ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GABRIELE MAMMANA

Autovalori e autosoluzioni per la più generale equazione differenziale lineare ordinaria

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 15 (1927), exp. nº 4, p. 1-110

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1927_1_15__A4_0>

AUTOVALORI E AUTOSOLUZIONI

PER LA

PIÙ GENERALE EQUAZIONE DIFFERENZIALE LINEARE ORDINARIA

MEMORIA

DI

GABRIELE MAMMANA

INTRODUZIONE

In questo lavoro (1) mi sono proposto di studiare la più generale equazione differenziale lineare di ordine n

$$\mathrm{I} \quad L[u] \equiv l_0(x)\frac{d^n u}{dx^n} + l_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \dots + l_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + l_n(x)\,u = r(x)$$

per indagare il problema della ricerca degli integrali di essa verificanti il seguente sistema di condizioni lineari

$$\mathrm{I}_1 \qquad L_i[u] \equiv \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{s=1}^{m_{ij}} l_{ijs}\, u^{(j-1)}(\tau_{ijs}) + \int_a^b l_{ij}(\tau)\, u^{(j-1)}(\tau)\, d\tau\right] = a_i$$

$$(\text{per } i = 1, 2, \dots, n)$$

nelle quali le l_{ijs} e le a_i sono costanti reali assegnate (arbitrariamente), le $l_{ij}(\tau)$ funzioni integrabili simultaneamente definite nell'intervallo (a, b) nel quale sono definite le funzioni continue $l_i(x)$, le m_{ij} numeri interi positivi qualunque, e le τ_{ijs} punti di (a, b), comunque fissati in numero finito e non maggiore del numero $\sum_{i,j} m_{ij}$.(2)

(1) Pervenuto alla Scuola Normale Superiore il 15 dicembre 1925.

(1) Il sistema formato con la I e con le condizioni I_1 lo diremo « sistema differenziale ».

Il problema è classico, e ricchissima la bibliografia che vi si riferisce. Un libro recente del BÔCHER, *Leçons sur les méthodes de Sturm, etc.*. Paris, Gauthier Villars, 1917; mi dispensa di ripetere qui la completa bibliografia là contenuta, in quanto che, dopo la comparsa della indicata magistrale trattazione, nulla è apparso, che io sappia, sull'argomento.

Nella prima parte considerando la I, nella ipotesi della autoaggiunzione costruisco la funzione di Green relativa alla equazione omogenea $L[u] = 0$, e alle condizioni $L_i[u] = 0$, indi introdotto un parametro λ nella I, stabilisco criteri necessari e sufficienti per la esistenza di una funzione, meromorfa in λ, che verifichi la I, e le condizioni $L_i[u] = a_i$, inoltre do lo sviluppo di essa funzione in serie di potenze di λ nello intorno di un suo pnnto regolare o polare, e un metodo di calcolo per la determinazione dell' ordine del polo eventuale.

In tale ricerca si presenta una questione nuova, relativa alla risoluzione di un sistema (speciale) di infinite equazioni lineari con infinite incognite, la quale conduce a risultati notevoli, anche dallo stretto punto di vista algebrico, tanto che, convenientemente generalizzata, essa farà oggetto di una mia nota particolare.

Nella parte seconda, del presente lavoro, viene costruita una equazione lineare tipo Fredholm alla quale soddisfa la menzionata funzione meromorfa non appena essa esista.

Tale equazione offre subito, come è manifesto, altra via per lo studio e l'eventuale calcolo della funzione meromorfa stessa, e per la determinazione dei poli di essa che sono appunto gli autovalori di λ.

Nella terza parte poi, le considerazioni generali svolte vengono applicate alla dimostrazione della esistenza degli autovalori, del loro calcolo, e del calcolo delle corrispondenti autosoluzioni, nella equazione differenziale autoaggiunta del quarto ordine seguente

$$\mathrm{I}' \quad L[z] \equiv \frac{d^2}{dx^2}\theta_0(x)\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d}{dx}\theta_1(x)\frac{dz}{dx} + (\lambda A(x) + B(x))z \equiv 0$$

con le condizioni

$$\mathrm{I}'_1 \qquad L_i[z] = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2, 3, 4)$$

del tipo generale I, ma simmetriche (1); per esempio con le condizioni ai limiti di uno dei due tipi seguenti:

$$(1)_1 \qquad z(a) = z'(a) = z(b) = z'(b) = 0$$

oppure (nel supposto che le funzioni $\theta_0(x)$ e $\theta_1(x)$ soddisfino alle condizioni: $\theta_0(a) = \theta_0(b)$; $\theta'_0(a) = \theta'_0(b)$; $\theta_1(a) = \theta_1(b)$),

$$L_i[z] \equiv \left[\frac{d^{i-1}z}{dx^{i-1}}\right]_{x=a} - \left[\frac{d^{i-1}z}{dx^{i-1}}\right]_{x=b} = 0 \quad (\text{per } i = 1, 2, 3, 4).$$

I risultati qui conseguiti, sono pur essi da considerarsi nuovi, in quanto che fino ad ora il compito da me assolto per la equazione I′ con le condizioni I'_1, riguardante soprattutto la dimostrazione della esistenza di infiniti autovalori di λ nella ipotesi che $\theta_1(x)$, $A(x)$ e $B(x)$ siano soltanto continue, (ed $A(x)$ abbia in (a, b) un numero finito di cambiamenti di segno), fu conseguito dal Picone (2) nelle ipotesi « $\theta_1(x) \equiv 0$ ed $A(x)$ di segno costante in (a, b) » oppure « $\theta_1(x) \equiv 0$, $B(x) \geqq 0$ in tutto (a, b) » con le condizioni

---

(1) Pel significato preciso della parola « simmetriche » attribnita alle condizioni $L_i[z] = 0$, si veda il n. 3, § 1 del primo capitolo (I parte).

(2) *Sui valori eccezionali di un parametro etc.* « Annali della R. Scuola Normale Snperiore di Pisa », Vol. XI, (1909).

$L_\iota[z] = 0$ simmetriche; e dal Davidoglon(1) nella ipotesi più restrittiva, « $\theta_1(x) \equiv 0$, $B(x) \equiv 0$, $A(x) < 0$ in (a, b) », con le condizioni $(1)_1$.

Mancano ancora i teoremi di oscillazione relativi alle autosoluzioni, nelle ipotesi più generali in cui mi sono messo, teoremi che conto di raggiungere per altra via, e farne oggetto di un prossimo lavoro.

(1) *Étude de l'équation differentielle* $\frac{d^2}{dx^2}\,\theta\,\frac{dy^2}{dx^2} = k\varphi y$. « Annales de l'École Normale Supériore de Paris », t. 22, 1925.

PARTE PRIMA

DEI SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI

I.

Formole risolutive generali relative ai sistemi differenziali lineari.

1. — *Caso in cui il sistema omogeneo associato ad un dato sistema differenziale sia incompatibile.* Si prenda a considerare il seguente *sistema differenziale*

$$L[u] \equiv l_0(x)\frac{d^n u}{d x^n} + l_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \dots + l_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + l_n(x)u = r(x)$$

I

$$L_i[u] \equiv \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{s=1}^{m_{ij}} l_{ijs}\, u^{(j-1)}(\tau_{ijs}) + \int_a^b l_{ij}(\tau)\, u^{(j-1)}(\tau)\, d\tau\right] = a_i$$

$$(\text{per } i = 1, 2, \dots n)$$

formato dalla equazione lineare di ordine n, $L[u] = r$, i cui coefficienti $l_i(x)$ sono note funzioni continue della x, simultaneamente definite in un dato intervallo (a, b) nel quale è sempre $l_0(x) > 0$; e dalle n condizioni $L_i[u] = a_i$ nelle quali ai simboli l_{ijs}, a_i, $l_{ij}(\tau)$, τ_{ijs}, m_{ij} vanno attribuiti i significati seguenti: Le l_{ijs} e le a_i sono costanti reali prefissate (del resto qualunque), le $l_{ij}(\tau)$ funzioni integrabili definite simultaneamente in (a, b), le m_{ij} numeri interi positivi assegnati (arbitrariamente), le τ_{ijs} punti fissati dell'intervallo (a, b) in numero finito non maggiore di $\sum_{ij} m_{ij}$.

Insieme al sistema in questione consideriamo il sistema differenziale omogeneo (che diremo associato ad I),

$$\text{II} \qquad \begin{aligned} &L[u] = 0 \\ &L_i[u] = 0 \qquad (\text{per } i = 1, \ldots n) \end{aligned}$$

Diremo brevemente, con Bôcher, *incompatibile* un sistema del tipo II, se esso non ammette altra soluzione (continua insieme a tutte le sue derivate fino a quelle di ordine n incluse) all'infuori di quella identicamente nulla. Nel caso contrario lo stesso sistema si dirà *compatibile.*

Supponiamo dapprima il sistema II incompatibile, e proponiamoci allora la costruzione di una formula che rappresenti la più generale soluzione del sistema I, nella quale siano messi in evidenza i secondi membri di I stesso.

Cominciamo, a tal fine, col costruire una funzione continua in (a, b) con tutte le sue derivate fino a quelle di ordine $n - 2$ incluse, la cui derivata $(n - 1)$ *esima* esista, e sia pure continua in tutti i punti dell'intervallo (a, b), salvo in uno fissato ξ, in cui presenta una assegnata discontinuità di prima specie; la quale funzione sia pure dotata di derivata *ennesima* continua in tutti i punti di (a, b) ad eccezione, si intende, del punto ξ, e *soddisfi al sistema omogeneo* II, in ogni punto di (a, b) diverso da ξ.

Le funzioni

$$u_1(x); \quad u_2(x); \ldots. u_n(x)$$

rappresentino un sistema integrale fondamentale della equazione omogenea,

$$L[u] = 0.$$

Si ponga

$$y(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \ldots + c_n u_n(x)$$

dove le *costanti* c_i rapprasentano la soluzione unica del seguente sistema lineare di n equazioni ad n incognite

$$(1) \quad \begin{cases} \chi_1 u_1(\xi) + \chi_2 u_2(\xi) + \cdots + \chi_n u_u(\xi) = 0 \\ \chi_1 u'_1(\xi) + \chi_2 u'_2(\xi) + \cdots + \chi_n u'_n(\xi) = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \chi_1 u_1^{(n-2)}(\xi) + \chi_2 u_2^{(n-2)}(\xi) + \cdots + \chi_n u_n^{(n-2)}(\xi) = 0 \\ \chi_1 u_1^{(n-1)}(\xi) + \chi_2 u_2^{(n-1)}(\xi) + \cdots + \chi_n u_n^{(n-1)}(\xi) = c, \end{cases}$$

e nel quale c è una costante, e rappresenta l'ampiezza del salto che la derivata di ordine $(n - 1)$ della funzione che si vuole costruire, dovrà avere nel punto ξ.

Assumiamo per c il valore $\dfrac{1}{l_0(\xi)}$ e poniamo:

$$(2) \qquad \delta(x, \xi) = \begin{cases} 0 & \text{per } a \leq x \leq \xi \\ y(x) & \text{»} \quad \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

$$(2)' \qquad g(x, \xi) = \delta(x, \xi) + \sum_{i=1}^{n} d_i u_i(x)$$

(le d_i essendo costanti qualsiasi).

La $g(x, \xi)$, per ogni fissato valore di ξ, è funzione continua della x in tutto l'intervallo (a, b), insieme alle sue prime $n - 2$ derivate; la sua $(n - 1)$ *esima* derivata è pure continua in ogni punto di (a, b) ad eccezioue del punto

$x = \xi$, dove presenta una discontinuità di prima specie, e precisamente, in tale punto si ha:

$$\left[\frac{\partial^{n-1} g(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=\xi+0} - \left[\frac{\partial^{n-1} g(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{x=\xi-0} = \frac{1}{l_0(\xi)};$$

esiste inoltre ed è continua in tutto (a, b), il punto $x = \xi$ naturalmente escluso, la $\dfrac{\partial^n g(x, \xi)}{\partial x^n}$ (1).

In fine la $g(x, \xi)$ in ogni intervallo contenuto in (a, b) e che non contenga il punto ξ, verifica l'equazione omogenea $L[u] = 0$, e però può considerarsi come una soluzione speciale della medesima equazione.

Una volta costruita la $g(x, \xi)$, con una sola quadratura potremo ottenere un integrale particolare anzi (se le costanti d_i si lasciano arbitrarie), l'integrale generale della equazione non omogenea

$$L[u] = r(x),$$

comunque si prenda la funzione $r(x)$ continua in (a, b).

