2°) des p zéros simples $a_1, \ldots, a_p$ de $R(v)$ tous intérieurs à $|v|<1$. L'expression générale de $R(v)$ est comme on sait $R(v)=e^{i\omega}\cdot\prod_1^p \frac{v-a_i}{1-\bar{a}_i v}$, mais le paramètre réel ω ne joue aucun rôle dans la détermination des domaines D' dont les frontières sont définies par des équations du type $|R(v)|=\text{Const.}$ On voit donc que D' dépend de $3p$ paramètres réels, sur lesquels 3 sont accessoires car ils correspondent au déplacement non euclidien arbitraire de $|v|\leq 1$. Il reste donc, comme précédemment, $3p-3$ paramètres réels pour la classe (D') comme pour la classe $(\mathfrak{A})$ avec la restriction signalée à la fin n.° 33 que ces paramètres réels ne pourront pas prendre toutes les valeurs possibles mais seront assujettis à des relations d'inégalité correspondant à la restriction imposée à l'aire $\mathfrak{A}$.

35. - Signalons enfin sans y insister que les problèmes déjà mentionnés à la fin du n.° 27, concernant les aires invariantes par des transformations biunivoques (directement ou inversement conformes) se ramènent à la recherche des aires canoniques D' invariantes par des déplacements ou des symétries non euclidiennes. Ce problème est d'ailleurs identique au fond à celui de la détermination des courbes algébriques $A(r, s)=0$ invariantes par des transformations birationnelles, problème complètement résolu par HURWITZ. Nous ferons dans un mémoire ultérieur l'étude générale des σ et des domaines canoniques correspondants sans la restriction imposée aux $\mathfrak{A}$ dans ce chapitre. Nous y développerons

d'avantage l'étude du point de vue algébrique. Contentons-nous de signaler ici que, σ étant la transformée conforme de $\mathfrak{A}$ par $\zeta = F(z)$, sa symétrique σ' par rapport à γ_0 sera décrite par le point $\zeta' = \frac{1}{\bar{\zeta}} = \frac{1}{\overline{F(z)}}$. Or $\overline{F(z)}$ est fonction analytique (Beltrami, Klein) du point qui décrit la face du disque $\mathfrak{A}$ située *audessous du plan des z*. On peut donc dire que $[\sigma + \sigma']$ *est l'image conforme du disque* $\mathfrak{A}$ *à 2 faces*. En identifiant les points frontières symétriques par rapport à γ_0, $[\sigma + \sigma']$ devient une surface de Riemann orthosymétrique fermée homéomorphe à la surface formée des 2 faces du disque $\mathfrak{A}$, donc de genre p ; on peut la considérer comme une surface de Riemann de la classe des courbes algébriques provenant de $A(r, s) = 0$ introduite au n.° 7. D'ailleurs entre la surface de Riemann $\mathfrak{R}_0$ que décrit $r = r(z)$ (voir n.° 7) lorsque z décrit $\mathfrak{A}$ et la surface σ, que $\zeta = F(z)$ décrit dans les mêmes conditions il y a évidemment correspondance conforme et biunivoque; cette correspondance s'étend évidemment (par symétrie) entre σ' et $\mathfrak{R}'$ respectivement symétriques de σ et $\mathfrak{R}_0$ par rapport à γ_0 et Γ_0. En sorte que $[\sigma + \sigma']$ et $\mathfrak{R} = [\mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_0']$ sont bien mis en correspondance conforme et biunivoque par la relation $r = r[\Phi(\zeta)]$ où $\Phi(\zeta)$ est la fonction inverse de $\zeta = F(z)$.

A ce nouveau titre, l'introduction de σ comme image conforme et canonique de $\mathfrak{A}$ nous paraît intéressante car elle nous fournit aussitôt avec sa symétrique σ' une nouvelle surface de Riemann de la classe de courbes algébriques associée par M. SCHOTTKY (S. 1) à la classe d'aires $(\mathfrak{A})$.