Si ponga invero:

$$\bar{u}(x) = \int_a^b g(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

segue successivamente:

$$\bar{u}' = \int_a^b \frac{\partial g(x, \xi)}{\partial x} r(\xi)\, d\xi; \quad \bar{u}'' = \int_a^b \frac{\partial^2 g(x, \xi)}{\partial x^2} r(\xi)\, d\xi; \ldots$$

$$\ldots \bar{u}^{(n-2)} = \int_a^b \frac{\partial^{n-2} g(x, \xi)}{d\, x^{n-2}} r(\xi)\, d\xi;$$

(1) La $g(x, \xi)$ e le sue derivate rapporto ad x fino a quelle di ordine $(n - 2)$ incluse sono funzioni continue anche rispetto alla ξ, la $\dfrac{\partial^{n-1} g(x, \xi)}{\partial x^{n-1}}$ considerata come funzione di ξ e continua, rispetto a questa variabile, dappertutto in (a, b) salvo nel punto $\xi = x$ dove presenta un salto di ampiezza uguale a $-\dfrac{1}{l_0(x)}$.

o anche:

$$\bar{u}^{(n-2)} = \int_a^x \frac{\partial^{n-2} g(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} r(\xi)\, d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-2} g(x,\xi)}{\partial x^{n-2}} r(\xi)\, d\xi$$

da cui

$$\bar{u}^{n-1)} = \int_a^x \frac{\partial^{n-1} g(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} r(\xi)\, d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-1} g(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} r(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \left[\frac{\partial^{n-2} g(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right]_{\xi=x-0} r(x) - \left[\frac{\partial^{n-2} g(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right]_{\xi=x+0} r(x) =$$

$$= \int_a^x \frac{\partial^{n-1} g(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} r(\xi)\, d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-1} g(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} r(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^{n-1} g(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} r(\xi)\, d\xi$$

chè $\dfrac{\partial^{n-2} g(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}$ è funzione continua di ξ anche nel punto $\xi = x$; e infine:

$$\bar{u}^{(n)} = \int_a^x \frac{\partial^{n} g(x,\xi)}{\partial x^{n}} r(\xi)\, d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n} g(x,\xi)}{\partial x^{n}} r(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \left[\frac{\partial^{n-1} g(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x-0} r(x) - \left[\frac{\partial^{n-1} g(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x+0} r(x) =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial^{n} g(x,\xi)}{\partial x^{n}} r(\xi)\, d\xi + \frac{r(x)}{l_0(x)}$$

e si ha:

$$L[\bar{u}] \equiv \sum_{i=0}^{n} l_i \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} \left(\int_a^b g(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi \right) \equiv$$

$$\equiv \int_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} l_i \frac{\partial^{n-i} g}{\partial x^{n-i}} \right] r(\xi)\, d\xi + r(x) \equiv r(x)$$

dalla quale si deduce che la funzione $\overline{u}(x)$ è integrale della equazione non omogenea $L[u] = r(x)$.

L' integrale generale di quest' ultima avrà dunque la seguente forma:

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i(x) + \int_a^b \delta(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

o se si vuole anche:

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i\, u_i(x) + \int_a^b g(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

dove le c_i rappresentano costanti arbitrarie, mentre le d_i che figurano nella $g(x, \xi)$ si suppongono fissate, (del resto comunque).

Vediamo ora di scegliere le c_i in maniera da avere, pel corrispondente integrale u, identicamente:

$$(4)' \qquad L_i[u] = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2, \ldots n)$$

Ciò sarà sempre possibile ed in unico modo, come verificheremo:

Poniamo pertanto:

$$L_i[g(x, \xi)] = h_i(\xi)\ (1)$$

Per la distributività delle operazioni $L_i[u]$ abbiamo:

$$L_i[u] \equiv c_1 L_i[u_1] + c_2 L_i[u_2] + \ldots + c_n L_i[u_n] + \int_a^b h_i(\xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

Sarà quindi raggiunto il nostro scopo ove per le c_i si

(1) Le $h_i(\xi)$ sono funzioni continue di ξ in ogni punto di (a, b) salvo eventualmente in un numero finito di punti di (a, b) stesso, (nei punti τ_{ijs}) dove possono presentare discontinuità di prima specie, esse funzioni quindi sono integrabili.

scelga un gruppo di valori soddisfacente al seguente sistema di n equazioni lineari ed n incognite:

$$(4)\quad \chi_1 L_i[u_1] + \chi_2 L_i[u_2] + \ldots + \chi_n L_i[u_n] = -\int_a^b h_i(\xi)\, r(\xi)\, d(\xi);$$
$$(\text{per } i = 1, 2, \ldots n).$$

Pel determinante Λ di questo sistema abbiamo:

$$\Lambda \equiv \begin{vmatrix} L_1[u_1] & L_1[u_2] \ldots L_1[u_n] \\ L_2[u_1] & L_2[u_2] \ldots L_2[u_n] \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ L_n[u_1] & L_n[u_2] \ldots L_n[u_n] \end{vmatrix} \neq 0$$

poichè, per ipotesi, il sistema differenziale omogeneo II associato si è supposto incompatibile (1).

Esiste, dunque, uno ed un solo sistema di valori per le c_i soddisfacente alle (4). Si ha precisamente, detto Λ_{ij} l'aggiunto dell'elemento $L_i[u_j]$ nel — determinante Λ — diviso pel determinante stesso, e posto:

$$g_i(\xi) = -\sum_{j=1}^{n} \Lambda_{ji}\, h_j(\xi)$$

$$c_i = \int_a^b g_i(\xi)\, r(\xi)\, d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

L'integrale della equazione $L[u] = r$, soddisfacente alle condizioni (4)' sarà conseguentemente espresso dalla formola seguente:

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i(x) \int_a^b g(\xi)\, r(\xi)\, d\xi + \int_a^b g(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

(1) V. Bôcher, *Leçons sur les methodes de Sturm etc.*, Paris, Gauthier Villard, 1917, pagg. 17 e segg.

e ove si ponga

$$G(x, \xi) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, g_i(\xi) + g(x, \xi)$$

anche da:

$$u = \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi.$$

Volendo, infine, stabilire la formola — oggetto del presente numero — che rappresenti l'integrale (unico(1)) del sistema differenziale I, e nella quale i secondi membri del sistema I medesimo siano messi in evidenza, operiamo come segue:

Si considerino gli n sistemi differenziali a soluzione unica:

$$(5)' \qquad \begin{aligned} & L[u] = 0 \\ & L_i[u] = \varepsilon_{ij} \qquad (\text{per } i = 1, 2 \ldots n) \end{aligned}$$

(dove ε_{ij} è zero od uno secondo che $i \neq j$ oppure $i = j$) i quali sistemi si ottengono da quello scritto facendo percorrere a j la successione di numeri $1, 2, \ldots n$, e si chiami $G_s(x)$ il ben determinato integrale di (5)' che corrisponde al valore s di j.

La soluzione del sistema I verrà allora espressa, come è chiaro, dalla formola:

$$(5) \qquad u = \sum_{i=1}^{n} a_i\, G_i(x) + \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

che è proprio quella cui volevamo arrivare.

---

(1) V. Bôcher, luogo citato.

2. — *La funzione di Green relativa al sistema associato II.* Circa la funzione di $G(x, \xi)$, comunemente detta *funzione di Green* relativa al sistema associato II, è bene qui precisarne le proprietà fondamentali.

La funzione $G(x, \xi)$, delle due variabili x, e ξ, definita nel quadrato di estremi (a, a), (b, b); rispetto alla x è continua con tutte le sue derivate rapporto ad x fino a quelle di ordine $n - 2$ incluse in tutto l'intervallo (a, b); la sua $(n - 1)$ *esima* derivata rapporto ad x è pure continua in (a, b), salvo nel punto $x = \xi$ ove presenta un salto di ampiezza uguale ad $\frac{1}{l_0(\xi)}$; esiste pure, ed è continua in ogni punto di (a, b) — il punto $x = \xi$ escluso — la $\frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial x^n}$. Relativamente alla variabile ξ, poi, la $G(x, \xi)$ è integrabile, più precisamente essa potrà presentare in (a, b) soltanto un numero finito di discontinuità di prima specie. Questi eventuali punti di discontinuità sono quelli delle funzioni $g(\xi)$, i quali poi alla loro volta sono quelli delle $h_i(\xi)$.

Infine la nostra funzione $G(x, \xi)$ come la $g(x, \xi)$, per ogni ξ fissato, in ogni intervallo di (a, b) che non contenga ξ, rappresenta un integrale della equazione omogenea $L[u] = 0$, e soddisfa inoltre, comunque si fissi ξ, (i valori di discontinuità delle $g(\xi)$ al più esclusi) alle condizioni $L_i[u] = 0$ (per $i = 1, 2, \ldots n$), la qualcosa si verifica subito ove si tenga conto della definizione della $g(\xi)$.

La funzione di Green esiste ed è unica nella ipotesi che il sistema omogeneo II associato ad I sia incompatibile (1).

---

(1) Inversamente dalla ipotesi della esistenza di una funzione $G(x, \xi)$ che goda delle suddette proprietà e che sia tale poi che comunque si prenda una funzione $r(x)$, per ogni integrale u^* del sistema

$$L[u] = r(x); \quad L_i[u] = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2, \ldots n)$$

3. — *Equazioni autoaggiunte con condizioni simmetriche. Simmetria della relativa funzione di Green rispetto ai suoi due argomenti.* Andiamo ora a stabilire una ulteriore proprietà della funzione di Green nel caso che l'equazione $L[u]=0$ coincida con la propria aggiunta e le condizioni $L_i[u]=0$ presentino delle particolarità che qui sotto saranno precisate. A tale scopo dobbiamo ricordare l'identità di LAGRANGE che lega il primo membro di un'equazione differenziale lineare omogenea col primo membro della propria aggiunta; vogliamo riferirci cioè alla identità (detto $M[v]$ il primo membro dell'equazione aggiunta di $L[u]=0$),

$$\int_a^b [v\,L[u] - u\,M[v]] = [P[u,v]]_a^b \tag{6}$$

che vale comunque si prendano le funzioni u e v, e dove $P[u, v]$ rappresenta una forma bilineare negli argomenti $u, u', u'' \ldots u^{(n-1)}, v, v', v'' \ldots v^{(n-1)}$; e cioè:

$$\begin{aligned} (6)' \quad P[u,v] = {} & u\,[l_{n-1}v - (l_{n-2}v)' + \ldots + (-1)^{n-1}(l_0 v)^{(n-1)}] + \\ & + u'\,[l_{n-2}v - (l_{n-3}v)' + \ldots + (-1)^{n-2}(l_0 v)^{(n-2)}] + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u^{(n-1)}\,l_0 v. \end{aligned}$$

Supponiamo che l'equazione $L[u]=0$ sia autoaggiunta, e le condizioni $L_i[u]=0$, tali che per ogni coppia di fun-

---

si abbia:

$$u^* = \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

segue (poichè per $r(x) \equiv 0$, $u^* \equiv 0$) che il sistema associato II è incompatibile, e la $G(x, \xi)$ ne è la relativa funzione di Green.

zioni u, v che le verifichi, per cui cioè si abbia identicamente

$$L_i[u] = L_i[v] = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2 \dots n)$$

segua:

$$[P[u, v]]_a^b = 0$$

Un sistema di condizioni come le $L_i[u] = 0$, per cui riesca sempre verificata quest'ultima proprietà, le diremo un *sistema di condizioni simmetriche.* La ragione di tale denominazione va ricercata nel fatto che nella ipotesi dell'autoaggiunzione per l'equazione $L[u] = 0$, se le condizioni $L_i[u] = 0$, sono simmetriche, la funzione di Green relativa riesce — ora lo proveremo — funzione simmetrica dei suoi due argomenti. Consideriamo pertanto due punti di (a, b) ξ_1, e ξ_2 $(\xi_1 < \xi_2)$, che dapprima supporremo non coincidenti con alcuno dei punti $\tau_{i,s}$, e per u e v prendiamo a considerare le due funzioni di x, $G(x, \xi_1)$, $G(x, \xi_2)$. Queste due funzioni soddisfano alle $L_i[u] = 0$, quindi — nel supposto che queste condizioni siano simmetriche — anche alla relazione:

$$[P[u, v]]_a^b = 0.$$

Poniamo per semplicità

$$G(x, \xi_1) = G_1(x); \qquad G(x, \xi_2) = G_2(x),$$

dalla (6), se $L[u] \equiv M[u]$, segue:

$$(7) \quad 0 = \int_a^b \Big[G_2 L[G_1] - G_1 L[G_2]\Big] dx = \Big[P[G_1, G_2]\Big]_a^{\xi_1 - 0} +$$

$$+ \Big[P[G_1, G_2]\Big]_{\xi_1 + 0}^{\xi_2 - 0} + \Big[P[G_1, G_2]\Big]_{\xi_2 + 0}^{b}$$

Ora, se si osserva che tutti i termini della forma $P[G_1, G_2]$ sono continui nei punti ξ_1 e ξ_2, ad eccezione del termine

$l_0\, G_2 \dfrac{d^{n-1}\, G_1}{d\, x^{n-1}}$, il quale nel punto $x = \xi_1$ presenta un salto di ampiezza uguale a $\dfrac{1}{l_0(\xi_1)}$, e dall' altro $l_0\, G_1 \dfrac{d^{n-1}\, G_2}{d\, x^{n-1}}$, che presenta invece una discontinuità in ξ_2, dove ha precisamente un salto di ampiezza uguale a $\dfrac{1}{l_0(\xi_2)}$, ci appare subito manifesto che i termini del terzo membro di (7), a due a due si distruggono, eccetto quelli che si riferiscono ai due sopra menzionati, discontinui — rispettivamente — in ξ_1 e ξ_2.

Dalla (7), dunque si ricava:

$$l_0(\xi_1)\, G_2(\xi_1) \left\{ \left[\frac{d^{n-1}\, G_1}{d\, x^{n-1}}\right]_{x=\xi_1-0} - \left[\frac{d^{n-1}\, G_1}{d\, x^{n-1}}\right]_{x=\xi_1+0} \right\} -$$

$$- l_0(\xi_2)\, G_1(\xi_2) \left\{ \left[\frac{d^{n-1}\, G_2}{d\, x^{n-1}}\right]_{x=\xi_2-0} - \left[\frac{d^{n-1}\, G_2}{d\, x^{n-1}}\right]_{x=\xi_2+0} \right\} = 0$$

e però:

$$G_1(\xi_2) = G_2(\xi_1)$$

cioè

$$G(\xi_2, \xi_1) = G(\xi_1, \xi_2)$$

Supponiamo, ora, che uno dei punti ξ_1 o ξ_2, per es. ξ_1 sia uno dei punti τ_{ijs}, e si consideri un intorno di quest'ultimo punto che non contenga altri punti τ_{ijs}; se ξ_2 non è allora fra i punti τ_{ijs} e x appartiene al considerato intorno, dalla eguaglianza:

$$G(x, \xi_2) = G(\xi_2, x),$$

che vale per ogni x del detto intorno diverso da ξ_1 segue — per la continuità di $G(x, \xi_2)$ rispetto ad x, in ξ_1 —

$$\lim_{x \to \xi_1 - 0} G(\xi_2, x) = \lim_{x \to \xi_1 + 0} G(\xi_2, x) = \lim_{x \to \xi_1} G(x, \xi_2) = G(\xi_1, \xi_2)$$

la quale ci dice anche, che — nell'ipotesi in cui ci siamo messi — i punti nei quali la $G(x\,\xi)$ non riesce simmetrica, ove esistano, non possono trovarsi altro che agli estremi a e b dell'intervallo (a, b).

Concludendo possiamo affermare che: *se l' equazione* $L[u] = 0$ *è autoaggiunta e le condizioni* $L_i[u] = 0$ *sono simmetriche la funzione di Green relativa è simmetrica nei suoi argomenti* (1).

4. — *Formula generale risolutiva di un sistema differenziale nel caso che il sistema omogeneo ad esso associato sia compatibile.* Supporremo qui e nel seguito che l'equazione differenziale da noi considerata sia autoaggiunta e le condizioni $L_i[u] = 0$, da imporre a ogni suo integrale, simmetriche. Un sistema così fatto lo indicheremo come segue:

$$\text{III} \quad \left\{ \begin{array}{ll} L[\omega] \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \dfrac{d^{m-j}}{dx^{m-j}} \left[\theta_j(x) \dfrac{d^{m-j}\omega}{d\,x^{m-j}}\right] + q(x)\,\omega = r(x) & \\ L_i[\omega] = a_i & (\text{per } i = 1, 2 \ldots 2m) \end{array} \right.$$

dove le a_i sono costanti reali qualunque e le operazioni $L_i[\omega]$ del tipo $L_i[u]$, ma simmetriche.

Si vede facilmente, in queste ipotesi, che alla forma bili-

(1) Ricordiamo che, se, relativamente alle condizioni $L_i[u] = 0$, si suppone che le funzioni $l_{ij}(\tau)$ che vi figurano siano nulle identicamente e i punti τ_{ifs} si trovino solo agli estremi a e b dell'intervallo (a, b), la funzione di Green relativa al sistema omogeneo II, considerata come funzione di ξ, rappresenta la funzione di Green del cosidetto sistema aggiunto al sistema II stesso. Consegue che, se il dato sistema II coincide col proprio aggiunto — il che importa che le condizioni $L_i[u] = 0$ siano simmetriche nel senso da noi attribuito a tale parola — la sua funzione di Green è simmetrica nei suoi due argomenti. Vedi Bôcher, luogo citato, pag. 98 e seg.

neare $P[u, v]$, possiamo dare la forma seguente:

$$(8) \qquad P[u,v] = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{m-j} (-1)^{i-1} \left[\frac{d^{i-1} v}{dx^{i-1}} \left\{ \frac{d^{m-j-i}}{dx^{m-j-i}} \theta_j \frac{d^{m-j} u}{dx^{m-j}} \right\} - \right.$$

$$\left. - \frac{d^{i-1} u}{dx^{i-1}} \left\{ \frac{d^{m-j-i}}{dx^{m-j-i}} \theta_j \frac{d^{m-j} v}{dx^{m-j}} \right\} \right]$$

Si verifica subito, grazia alla (8), che due casi particolari notevoli in cui le condizioni $L_i[\omega] = 0$ riescono simmetriche, sono i seguenti:

$$1^{\circ} \qquad L_i[\omega] \equiv \left[\frac{d^{i-1}\omega}{dx^{i-1}}\right]_{x=a} = 0, \qquad L_{m+i}[\omega] \equiv \left[\frac{d^{i-1}\omega}{dx^{i-1}}\right]_{x=b} = 0$$

$$(\text{per } i = 1, 2 \ldots m)$$

2° nelle ipotesi che si abbia $\theta_j^{(s)}(a) = \theta_j^{(s)}(b)$

$$(j = 0, 1, 2 \ldots m-1; \; s = 0, 1, 2 \ldots m-j-1)$$

$$L_i[\omega] \equiv \left[\frac{d^{i-1}\omega}{dx^{i-1}}\right]_{x=a} - \left[\frac{d^{i-1}\omega}{dx^{i-1}}\right]_{x=b} = 0$$

$$(\text{per } i = 1, 2 \ldots 2m).$$

Supponiamo che il sistema omogeneo associato a III,

$$\text{IV} \qquad \begin{cases} L[\omega] = 0 \\ L_i[\omega] = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2 \ldots 2m) \end{cases}$$

sia compatibile, e proponiamoci la ricerca, in tale caso, delle condizioni necessarie e sufficienti perchè il sistema III ammetta soluzioni, e di costruirne, nel caso affermativo, la relativa formula risolutiva.

Le funzioni $u_1, u_2 \ldots u_{2m}$ costituiscano un sistema di integrali fondamentali della equazione omogenea $L[\omega] = 0$.

Se il sistema IV è compatibile si dovrà avere:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} L_1[u_1] & L_1[u_2] \ldots\ldots & L_1[u_{2m}] \\ L_2[u_1] & \ldots\ldots & L_2[u_{2m}] \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ L_{2m}[u_1] & \ldots\ldots & L_{2m}[u_{2m}] \end{vmatrix} = 0.$$

La caratteristica di Δ sia $2m - k$ $(k > 0)$(1); il sistema IV, come è noto allora, non è determinato più precisamente la sua soluzione generale contiene linearmente k costanti arbitrarie.

Per quel che riguarda, poi, il sistema non omogeneo III, vedremo che, se i suoi secondi membri sono generici — non scelti in modo particolare — esso in generale non ammette soluzioni.

Ricordiamo intanto che, per quanto fu stabilito nel precedente numero 1, l'integrale generale dell'equazione $L[\omega] = r$, è dato dalla formula:

$$\omega = \sum_{j=1}^{2m} c_j u_j + \int_a^b g(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi \tag{9}$$

dove $g(x, \xi)$ è la funzione definita come la (2) o (2)' e relativa alla equazione $L[\omega] = 0$.

Ora, perchè la funzione ω, definita dalla (9) sia soluzione del sistema III, occorre e basta poter determinare un sistema di valori per le costanti c_j soddisfacenti al seguente

(1) La caratteristica del determinante Δ non dipende — come è facile verificare — dal sistema di integrali fondamentale scelto, ma esclusivamente dalle assegnate condizioni $L_i[\omega] = 0$.

sistema lineare nelle c_j stesse

$$L_i[\omega] \equiv \sum_{j=1}^{2m} c_j L_i[u_j] + \int_a^b L_i[g(x,\xi)]\, r(\xi)\, d\xi = a_i$$
$$(\text{per } i = 1, 2 \ldots 2m)$$

o anche posto:

$$L_i[u_j] = d_{ij}; \quad L_i[g] = d_i(\xi);$$

$$\sum_{j=1}^{2m} d_{ij}\, c_j = a_i - \int_a^b d_i(\xi)\, r(\xi)\, d\xi. \tag{10}$$

Il determinante $\Delta = |d_{ij}|$ delle d_{ij}, ha, come si disse, caratteristica $2m - k$; affinchè allora il sistema (10) sia possibile è necessario e basta che la matrice completa, ad esso relativa, abbia anch'essa caratteristica uguale a $2m - k$.

In generale, dunque, possiamo affermare che, se la funzione $r(x)$ e le costanti a_i si scelgono affatto generiche, per il sistema III non si avranno soluzioni.

Allo scopo di dare forma espressiva alle condizioni cui devono soddisfare la $r(x)$ e le a_i affinchè il sistema (10) sia possibile, e, nel caso, poter costruire una formula risolutiva del sistema III che metta in evidenza gli integrali indipendenti di IV (il che ci sarà utile nel seguito) operiamo come segue:

Scegliamo il sistema di integrali fondamentali di $L[u] = 0$ in modo che k fra essi siano soluzioni di IV. Ciò è certamente possibile, chè il sistema IV ammette k (e non più) integrali linearmente indipendenti (1).

Siano ad esempio $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_k$ questi k integrali indipendenti ed $u_{k+1}\, u_{k+2} \ldots u_{2m}$ rappresentino altri $2m - k$ integrali di $L[\omega] = 0$ indipendenti fra loro o dagli integrali γ_i.

(1) Vedi BÔCHER, luogo citato, pagg. 17 e segg.

Poichè si ha:

$$L_i(\gamma_j) \equiv 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2 \ldots 2m; \text{ ed } j = 1, 2 \ldots k)$$

il sistema (10) assumerà la forma:

$$(10)' \qquad B_i \equiv \sum_{j=k+1}^{2m} d_{ij}\, c_j = a_i - \int_a^b d_i(\xi)\, r(\xi)\, d\xi \qquad (\text{per } (i = 1, 2 \ldots 2m).$$

Perchè questo sistema sia possibile occorre e basta che tutte le relazioni lineari omogenee indipendenti che legano i suoi primi membri, — relazioni che sono in numero di k e non più —, leghino anche i suoi secondi membri.

Supposto, quindi, che le k relazioni indipendenti che intercedono fra i primi membri di (10)′, siano le seguenti:

$$\sum_{i=1}^{2m} \beta_{ij}\, B_i = 0 \qquad (\text{per } j = 1, 2 \ldots k)$$

(le β_{ij} essendo costanti opportune), per la possibilità del sistema (10)′ è necessario e basta che siano soddisfatte le k condizioni seguenti dalle a_i e dalla $r(x)$:

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{2m} \beta_{ij}\, a_i = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{2m} \beta_{ij}\, d_i(\xi) \right] r(\xi)\, d\xi \qquad (\text{per } j = 1, 2 \ldots k)$$

Se le (11) si suppongono soddisfatte, dalle (10)′ si potrà ricavare un ben determinato sistema di valori per le c_i, $(i = k+1, k+2 \ldots 2m)$, costituente la sua unica soluzione.

A tale scopo indichiamo con $\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \ldots, \alpha_{2ms}$ una qualsiasi soluzione del sistema di equazioni lineari:

$$(12)' \qquad \sum_{i=1}^{2m} d_{ij}\, z_i = \varepsilon_{js} \qquad (j = k+1, k+2 \ldots 2m)$$

dove $\varepsilon_{j,s}$, al solito, è zero od 1 secondo che $j \neq s$ oppure $j = s$; ed s assume tutti i valori da $k+1$ a $2m$.

Moltiplicando allora la prima delle (10)' per $\alpha_{1,s}$, la seconda per $\alpha_{2,s}$ etc... la $2\,m^{esimn}$ per $\alpha_{2m,s}$, e sommando membro a membro si ricava:

$$c_s = \sum_{i=1}^{2m} \alpha_{is} a_i - \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{2m} \alpha_{is} d_i(\xi)\right] r(\xi) d\xi \equiv \bar{c}_s \tag{12}$$
$$(\text{per } s = k+1, k+2 \dots 2m).$$

Per la soluzione generale del sistema III, avremo, dopo ciò, e grazie alla (9), la seguente formula:

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} c_j \gamma_j(x) + \sum_{j=k+1}^{2m} \left(\sum_{i=1}^{2m} \alpha_{ij} a_i\right) u_j(x) + \tag{13'}$$
$$+ \int_a^b \left[g(x, \xi) - \sum_{j=k+1}^{2m} \left(\sum_{i=1}^{2m} \alpha_{ij} d_i(\xi)\right) u_j(x)\right] r(\xi)\, d\xi$$

(le costanti c_j essendo arbitrarie).

Con evidenti posizioni, scriveremo compendiosamente la (13)' così:

$$\omega = \Gamma_k(x) + \int_a^b \Gamma_k(x, \xi)\, r(\xi)\, d\xi \tag{13}$$

dove l'indice k, posto in evidenza, sta a denotare che la soluzione ω dipende linearmente da k costanti arbitrarie.

In particolare, se la caratteristica di Δ è zero, le condizioni $L_i[\omega] = 0$ sono conseguenze necessarie di $L[\omega] = 0$; le (11) si riducono a queste altre:

$$a_i = \int_a^b d_i(\xi)\, r(\xi)\, d\xi \quad (\text{per } i = 1, 2 \dots 2m) \tag{11'}$$

e la soluziono generale di III viene espressa dalla formula (9), nella quale le c_i $(i = 1, 2 \dots 2m)$ sono arbitrarie.

II.

Sistemi differenziali dipendenti da un parametro λ.

1. — *La soluzione $\Omega(x,\lambda)$ di un sistema differenziale, come funzione meromorfa del parametro da cui il sistema dipende.* Supporremo qui e nel seguito che le funzioni q ed r che figurano nella equazione $L[\omega]=r$, oltre che dalla x dipendano pure da un parametro in modo continuo, più precisamente supporremo q ed r continue in x, e rispetto a λ trascendenti intere. Poniamo, cioè:

$$q = B(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)\lambda^n \equiv B(x) + A(x,\lambda)\lambda$$

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(x)\lambda^n \equiv r(x,\lambda)$$

Il sistema che prenderemo in esame avrà dunque la forma:

$$\mathrm{V}\quad \begin{cases} L_\lambda[\omega] \equiv \sum_{j=0}^{m-1} \dfrac{d^{m-j}}{dx^{m-j}}\left\{\theta_j \dfrac{d^{m-j}\omega}{dx^{m-j}}\right\} + B(x)\omega + \lambda A(x,\lambda)\omega = r(x,\lambda) \\ L_i[\omega] = a_i \qquad\qquad \text{(per } i = 1, 2 \ldots 2m) \end{cases}$$

(dove le $L_i[\omega]$ e le a_i, per semplicità, le supporremo indipendenti da λ) (1), pel sistema associato a V si avrà:

$$\mathrm{VI}\qquad \begin{cases} L_\lambda[\omega] = 0 \\ L_i[\omega] = 0 \qquad \text{(per } i = 1, 2 \ldots 2m) \end{cases}$$

(1) Le considerazioni che verranno fatte in questo capitolo non subiscono modificazioni salvo una certa complicazione nei calcoli, ove si suppongano le a_i dipendenti pure da λ, e propriamente trascendenti intere in λ.

Le funzioni (trascendenti intere in λ) $\eta_1(x,\lambda), \eta_2(x,\lambda) \dots \eta_{2m}(x,\lambda)$ rappresentino $2m$ integrali indipendenti dell'equazione omogenea $L_\lambda[\omega]=0$, e la funzione (trascendente intera in λ) $\eta(x,\lambda)$ un integrale particolare della $L_\lambda[\omega]=r(x,\lambda)$; per l'integrale generale dell'equazione $L_\lambda[\omega]=r(x,\lambda)$, si avrà allora:

$$(14)' \qquad \omega(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{2m} c_i\,\eta_i(x,\lambda)+\eta(x,\lambda)$$

(le c_i essendo costanti rispetto ad x).

Affinchè esista un'integrale del sistema V, occorre e basta che, sostituendo nelle $L_i[\omega]=a_i$, il secondo membro di $\omega(x,\lambda)$ al posto di ω, il sistema lineare di equazioni nelle incognite c_i, che se ne ricava, sia atto a determinare un gruppo di $2m$ valori per le c_i stesse, costituenti una sua soluzione.

Poniamo, per semplicità:

$$L_i[\eta_i(x,\lambda)]=L_{ij}(\lambda), \qquad L_i[\eta(x,\lambda)]=L_i(\lambda).$$

Il sistema lineare detto assumerà allora la forma:

$$(15) \qquad \sum_{j=1}^{2m} L_{ij}(\lambda)\,c_j=a_i-L_i(\lambda) \qquad (\text{per } i=1,2\dots 2m)$$

Diciamo $\Delta(\lambda)$ il determinante di questo sistema, sia cioè:

$$\Delta(\lambda) = \text{determinante } |L_{ij}(\lambda)|$$

e cominciamo col supporre che *la funzione intera in* λ, $\Delta(\lambda)$ *non sia identicamente nulla.*

In questa ipotesi per ogni valore di λ per cui risulti $\Delta(\lambda)\neq 0$, il sistema (15) sarà determinato, e corrispondentemente *si avrà uno e un solo integrale del sistema* V *comunque si prendano i secondi membri* a_i.

La soluzione del sistema V *quindi, nell'ipotesi che* $\Delta(\lambda) \neq 0$, *riescirà una funzione meromorfa di* λ *i cui poli cadranno negli zeri di* $\Delta(\lambda)$ (1).

Tale funzione meromorfa — che chiameremo $\Omega(x, \lambda)$, — è rappresentata dalla formula:

$$\Omega(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(\lambda)\, \eta_i(x, \lambda) + \eta(x, \lambda) \tag{14}$$

dove le $c_i(\lambda)$ vanno pensate come soluzioni del sistema (15) (2); in altri termini, se con $\Delta_{ij}(\lambda)$ si indica l'aggiunto dell'elemento L_{ij} nel determinante $\Delta(\lambda)$, per le $c_i(\lambda)$ si ha:

$$c_i(\lambda) = \frac{\sum_{s=1}^{2m} \Delta_{si}(\lambda)\,(a_s - L_s(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

Dimostriamo ora che in uno zero di $\Delta(\lambda)$ (quando le a_i e la x siano generiche) si ha sempre un polo per la funzione $\Omega(x, \lambda)$ il cui ordine non dipende dalle a_i e dalla x stessa.

Invero, se $\bar{\lambda}$, ad esempio, è uno zero di $\Delta(\lambda)$, di ordine ν, non è possibile che le funzioni intere $\Delta_{ij}(\lambda)$ abbiano in $\bar{\lambda}$ tutte uno zero di ordine maggiore o uguale a ν, chè, in tal caso, il determinante complementare di $\Delta(\lambda)$, il determinante cioè delle $\Delta_{ij}(\lambda)$, in $\bar{\lambda}$ avrebbe uno zero di ordine maggiore o uguale a $2m\nu$, ora, ciò è assurdo poichè dalla identità:

$$\text{determinante } [\Delta_{ij}(\lambda)] = \Delta^{2m-1}(\lambda)$$

(1) Gli zeri di $\Delta(\lambda)$ formano un insieme numerabile di punti aventi al più, come punto limite il punto all'infinito.

(2) Dalla forma stessa di $\Omega(x, \lambda)$ si desume come essa non possa avere singolarità essenziali.

segue che il detto determinante complementare, nel punto $\lambda = \bar{\lambda}$, ha uno zero di ordine $(2m-1)\nu$.

Consegue che, se $\Delta_{si}(\lambda)$ ha in $\bar{\lambda}$ uno zero di ordine minore di ν, e le a_s sono generiche, la $c_i(\lambda)$ avrà di certo un polo in $\lambda = \bar{\lambda}$; e ove per x non si scelga un particolare valore che annulli $\eta_i(x, \lambda)$, un polo si avrà pure in $\bar{\lambda}$, pel termine $c_i(\lambda)\,\eta_i(x, \lambda)$ della (14), e quindi per $\Omega(x, \lambda)$; di più l'ordine di tale polo può abbassarsi solo per particolari valori delle a_i e della x.

2. — *Autovalori di λ e corrispondenti autosoluzioni relativi al sistema omogeneo* VI. Per i valori del parametro λ, che annullano il determinante $\Delta(\lambda)$, in generale, non si hanno soluzioni pel sistema non omogeneo V; questi particolari valori li diremo *autovalori di λ relativi al sistema omogeneo* VI.

Per ognuno di tali valori, esistono soluzioni pel sistema omogeneo VI diverse dalla soluzione identicamente nulla, e inversamente se, per un particolare valore di λ esistono soluzioni, non nulle identicamente, pel sistema VI, questo particolare valore è un *autovalore,* una radice cioè dell'equazione $\Delta(\lambda) = 0$.

Una soluztone del sistema VI *diversa dalla soluzione identicamente nulla, corrispondente ad un assegnato autovalore, si dirà un'autosoluzione.*

Un autovalore lo diremo semplice, doppio, triplo ecc. secondo che ad esso corrisponderà una sola soluzione oppure due, tre ecc. linearmente indipendenti.

Evidentemente affinchè un autovalore $\bar{\lambda}$ sia p^{uplo}, occorre e basta che la caratteristica del determinante $\Lambda(\lambda)$ per $\lambda = \bar{\lambda}$ sia $2m - p$.

La funzione $\Delta(\lambda)$, in un punto $\bar{\lambda}$ che sia un autovalore p^{uplo}, ha un infinitesimo di ordine p almeno. In tale ipotesi, infatti, per $\lambda = \bar{\lambda}$ sono nulli tutti i minori di ordine $2m - (p - 1)$ del determinante $\Delta(\lambda)$, e, per conseguenza, nel medesimo punto $\bar{\lambda}$, saran nulle, insieme a $\Delta(\lambda)$, anche tutte le sue derivate fino a quelle di ordine $p - 1$ almeno.

La esistenza della menzionata funzione meromorfa $\Omega(x, \lambda)$ è, in particolare, senz'altro assicurata quando si sia constatata la incompatibilità del sistema differenziale seguente:

$$\text{VII} \quad \left\{ \begin{array}{l} D[\omega] \equiv \sum \dfrac{d^{m-j}}{d x^{m-j}} \left\{ \theta_j \dfrac{d^{m-j}\omega}{d x^{m-j}} \right\} + B(x)\, \omega = 0 \\[2ex] L_i[\omega] \equiv 0 \end{array} \right.$$

ottenuto da VI facendovi $\lambda = 0$, chè in tale caso $\Delta(o) \neq 0$ e quindi $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$. Per la funzione $\Omega(x, \lambda)$, l'origine $\lambda = 0$, sarà allora un punto regolare. Ove invece il sistema VII sia compatibile, e però $\Delta(o) = 0$, la funzione $\Omega(x, \lambda)$ esisterà ancora se $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$ e per essa l'origine sarà un polo.

3. — *Caso in cui ogni valore di λ è un autovalore — costruzione delle relative soluzioni indipendenti del sistema omogeneo* VI. La funzione $\Delta(\lambda)$ sia identicamente nulla, ogni valore di λ sarà allora un autovalore. Supponiamo, in generale, che con $\Delta(\lambda)$ siano nulli identicamente anche tutti i suoi minori di ordine $2m - k + 1$, mentre esista un minore almeno di ordine $2m - k$ (per es. quello formato con le prime $2m - k$ righe e colonne del medesimo determinante $\Delta(\lambda)$) non identicamente zero.

Riesce assai agevole, in tale supposto, costruire k integrali linearmente indipendenti del sistema VI.

Per questo si prenda in considerazione la seguente matrice di $2m - k + 1$ righe e $2m$ colonne:

$$\left\| \begin{array}{l} L_{11}(\lambda) \; L_{12}(\lambda) \; \ldots\ldots \; L_{1,2m-k}(\lambda) \ldots\ldots L_{1,2m}(\lambda) \\ L_{21}(\lambda) \ldots\ldots\ldots\ldots \; L_{2,2m-k}(\lambda) \ldots\ldots L_{2,2m}(\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_{2m-k,1}(\lambda) \ldots\ldots\ldots \; L_{2m-k}(\lambda)_{2m-k} \ldots L_{2m-k}(\lambda)_{2m} \\ \eta_1(x,\lambda) \; \eta_2(x,\lambda) \; \ldots\ldots \; \eta_{2m-k}(x,\lambda) \ldots\ldots \eta_{2m}(x,\lambda) \end{array} \right\|$$

I k orlati del minore formato con le prime $2m - k$ righe e colonne di questa matrice, i k determinanti cioè di ordine $2m - k + 1$ ottenuti orlando il detto minore con l'ultima riga della matrice, e con una qualsiasi colonna seguente alla colonna di indice $2m - k$, soddisfano, è chiaro, al sistema VI e nessuno di essi è, d'altra parte, identicamente nullo (1). Che questi k integrali siano poi indipendenti è senz'altro evidente.

Il sistema VI non può, per λ generico, ammettere d'altronde, altri integrali indipendenti da quelli costruiti; ogni altra sua soluzione, quindi, si otterrà combinando linearmente i k integrali sopra ricavati secondo numeri che possono dipendere soltanto da λ.

(1) Notiamo che il procedimento tenuto per la costruzione dei k integrali indipendenti di VI nell'ipotesi $\Delta(\lambda) \equiv 0$, è applicabile inalterato per la costruzione delle k autosoluzioni corrispondenti a un dato autovalore $\overline{\lambda}$ k^{uplo}.

III.

Sviluppi in serie di potenze di λ della funzione meromorfa $\Omega(x, \lambda)$ integrale del sistema differenziale V.

1. — *Sviluppo di $\Omega(x, \lambda)$ in serie di potenze intere nell' intorno di un punto regolare — caso particolare in cui detto punto sia l' origine.* Il sistema differenziale VII, il sistema, cioè ottenuto da VI facendovi $\lambda = 0$, sia incompatibile, ciò che equivale a supporre $\Delta(o) \neq 0$. La funzione $\Omega(x, \lambda)$ esisterà di certo, in questo caso, e l' origine ($\lambda = 0$) sarà per essa un punto regolare; in un intorno di tale punto dovrà essere possibile, dunque, uno sviluppo in serie di potenze intere positive e ascendenti di λ, per la nostra funzione meromorfa. Ci proponiamo qui la costruzione dello sviluppo in parola.

Pertanto poniamo:

$$\Omega(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \lambda^n \tag{16}$$

Per la determinazione delle funzioni $u_n(x)$ sostituiamo, nel sistema V, ad ω il secondo membro della (16); si ha:

$$L_\lambda \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n \right] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_\lambda[u_n] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n D[u_n] +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n \sum_{j=1}^{\infty} A_j \lambda^j = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \lambda^n$$

$$L_i \left[\sum_{n=0}^{\infty} u_n \lambda^n \right] \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L_i[u_n] = a_i \qquad (\text{per } i = 1, 2 \ldots 2m)$$

Uguagliando i coefficienti delle stesse potenze di λ, negli ultimi due membri delle uguaglianze scritte, ricaviamo le seguenti relazioni:

$$\begin{array}{lll}
D[u_0] = r_0; & L_i[u_0] = a_i & (\text{per } i = 1, 2 \ldots 2m) \\
D[u_1] + A_1 u_0 = r_1; & L_i[u_1] = 0 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \\
D[u_2] + A_1 u_1 + A_2 u_0 = r_2; & L_i[u_2] = 0 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
D[u_n] + \sum_{j=1}^{n} A_j u_{n-j} = r_n; & L_i[u_n] = 0 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

dalle quali si deduce subito un calcolo ricorrente per la costruzione delle funzioni $u_n(x)$. Per la (5) invero, posto che $G(x, \xi)$ rappresenti la funzione di Green relativa al sistema omogeneo VII, e le $G(x)$ gli integrali dei sistemi analoghi ai sistemi (5)' considerati nel n. 1 del cap. I ma relativi ora a VII, si ha:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{2m} a_i G_i(x) + \int_a^b G(x, \xi)\, r_0(\xi)\, d\xi$$

$$u_1 = \int_a^b G(x, \xi)\, [r_1(\xi) - A_1(\xi)\, u_0(\xi)]\, d\xi$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n = \int_a^b G(x, \xi) \left[r_n(\xi) - \sum_{i=1}^{n} A_i(\xi)\, u_{n-i}(\xi) \right] d\xi$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

In questa prima ipotesi dunque, abbiamo un metodo di calcolo per approssimazione dell' integrale di V in un intorno del punto $\lambda = 0$.

Generalizzazione del caso particolare. — L' ipotesi della incompatibilità del sistema differenziale VII, o ciò che fa lo stesso del non annullarsi, nel punto $\lambda = 0$, della funzione intera $\Delta(\lambda)$, ci è stata sufficiente per affermare la esistenza della funzione meromorfa $\Omega(x, \lambda)$, non solo, ma anche per costruirne un elemento, precisamente quello relativo al punto (regolare per Ω) $\lambda = 0$. Ma se $\Delta(\lambda) \equiv\!\!\!\!\!| \; 0$, la $\Delta(x, \lambda)$ esiste certamente, supposto, dunque, che in un dato punto ε, $\Delta(\varepsilon) \neq 0$, dovrà essere possibile — nell'intorno di questo punto — (regolare per $\Omega(x, \lambda)$) sviluppare Ω stessa in serie di potenze intere positive e crescenti di $\lambda - \varepsilon$.

La considerazione che segue ci consente, nella costruzione di tale sviluppo, di seguire una via identica a quella seguita nel caso particolare già trattato.

Nel sistema differenziale V, e nella funzione intera $\Delta(\lambda)$ che vi si riferisce, si operi la sostituzione:

$$\lambda = \lambda' + \varepsilon$$

e si ponga:

$$(\lambda' + \varepsilon) A(x, \lambda' + \varepsilon) = \overline{B}(x) + \lambda' \overline{A}(x, \lambda') = \overline{B}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda'^i \overline{A}_i(x).$$

$$r(x, \lambda' + \varepsilon) = \overline{r}(x, \lambda') = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda'^i \overline{r}_i(x)$$

$$\Delta(\lambda' + \varepsilon) = \overline{\Delta}(\lambda')$$

$$D[\omega] + \overline{B}(x) = D_\varepsilon[\omega]$$

Il sistema V, con tali posizioni, assumerà la forma:

$$\overline{\text{V}} \qquad \begin{cases} D_\varepsilon[\omega] + \lambda' \overline{A}(x, \lambda')\, \omega = \overline{r}(x, \lambda') \\ L_i[\omega] = a_i \qquad \text{(per } i = 1, 2, \ldots 2m) \end{cases}$$

ed il sistema associato l'altra:

$$\overline{\text{VI}} \qquad \begin{cases} D_\varepsilon[\omega] + \lambda' \overline{A}(x, \lambda')\, \omega = 0 \\ L_i[\omega] = 0 \qquad \text{(per } i = 1, 2, \ldots 2m) \end{cases}$$

Il sistema differenziale che da quest'ultimo si deduce facendovi $\lambda' = 0$, (l'analogo di VII), e cioè

$$\overline{\mathrm{VII}} \qquad \begin{aligned} &D_i[\omega] = 0 \\ &L_i[\omega] = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2, \ldots 2m) \end{aligned}$$

è incompatibile, chè pel determinante $\overline{\Delta}(\lambda')$ relativo a $\overline{\mathrm{V}}$, si ha:

$$\overline{\Delta}(o) = \Delta(\varepsilon) \neq 0$$

ove si consideri quindi la funzione di Green relativa a $\overline{\mathrm{VII}}$, e si segua l'identico procedimento di cui al principio di questo numero per la costruzione dello sviluppo di $\Omega(x, \lambda)$ nell'intorno della origine, si perverrà allo sviluppo di Ω stessa, — valido in un intorno di $\lambda' = 0$, — in serie procedente secondo le potenze intere positive e crescenti di λ', e cioè di $(\lambda - \varepsilon)$.

2. — *Sviluppo di $\Omega(x, \lambda)$ in serie di potenze ne'l'intorno di un polo. Caso in cui l'origine $\lambda = 0$, sia polo per $\Omega(x, \lambda)$.* Questo caso si presenta quando il sistema differenziale VII è compatibile, o ciò che fa lo stesso, $\Delta(o) = 0$, senza però che ad un tempo sia $\Delta(\lambda) \equiv 0$. Supporremo dunque ora, $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$, $\Delta(o) = 0$.

La funzione meromorfa $\Omega(x, \lambda)$, in questa ipotesi avrà un polo di ordine finito nel punto $\lambda = 0$.

Proponiamoci qui la costruzione dello sviluppo di $\Omega(x, \lambda)$ in serie di Laurent nell'intorno dell'origine.

Nella trattazione che intraprenderemo verran precisate anche:

1.° *la condizione necessaria e sufficiente perchè la $\Omega(x, \lambda)$ nell'origine abbia un polo di ordine assegnato ν;*

2.° *quali condizioni occorre e basta soddisfare affinchè $\Delta(\lambda)$ riesca nulla identicamente.*

Per semplicità limiteremo queste nostre considerazioni al caso che la serie $A(x, \lambda)$ si riduca al suo primo termine, cioè $q = B(x) + \lambda A(x)$.

Sia $2m - p$ la caratteristica del determinante $\Delta(o)$, e ν l'ordine — finito — del polo di $\Omega(x, \lambda)$ nell'origine.

Lo sviluppo in serie di Laurent di $\Omega(x, \lambda)$, relativo al punto $\lambda = 0$, sarà allora della forma:

$$\Omega(x, \lambda) = \sum_{n=-\nu}^{\infty} \lambda^n u_n(x). \tag{17}$$

La sostituzione, nel sistema V, di ω col secondo membro della (17), conduce alle seguenti relazioni nelle u_n:

$$L_\lambda\left[\sum_{n=-\nu}^{\infty} \lambda^n u_n\right] \equiv D\left[\sum_{n=-\nu}^{\infty} \lambda^n u_n\right] + \lambda A \sum_{n=-\nu}^{\infty} \lambda^n u_n =$$

$$= \sum_{n=-\nu}^{\infty} \lambda^n D[u_n] + \sum_{n=-\nu}^{\infty} \lambda^{n+1} A u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n r_n.$$

$$L_i\left[\sum_{n=-\nu}^{\infty} \lambda^n u_n\right] = \sum_{n=-\nu}^{\infty} \lambda^n L_i[u_n] = a_i$$

$$(\text{per } i = 1, 2, \ldots 2m).$$

Dalle quali deduciamo:

$$(18) \qquad \begin{array}{lll} D[u_{-\nu}] = 0; & L_i[u_{-\nu}] = 0 & \text{per } i = 1, 2 \ldots, 2m \\ D[u_j] + A u_{j-1} = 0; & L_i[u_j] = 0 & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \end{array}$$

dove l'indice j assume successivamente i valori $-\nu + 1$, $-\nu + 2, \ldots, -1$.

$$18 \qquad \begin{array}{lll} D[u_0] + A u_{-1} = r_0 & L_i[u_0] = a_i & \text{per } i = 1, 2 \ldots, 2m\ 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D[u_n] + A u_{n-1} = r_n & L_i[u_n] = 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

per n percorrente la successione $1, 2, 3, \ldots, \infty$.

Ora se la caratteristica di $\Delta(o)$, è $2m-p$, esistono p integrali linearmente indipendenti del sistema omogeneo VII(1): siano $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_p$ precisamente p integrali indipendenti di VII, e $\overline{\gamma_{p+1}}, \overline{\gamma_{p+2}} .., \overline{\gamma_{mp}}$ un sistema di altri $2m-p$ integrali della equazione $D[\omega]=0$ costituenti — insieme ai primi — un sistema di integrali fondamentale per questa stessa equazione. Ricordiamo poi — per quanto fu detto al n. 4. di I — che la soluzione generale di un sistema del tipo

$$D[\omega]=r; \quad L_i[\omega]=0 \qquad \text{per } (i=1,2..,2m)$$

nella ipotesi che il determinante $\Delta \equiv \Delta(o)$ relativo, abbia caratteristica $2m-p$, e siano inoltre soddisfatte condizioni come le (11), sempre ad esso sistema relative, condizioni cioè del tipo:

$$(11)' \qquad \sum_{i=1}^{2m} \beta_{ij}\, a_j = \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{2m} \beta_{ij}\, d_i(\xi)\right] r(\xi)\, d\xi \qquad (\text{per } i=1,2,..,p),$$

la soluzione generale, si diceva, è data dalla seguente formola:

$$(13)' \qquad \omega = \sum_{j=1}^{p} c_j\, \gamma_j(x) + \sum_{j=p+1}^{2m} \overline{\gamma_j}(x) \left[\sum_{i=1}^{2m} d_{ij}\, a_i\right] + \\ + \int_a^b \left[g(x,\xi) - \sum_{j=p+1}^{2m} \overline{\gamma_j}(x) \left\{\sum_{i=1}^{2m} d_{ij}\, d_i(\xi)\right\}\right] r(\xi)\, d\xi \equiv \Gamma_p(x) + \\ + \int_a^b \Gamma_p(x,\xi)\, r(\xi)\, d\xi$$

dove, naturalmente, i simboli hanno il significato loro attribuito nel menzionato n. 4 di I, ma si riferiscono al sistema differenziale VII.

---

(1) V. nota 1 del n. 3 di II a pag. 30.

Per semplicità di notazione porremo

$$\sum_{i=1}^{2m} \beta_{ij} a_i = -\overline{H}_j; \quad \sum_{i=1}^{2m} \beta_{ij} d_i(\xi) = H_j(\xi); \quad \sum_{j=p+1}^{2m} \overline{\gamma}_j(x) \sum_{i=1}^{2m} d_i\, a_i = \psi(x)$$

Dalle (18) per la (13)′ segue;

$$(19)\quad \begin{cases} u_{-\nu} = c_p^{(-\nu)} \gamma_1 + c_{p-1}^{(-\nu)} \gamma_2 + \ldots + c_1^{(-\nu)} \gamma_p \equiv \sum\limits_{i=1}^{p} \gamma_i c_{p+1-i}^{(-\nu)} \\[2ex] u_j = \sum\limits_{i=1}^{p} \gamma_i c_{p+1-i}^{(j)} + \int_a^b \Gamma_p(x,\xi) A(\xi) u_{j-1}(\xi)\, d\xi \text{ (1)} \\ \qquad\qquad (\text{per } j = -\nu+1, -\nu+2, \ldots -1) \\[2ex] u_0 = \sum\limits_{i=1}^{p} \gamma_i c_{p+1-i}^{(o)} + \psi + \int_a^b \Gamma_p(x,\xi) A(\xi)\, U_{-1}(\xi)\, d\xi - \\ \qquad\qquad - \int_a^b \Gamma_p(x,\xi)\, r_0(\xi)\, d\xi \\[2ex] u_n = \sum\limits_{i=1}^{p} \gamma_i c_{p+1-i}^{(n)} + \int_a^b \Gamma_p(x,\xi) A(\xi) u_{n-1}(\xi)\, d\xi - \\ \qquad - \int_a^b \Gamma_p(x,\xi)\, r_n(\xi)\, d\xi \quad (\text{per } n = 1, 2, \ldots, \infty) \end{cases}$$

dove le $c_r^{(s)}$ rappresentano delle costanti da determinare.

La determinazione delle u_i, richiede la ricerca di tali costanti. Per tanto va ricordato, secondo quanto venne stabilito nel citato n. 4, che insieme alle (19) devono valere le relazioni (11)′, che dànno le condizioni di compatibilità dei vari sistemi (18) (2).

---

(1) La funzione $\Gamma_p(x, \xi)$ che figura nelle (19) è quella che figura nelle (13)′ cambiata di segno.

(2) Condizioni, cioè, necessarie e sufficienti perchè i medesimi sistemi ammettano soluzioni.

Queste condizioni permettono, come si constaterà, la determinazione delle costanti $c_r^{(s)}$.

La possibilità del sistema

$$D[u_j] + A\, u_{j-1} = 0 \quad L_i[u_j] = 0 \quad (\text{per } i = 1, 2, \ldots, 2m)$$

importa il simultaneo verificarsi delle condizioni (come vuole la (11)'):

$$(20) \qquad \int_a^b H_l(\xi)\, A(\xi)\, u_{j-1}(\xi)\, d\xi = 0$$

$$(\text{per } l = 1, 2, \ldots, p)$$

medesimamente dalla possibilità dei rimanenti sistemi (18), seguono le relazioni:

$$(20)' \qquad \int_a^b H_l(\xi)\, A(\xi)\, u_{-1}(\xi)\, d\xi = \overline{H}_l + \int_a^b H_l(\xi)\, r_0(\xi)\, d\xi$$

$$(\text{per } l = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(20)'' \qquad \int_a^b H_l(\xi)\, A(\xi)\, u_{n-1}(\xi)\, d\xi = \int_a^b H_l(\xi)\, r_n(\xi)\, d\xi$$

$$(\text{per } l = 1, 2, \ldots, p)$$

e dove n percorre la successione $1, 2, 3, \ldots, \infty$.

Si ponga:

$$H_{ji}^{(1)} = \int_a^b H_j(\xi)\, A(\xi)\, \gamma_i(\xi)\, d\xi$$

$$H_{ij}^{(n)} = \int_a^b H_j(\xi)\, A(\xi)\, d\xi \int_a^b \Gamma_p(\xi, \xi_1)\, A(\xi_1)\, d\xi_1 \ldots$$

$$\ldots \int_a^b \Gamma_p(\xi_{n-2}, \xi_{n-1})\, A(\xi_{n-1})\, \gamma_i(\xi_{n-1})\, d\xi_{n-1}$$

$$H_j^{(1)} = \int_a^b H_j(\xi) A(\xi) \psi(\xi) \, d\xi.$$

$$H_j^{(n)} = \int_a^b H_j(\xi) A(\xi) \, d\xi \int_a^b \Gamma_p(\xi, \xi_1) A(\xi_1) \, d\xi_1 \dots$$
$$\dots \int_a^b \Gamma_p(\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) A(\xi_{n-1}) \psi(\xi_{n-1}) \, d\xi_{n-1}$$

$$R_{jm}^{(1)} = \int_a^b H_j(\xi) r_m(\xi) \, d\xi$$

$$R_{jm}^{(n)} = \int_a^b H_j(\xi) A(\xi) \, d\xi \int_a^b \Gamma_p(\xi, \xi_1) A(\xi_1) \, d\xi_1 \dots$$
$$\dots \int_a^b \Gamma_p(\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) r_m(\xi_{n-1}) \, d\xi_{n-1}.$$

Dalle (20), grazie alle (19), ricaviamo il sistema seguente di equazioni lineari nelle $c_r^{(s)}$.

$$(21)\left\{\begin{array}{l}
\sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(1)} c_{p+1-i}^{(-\nu)} = 0 \\
\qquad\qquad (\text{per } j = 1, 2, .. d_1). \\
\sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(1)} c_{p+1-i}^{(-\nu)} + \sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(2)} c_{p+1-i}^{(-\nu)} = 0 \\
\qquad\qquad (\text{per } j = 1, 2, .., p). \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sum_{i=1}^{p} H_{ij}^{(1)} c_{p+1-i}^{(-2)} + \sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(2)} c_{p+1-i}^{(-3)} + \dots\dots + \sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(\nu-1)} c_{p+1-i}^{(-\nu)} = 1 \\
\qquad\qquad (\text{per } j = 1, 2, .., p).
\end{array}\right.$$

Questo sistema si deve poter soddisfare con valori non tutti nulli per le incognite $c_i^{(-\nu)}$ (per $i = 1, 2, .., p$), chè, avendo supposto nell'origine $\lambda = 0$ un polo di ordine ν per la funzione meromorfa $\Omega(x, \lambda)$, non può il coefficiente di $\lambda^{-\nu}$ riuscire identicamente nullo.

Dalle ulteriori relazioni (20)′ e (20)″, per le (19), sempre seguono poi rispettivamente le altre equazioni:

$$
(21)' \begin{cases} \sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(1)} c_{p+1-i}^{(-1)} + \sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(2)} c_{p+1-i}^{(-2)} + \dots + \sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(\nu)} c_{p+1-i}^{(-\nu)} = \overline{H}_j + R_{j0}^{(1)} \\ \sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(1)} c_{p+1-i}^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(2)} c_{p+1-i}^{(n-2)} + \dots + \sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(\nu)} c_{p+1-i}^{(n-\nu)} + \\ + \sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(\nu+1)} c_{p+1-i}^{(n-\nu-1)} + \dots + \sum_{i=1}^{p} H_{ji}^{(n+\nu)} c_{p+1-i}^{(-\nu)} = - H_j^{(n)} + \sum_{i=0}^{n} R_{j,n-1}^{(i+1)} \end{cases}
$$

nelle quali j assume i valori $1, 2, \dots p$; ed n percorre la successione $1, 2, \dots \infty$.

È bene, per dare forma più simmetrica al sistema di infinite equazioni ed incognite che dovremo prendere in esame, fare le ulteriori posizioni:

$$
c_r^{(s)} = \chi_r^{(s+\nu+1)}; \quad H_{ji}^{(s)} = H_{jis}; \quad \overline{H}_j + R_{j0} = K_{j\nu}; \quad - H_j^{(n)} + \sum_{i=0}^{n} R_{j,n-1}^{(i+1)} = K_{j,n+\nu}
$$

e per uniformità poniamo pure:

$$
0 = K_{jm} \quad \text{per} \quad m = 1, 2, \dots \nu - 1.
$$

Il sistema delle (21) e (21)′ assumerà allora la forma seguente:

$$
(22) \qquad A_{jm} \equiv \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} H_{jir} \chi_{p+1-i}^{(m+1-r)} - K_{jm} = 0
$$

$$
(\text{per } j = 1, 2, \dots p; \text{ ed } n = 1, 2, 3, \dots \infty)\ (1).
$$

(1) Lo studio di un sistema come il (22), in ipotesi più generali, fa oggetto di una mia nota in corso di pubblicazione.

Importa per altro notare che il nostro sistema (22) dovrà essere possibile comunque si scelgano le costanti a_i $(i=1, 2, \ldots 2m)$ contenute nei termini K_{ν}, $(j=1, 2, \ldots p)$, costituenti i termini noti del gruppo di p equazioni (facenti parte di (22)), $A_{j\nu}=0$ $(j=1, 2, \ldots p)$. Questo perchè la esistenza o meno di $\Omega(x, \lambda)$, non dipende dalla scelta delle costanti a_i, nè, *in generale,* da tali costanti dipende l'ordine dei suoi poli (1). Nello studio del sistema (22), noi, quindi, tenuto conto di ciò, supporremo le a_i, e però le $K_{j\nu}$ che ne sono funzioni lineari, costanti generiche (non scelte cioè in modo particolare).

(1) V. n. 1 di II.

Sopra un sistema lineare di infinite equazioni con infinite incognite.

Prendiamo in esame il sistema lineare di infinite equazioni ed infinite incognite, seguente:

$$(22) \qquad A_{jm} \equiv \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} H_{jir}\, \chi_{p+1-i}^{(m+1-r)} - K_{jm} = 0$$

$$\text{per } j = 1, 2, \dots p; \text{ ed } m = 1, 2, 3, \dots \infty$$

e proponiamoci — nelle ipotesi che: $K_{jm} \equiv 0$ per $j = 1, 2, \dots p$; $m = 1, 2, \dots \nu - 1$; e i termini noti $K_{j\nu}$ $(j = 1, 2, \dots p)$ relativi al gruppo di p equazioni $A_{j\nu} = 0$ (per $j = 1, 2, \dots p$) siano numeri generici — di precisare: le condizioni, necessarie e sufficienti, che intercedono fra i coefficienti H_{jir} e K_{jm} nel caso che il sistema medesimo sia compatibile e determinato e nella sua soluzione i valori delle incognite $\chi_s^{(1)}$ $(s = 1, 2, \dots p)$ non siano tutti nulli, — *e stabilire, quindi, un procedimento ricorrente, per la costruzione della stessa soluzione.*

Osserviamo, intanto, subito che se il sistema (22) è possibile, e ammette soluzioni nelle quali i valori delle $\chi_s^{(1)}$, $(s = 1, 2, \dots p)$, non siano tutti nulli, consegue necessariamente che esistono soluzioni, — diverse da quella identicamente nulla — pel sistema omogeneo di p equazioni con p incognite seguente:

$$(23) \qquad A_{j1} \equiv \sum_{i=2}^{p} H_{ji1}\, \chi_{p+1-i}^{(1)} = 0$$

$$(\text{per } j = 1, 2, \dots p)$$

e quindi pel determinante $A^{(1)}$, di (23) si ha:

$$A^{(1)} \equiv \begin{vmatrix} H_{111} & H_{121} \dots\dots H_{1p1} \\ H_{211} & H_{221} \dots\dots H_{2p1} \\ \dots & \dots\dots\dots \\ \dots & \dots\dots\dots \\ H_{p11} & H_{p21} \dots\dots H_{pp1} \end{vmatrix} = 0.$$

Supponiamo che la caratteristica di $A^{(1)}$ sia $p - h$ $(h > 0)$, o, ciò che fa lo stesso, i primi membri del sistema (23) legati da h relazioni lineari indipendenti. Siano queste relazioni, ad esempio, le seguenti:

$$(23)' \qquad \sum_{j=1}^{p} M_{jl} A_{j1} = 0 \qquad (\text{per } l = 1, 2, \dots h)$$

e, per fissare le idee, ammettiamo che nella matrice delle M_{jl}

$$(23)'' \qquad \begin{Vmatrix} M_{11} & M_{12} \dots\dots M_{1p} \\ M_{21} & M_{22} \dots\dots M_{2p} \\ \dots & \dots\dots\dots \\ \dots & \dots\dots\dots \\ M_{h1} & M_{h2} \dots\dots M_{hp} \end{Vmatrix}$$

il determinante delle ultime h colonne sia diverso da zero, ciò che è quanto dire che le prime $p - h$ equazioni di (23), sono linearmente indipendenti.

Ciò posto, si consideri il sistema di p equazioni e p incognite seguente:

$$(24) \qquad A_{jm} \equiv \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} H_{jir} \chi_{p+1-i}^{(m+1-r)} - K_{jm} \equiv \sum_{i=1}^{p} H_{ji1} \chi_{p+1-i}^{(m)} +$$

$$+ \sum_{r=2}^{m} \sum_{i=1}^{p} H_{jir} \chi_{p+1-i}^{(m+1-r)} - K_{jm} = 0$$

$$(\text{per } j = 1, 2, \dots p)$$

dove m è supposto fisso potendo però avere un qualsiasi valore della successione $1, 2 \dots \infty$.

Moltiplicando i due membri della prima delle (24), per M_{1l}, quelli della seconda per M_{2l} etc. quelli della p per M_{pl}, e sommando membro a membro segue:

$$(24)' \quad \sum_{j=1}^{p} M_{jl} A_{jm} = \sum_{j=1}^{p} M_{jl} \sum_{r=2}^{m} \sum_{i=1}^{p} H_{jir} \chi_{p+1-i}^{(m+1-r)} - \sum_{j=1}^{p} M_{jl} K_{jm} =$$

$$= \sum_{r=2}^{m} \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} M_{jl} H_{jir} \right) \chi_{p+1-i}^{(m+1-r)} - \sum_{j=1}^{p} M_{jl} K_{jm}$$

la quale vale per tutti i valori di l da 1 ad h.

Si ponga:

$$\sum_{j=1}^{p} M_{jl} H_{jir} = \overline{H}_{l,i,r-1} \, ; \quad \sum_{j=1}^{p} M_{jl} K_{jm} = \overline{K}_{l,m-1} \, ;$$

$$\sum_{r=2}^{m} \sum_{j=1}^{p} \overline{H}_{l,i,r-1} \chi_{p+1-i}^{(m+1-r)} - \overline{K}_{l,m-1} = \overline{A}_{l,m-1}$$

la (24)′ si scriverà allora semplicemente

$$(24)'' \qquad \sum_{j=1}^{p} M_{jl} A_{jm} = \overline{A}_{l,m-1} \qquad \text{che vale per } l = 1, 2, \dots h$$

Il sistema (24), di conseguenza, viene ad essere equivalente al sistema, pure di p equazioni, seguente:

$$(25) \qquad \begin{cases} A_{jm} = 0 & (\text{per } j = 1, 2, \dots p - h) \\ \overline{A}_{l,m-1} = 0 & (\text{per } l = 1, 2, \dots h) \end{cases} \qquad (m \geqslant 2)$$

E invero, che ogni soluzione di (24), sia anche soluzione di (25), è evidente; viceversa, poichè per le (24)″, e grazie alla ipotesi fatta sulla matrice delle M_{jl}, possiamo esprimere i primi membri delle ultime h equazioni di (24) linearmente ed omogeneamente per i primi membri delle equazioni (25), ogni soluzione del sistema (25), è anche soluzione del sistema (24).

Da quanto precede si può trarre questa conseguenza:

Se il sistema (22) *è possibile, e ammette soluzioni nelle quali i valori delle* $\chi_s^{(1)}$ $(s=1,2,\ldots p)$ *non siano tutti nulli, consegue necessariamente:*

$$\textit{determinante}\ A^{(1)}=0,$$

di più, riesce pure possibile il sistema:

$$(22)' \qquad \left\{ \begin{array}{ll} A_{j1}=0 & (j=1,2,\ldots p-h) \\ \left\{ \begin{array}{l} A_{jm}=0 \\ \bar{A}_{l,m-1}=0 \end{array} \right. & \begin{array}{l} (j=1,2,\ldots p-h) \\ (l=1,2,\ldots h) \end{array} \end{array} \right.$$
$$\text{per } m=2,3,4,\ldots\infty.$$

Inversamente, dalla possibilità del sistema di p equazioni e incognite (23) *con soluzioni diverse da quella identicamente nulla, e di quella del sistema di infinite equazioni e incognite* (22)′ *dedotto da* (22) *e* (23) *nel descritto modo, segue la possibilità del sistema* (22) *stesso.*

Nel sistema (22)′ associamo le h equazioni $\bar{A}_{l,m-1}=0$ $(l=1,2,\ldots h)$ alle $p-h$ equaziomi $A_{jm-1}=0$ $(j=1,2,\ldots p-h)$ che le precedono, e poniamo

$$\bar{A}_{l,m-1}=A^{(2)}_{p-h+l,m-1};\quad \bar{H}_{lir}=H^{(2)}_{p-h+l,i,r};\quad \bar{K}_{l,m-1}=K^{(2)}_{p-h+l,m-1}$$

e per uniformità;

$$A_{jm}=A^{(2)}_{jm};\quad H_{jir}=H^{(2)}_{jir};\quad K_{jm}=K^{(2)}_{jm}$$
$$(\text{per } j=1,2,\ldots p-h;\ m=1,2,\ldots\infty).$$

Il sistema (22)′ *assumerà allora la forma semplice:*

$$(26) \qquad A^{(2)}_{jm} \equiv \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} H^{(2)}_{jir}\, \chi^{(r+1-r}_{p+1-i} - K^{(2)}_{jm} = 0$$

$$(\text{per } j = 1, 2, \ldots p; \text{ ed } m = 1, 2, 3, \ldots \infty)$$

che è la forma medesima del sistema (22).

Nelle supposte ipotesi, dunque, i sistemi (22) *e* (26) *sono equivalenti.*

Non è inopportuno, qui, porre bene in evidenza la *legge con la quale si deducono le equazioni del sistema* (26) *da quelle del sistema* (22). Per ogni fissato valore di m, il sistema delle p equazioni del gruppo $A^{(2)}_{jm} = 0$ (per $j = 1, 2, \ldots p$) viene così formato: le sue prime $p - h$ equazioni ($A^{(2)}_{1m} = 0$, $A^{(2)}_{2m} =, \ldots$ $A_{p-h,m} = 0$), sono identiche alle prime $p - h$ equazioni del sistema corrispondente di (22) $A_{jm} = 0$ ($j = 1, 2, \ldots p$); le rimanenti h equazioni sono combinazioni lineari delle p equazioni $A_{i,m+1=0}$ ($j = 1, 2, \ldots p$) del sistema (22), secondo i numeri costituenti la matrice:

$$(23)'' \qquad \left\| \begin{matrix} M_{11} & M_{12} \ldots . M_{1p} \\ M_{21} & M_{22} \ldots . M_{2p} \\ \ldots & \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots \ldots \\ M_{h1} & M_{h2} \ldots . M_{hp} \end{matrix} \right\| .$$

Dalla legge qui esposta, consegue che i termini noti $K^{(2)}_{jm}$ dei primi $\nu - 2$ gruppi di p equazioni $A^{(2)}_{jm} = 0$ ($j = 1, 2, \ldots p$) per $m = 1, 2, \ldots \nu - 2$, sono ancora nulli identicamente, mentre i termini noti $K^{(2)}_{j,\nu-1}$ ($j = 1, 2, \ldots p$), del gruppo $A^{(2)}_{j,\nu-1} = 0$ ($j = 1, 2, \ldots p$) sono da considerarsi, come i $K_{j\nu}$ ($j = 1, 2, \ldots p$) di (22), generici; si ha cioè:

$$K^{(2)}_{jm} \equiv 0 \ (\text{per } j = 1, 2, \ldots p; \ \text{e } m = 1, 2, \ldots \nu - 2)$$

mentre

$K^{(2)}_{j,\nu-1}$ sono numeri generici.

Il sistema (26), viene dunque a trovarsi nelle identiche condizioni del sistema (22), e però, nella ipotesi nostra, che cioè il medesimo sistema (22), e quindi (26), sia possibile, e ammetta soluzioni nelle quali i valori delle $\chi^{(1)}_s$ $(s=1,2,\ldots p)$ non siano tutti nulli, segue:

Il *determinante* $A^{(2)}$ *del sistema di* p *equazioni ed incognite*

$$A^{(2)}_{j1}=0 \qquad (\text{per } j=1,2,\ldots p) \tag{27}$$

è nullo, cioè:

$$A^{(2)} \equiv \begin{vmatrix} H^{(2)}_{111} & H^{(2)}_{121} \ldots\ldots H^{(2)}_{1p1} \\ H^{(2)}_{211} & H^{2}_{221} \ldots\ldots H_{2p1} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ H^{(2)}_{p11} & H^{(2)}_{p21} \ldots\ldots H^{(2)}_{pp1} \end{vmatrix} = 0$$

di più, nel supposto che i primi membri di (27), siano legati dalle $h^{(2)} \leq h$ (1) relazioni lineari indipendenti:

$$\sum_{j=1}^{p} M^{(2)}_{jl} A^{(2)}_{j1}=0 \qquad (l=1,2,\ldots h^{(2)}),$$

il sistema (26), riescirà equivalente a quello che da esso si deduce operando colle sue equazioni, e con i numeri $M^{(2)}_{jl}$ $(j=1,2,\ldots p;\ l=1,2,\ldots h^{(2)})$, secondo la legge (dianzi enunciata) con la quale fu dedotto il sistema (26) dal sistema (22) e dai numeri costituenti la matrice (23)".

(1) La caratteristica di $A^{(2)}$ non può di certo essere inferiore a quella di $A^{(1)}$ cioè di $p-h$, chè le prime $p-h$ righe di $A^{(2)}$, sono le medesime prime $p-h$ righe di $A^{(1)}$ e dianzi si suppose che tali righe fossero indipendenti.

Questo nuovo sistema di infinite equazioni ed incognite, con notazione naturale, verrà indicato col simbolo:

$$(28) \qquad A^{(3)}_{jm} = 0 \qquad (\text{per } j = 1, 2, \ldots p;\ m = 1, 2, \ldots \infty)$$

esso a sua volta ha forma identica ai sistemi (22) e (26), e si trova in condizioni analoghe a quelli, cioè, per i termini noti dei suoi primi gruppi di p equazioni si ha: (2)

$$K^{(3)}_{jm} \equiv 0 \quad (\text{per } j = 1, 2, \ldots p;\ m = 1, 2, \ldots \nu - 3)$$
$$K^{(3)}_{j,\nu-2} \quad (\text{per } j = 1, 2, \ldots p) \text{ sono numeri generici.}$$

La possibilità di (22), con la condizione che esista una sua soluzione per cui i valori delle $\chi^{(1)}_s$ $(s = 1, 2, \ldots p)$ non siano tutti nulli, porta, dunque, anche alla conseguenza che sia nullo il determinante $A^{(3)}$ del sistema

$$A^{(3)}_{j1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots p)$$

cioè

$$A^{(3)} \equiv \text{determinante } |H^{(3)}_{ji1}| = 0$$

ed inoltre, il sistema stesso equivalente all'altro che indicheremo:

$$(29) \qquad A^{(4)}_{jm} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots p;\ m = 1, 2, 3, \ldots \infty)$$

e che si deduce da (28) con la legge con la quale fu dedotto (28) stesso da (26), o (26) da (22).

Per questo sistema (29) si ha anche:

$$K^{(4)}_{jm} \equiv 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots p;\ m = 1, 2, \ldots \nu - 4)$$
$$K^{(4)}_{j,\nu-3} \quad (j = 1, 2, \ldots p) \text{ sono numeri generici.}$$

---

(2) Per coefficienti e i termini noti di $A^{(3)}_{jm} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots p;$ $m = 1, 2, \ldots \infty)$ verranno adottati, come è naturale, gli stessi simboli H_{jir}, K_{jm}, adottati nei sistemi (22) e (26) salvo che qui in alto a tali lettere si porrà l'indice (3), in altri termini per coefficienti e termini noti si adotteranno rispettivamente i simboli $H^{(3)}_{jir}$, $K^{(2)}_{j,m}$.

Dal sistema (29) con procedimento analogo se ne ricava un altro di egual forma:

$$A^{(5)}_{jm} = 0$$

ad esso equivalente ed equivalente pure ai sistemi (28), (26) e (22), e si deduce ad un tempo:

$$A^{(4)} \equiv \text{determinante } |H^{(4)}| = 0$$

e così via.

Le considerazioni fin qui svolte, riguardo al sistema (12), ci consentono di affermare:

Se il sistema (22) ammette soluzioni nelle quali i valori delle incognite $\chi^{(1)}_s$ $(s = 1, 2, \dots p)$ non siano tutti nulli, segue necessariamente:

I. *I determinanti* $A^{(1)}$; $A^{(2)}$; $A^{(3)}$; $A^{(4)}$;.... $A^{(\nu-1)}$; *dei vari sistemi di* p *equazioni:*

$$A^{(s)}_{jm} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots p), \text{ e per } s = 1, 2, \dots \nu - 1$$

che successivamente si deducono, sono tutti nulli;

II. *Il sistema* (22) *medesimo è equivalente al sistema:*

$$A^{(\nu)}_{jm} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots p;\ m = 1, 2, \dots . \infty) \tag{30}$$

dedotto da $A^{(\nu-1)}_{jm} = 0$ $(j = 1, 2, \dots p;\ m = 1, 2, \dots \infty)$ *con la legge con la quale fu dedotto il sistema* (26) *dal sistema* (22); *o* (28) *da* (26) ecc.

Pei termini noti $K^{(\nu)}_{j1}$ $(j = 1, 2, \dots p)$, delle prime p equazioni di quest'ultimo sistema (30), si ha:

$$K^{(\nu)}_{j1} \ (j = 1, 2, \dots p) \text{ sono numeri generici.}$$

Ora la possibilità del sistema (30), importa la possibilità del sistema di p equazioni e incognite seguente:

$$A^{(\nu)}_{j1} \equiv \sum_{i=1}^{p} H^{\nu}_{ji1} X^{1)}_{p+1-i} - K^{(\nu)}_{j1} = 0 \quad (\text{per } j = 1, 2, \dots p), \tag{31}$$

non solo, ma il sistema (30), e quindi il (31) devono essere possibili comunque si scelgano i p termini noti $K_{,\nu}$ $(j=1,2,\ldots p)$, pel sistema (31) quindi comunque si prendano le $K_j^{(\nu)}$; per questo occorre che il determinante $A^{(\nu)}$ del sistema (31) non sia zero, cioè:

$$A^{(\nu)} \equiv \text{determinante } |H_{ji}^{(\nu)}| \neq 0. \text{ (1)}$$

D'altra parte, se quest'ultima condizione è soddisfatta, il sistema (30), è non soltanto possibile, ma anche determinato, e nella sua soluzione, inoltre, i valori delle $\chi_s^{(1)}$ $(s=1,2,\ldots p)$ non sono tutti nulli.

Inversamente assegnato il sistema (22) se si verificano le ν condizioni:

$$A^{(1)} = A^{(2)} = \ldots = A^{(\nu-1)} = 0$$
$$A^{(\nu)} \neq 0$$

il sistema (22) stesso è determinato.

Si noti, che nella costruzione dei vari determinanti $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots A^{(\nu)}$, entrano solo i coefficienti del sistema di $2\nu p$ equazioni seguenti:

$$A_{jm} = 0 \quad (j=1,2,\ldots p;\; m=1,2,3,\ldots 2\nu).$$

È immediato un procedimento ricorrente per la determinazione dei valori delle $\chi_s^{(r)}$ $(s=1,2,\ldots p;\; r=1,2,\ldots \infty)$, costituenti la soluzione di (21), o, ciò che fa lo stesso, del sistema (30).

---

(1) A scanso di equivoci avvertiamo che nella scelta dei simboli abbiamo seguito questa regola. Quando dal sistema $A_{jm}^{(s)}=0$ siamo passati al sistema successivo $A_{jm}^{(s+1)}=o$. Ogni simbolo che nel primo portava in alto l'indice s nel secondo porta in alto l'indice $(s+1)$, del resto, poi, abbiamo adoperato le medesime lettere.

Invero dal sistema (31), si ricavano i valori, non tutti nulli, (le $K_{j\nu}$ in generale non sono tutte nulle) delle incognite $\chi_s^{(1)}$ $(s=1,2,\ldots p)$; noti questi valori, si sostituiscano nelle corrispondenti incognite del sistema:

$$A_{j2}^{(\nu)} \equiv \sum_{i=1}^{p} H_{ji1}^{(\nu)} \chi_{p+1-i}^{(2)} + \sum_{i=1}^{p} H_{ji2}^{(\nu)} \chi_{p+1-i}^{(1)} - K_{j2}^{(\nu)} = 0$$

$$(\text{per } j=1,2,\ldots p)$$

il quale viene, così, a ridursi a un sistema di p equazioni nelle p incognite $\chi_s^{(2)}$ $(s=1,2,\ldots p)$ determinato, perchè il suo determinante è ancora $A^{(\nu)}$, che è diverso da zero.

Ricavati, in tal modo, i valori di $\chi_s^{(1)}$ e $\chi_s^{(2)}$ $(s=1,2,\ldots p)$ dal sistema

$$A_{j3}^{(\nu)} \equiv \sum_{i=1}^{p} H_{ji1}^{(\nu)} \chi_{p+1-i}^{(3)} + \sum_{r=2}^{3} \sum_{i=1}^{p} H_{jir}^{(\nu)} \chi_{p+1-i}^{(4-r)} - K_{j3}^{(\nu)} = 0$$

$$(j=1,2,\ldots p),$$

nel quale alle incognite $\chi_s^{(1)}$ e $\chi_s^{(2)}$ $(s=1,2,\ldots p)$ siano stati sostituiti i valori corrispondenti ricavati, si otterranno i valori delle $\chi_s^{(3)}$ $(j=1,2,\ldots p)$, e così via.

Concludendo si potrà enunciare il:

Teorema. — Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema di infinite equazioni ed infinite incognite

$$A_{jm} \equiv \sum_{r=1}^{m} \sum_{i=1}^{p} H_{jir} \chi_{p+1-i}^{(m+1-r)} - K_{jm} = 0$$

$$(j=1,2,\ldots p;\ \text{ed } m=1,2,\ldots\infty)$$

« nelle ipotesi che le sue prime $(\nu-1)p$ equazioni $A_{jm}=0$ (per $j=1,2,\ldots p$; $m=1,2,\ldots \nu-1$) siano omogenee, e i p termini noti $K_{j\nu}$ $(j=1,2,\ldots p)$ del gruppo di p equazioni $A_{j\nu}=0$ $(j=1,2,\ldots p)$ siano generici », ammetta una unica soluzione, nella quale i valori delle $\chi_s^{(1)}$ $(s = 1, 2, \ldots p)$ non siano tutti nulli; è che siano soddisfatte, dai coefficienti delle prime $2\nu p$ equazioni $A_{jm} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots p;\ m = 1, 2, \ldots 2\nu)$, le seguenti p condizioni:

$$A^{(1)} = A^{(2)} = \ldots = A^{(\nu-1)} = 0;\ A^{(\nu)} \neq 0 \tag{32}$$

dove $A^{(i)}$ rappresenta il determinante delle prime p equazioni del sistema $A_{jm}^{(i)} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots p;\ m = 1, 2, \ldots \infty)$, della cui deduzione, dal sistema (22), abbiamo già detto in questa trattazione.

Il notevole risultato raggiunto nella trattazione del sistema di infinite equazioni ad infinite incognite (22), ci dà modo di enunciare in forma semplice e breve il teorema che fissa:

3 — *la condizione necessaria e sufficiente affinchè la* $\Omega(x, \lambda)$ *abbia nell'origine un polo di ordine* ν. Si ha cioè il seguente:

Teorema. — Perchè la funzione $\Omega(x, \lambda)$, abbia nell'origine $\lambda = 0$, un polo di ordine ν, occorre e basta che siano soddisfatte ν condizioni, e cioè sia:

$$A^{(1)} = A^{(2)} = \ldots A^{(\nu-1)} = 0;\ A^{(\nu)}; \neq 0$$

dove il significato delle $A^{(i)}$, le quali rappresentano determinanti di ordine p, è precisato nella trattazione del sistema (22) di infinite equazioni ad infinite incognite, e nella quale trattazione è pure data la legge di formazione dei medesimi determinanti.

Con la considerazione dei determinanti $A^{(i)}$, costruibili successivamente, in maniera semplice coi coefficienti H_{ir} del sistema (22), abbiamo anche modo di stabilire un criterio che fissa:

La condizione necessaria e sufficiente perchè ogni valore di λ sia un autovalore, o ciò che fa lo stesso sia nulla identicamente la funzione $\Delta(\lambda)$.

Vale in proposito il seguente:

TEOREMA. — Affinchè la funzione intera $\Delta(\lambda)$ sia nulla identicamente e quindi ogni valore di λ sia un autovalore, è necessario e basta che si abbia:

$$A^{(i)} = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2, \ldots \infty).$$

Che la condizione sia sufficiente è subito visto, poichè, in questa ipotesi, ($A^{(i)} = 0$ per $i = 1, 2, \ldots \infty$) ove non fosse $\Delta(\lambda) \equiv 0$, avendosi, però, sempre $\Delta(o) = 0$, esisterebbe la funzione meromorfa $\Delta(x, \lambda)$ integrale di V, la quale, per quanto è stato dimostrato dianzi, nell'origine avrebbe un polo di ordine finito; ora, se ν è l'ordine di tale polo, pel teorema sopra enunciato, riguardante l'ordine del polo di $\Omega(x, \lambda)$ nell'origine, si avrebbe:

$$A^{(\nu)} \neq 0$$

che contraddice l'ipotesi.

Ma la condizione è anche necessaria, difatti se $\Delta(\lambda) \equiv 0$, esiste, di certo, una funzione intera in λ $\Phi(x, \lambda)$ costituente un integrale del sistema omogeneo associato VI (1), poniamo:

$$\Phi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \lambda^n. \tag{33}$$

Sostituendo nel sistema VI il secondo membro di (33) al posto di ω, e uguagliando nei due membri di ciascuna delle uguaglianze che così si ottengono, i coefficienti delle mede-

(1) Vedi n. 3 del cap. II.

sime potenze di λ, si ottengono le relazioni seguenti fra le $v_n(x)$:

$$D[v_0] = 0 \qquad L_i[v_0] = 0 \quad (\text{per } i = 1, 2, \ldots 2m)$$
$$D[v_n] + A\, v_{n-1} = 0; \; L_i[v_n] = 0 \quad » \quad » \quad »$$

dove n percorre la successione $1, 2, \ldots \infty$.

Ora, se la caratteristica del determinante $\Delta(\lambda)$, nel punto $\lambda = 0$, è ad esempio, $2m - p$ esisteranno p integrali linearmente indipendenti del sistema omogeneo compatibile:

$$D[\omega] = 0; \quad L_i[\omega] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots 2m).$$

Chiamiamo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_p$ un tal sistema di p integrali indipendenti; segue, allora, per la (13) (1):

$$(33)' \qquad \begin{gathered} v_0 = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i\, c_{p+1-i}^{(0)} \\ v_n = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i\, c_{p+1-i}^{(n)} + \int_a^b \Gamma_p(x, \xi)\, A(\xi)\, v_{n-1}(\xi)\, d\xi \\ (\text{per } n = 1, 2, \ldots \infty) \end{gathered}$$

le $c_r^{(s)}$ essendo costanti da determinare.

Di più per le v_n si hanno, come vuole la (11) le relazioni

$$\int_a^b \left[\sum_{i=1}^{2m} \beta_{li}\, d_i(\xi)\right] A(\xi)\, v_{n-1}(\xi)\, d\xi \equiv \int_a^b H_l(\xi)\, A(\xi)\, v_{n-1}(\xi)\, d\xi = 0$$
$$(\text{per } l = 1, 2, \ldots p)$$

dove pel significato dei simboli ci riferiamo ai numeri 4 del cap. I, e 2 del cap. III.

Sostituendo in queste ultime relazioni successivamente i secondi membri di $v_0, v_1, \ldots v_{n-1} \ldots$ dati dalla (33)', veniamo

---

(1) Vedi n. 4 del cap, I.

a costruire un sistema di infinite equazioni nelle infinite incognite $c_r^{(s)}$ $(r=1,2,\ldots p;\ s=0,1,\ldots\infty)$, che ha la stessa forma del sistema (22), ma è omogeneo. Secondo il teorema generale, stabilito al n. 2 di questo capitolo, e relativo al sistema (22), quindi, l'esistenza di una soluzione pel detto sistema OMOGENEO, in cui non siano tutti nulli i valori delle incognite $c_r^{(0)}$ $(r=1,2,\ldots p)$, porta necessariamente alla conseguenza (data l'omogeneità del sistema in questione) seguente:

$$A^{(s)}=0 \quad (\text{per } s=1,2,\ldots\infty).$$

come volevasi dimostrare (1).

1. — *Generalizzazione — caso in cui* $\Omega\,(x,\lambda)$ *abbia un polo in un punto diverso dall'origine* — (cenno). Anche qui, con considerazioni analoghe a quelle fatte nella generalizzazione del n. 1 del presente cap. III, si può fare vedere come il metodo che ci ha condotto alla costruzione dello sviluppo in serie di Laurent della nostra funzione meromorfa $\Omega(x,\lambda)$, nell'intorno dell'origine (supposta un polo per Ω stessa), può essere senza modificazioni applicato, al caso in cui si voglia lo sviluppo di $\Omega(x,\lambda)$ nell'intorno di un suo polo qualsiasi $\lambda=\varepsilon$.

---

(1) Data l'omogeneità del sistema di infinite equazioni nelle infinite incognite $c_r^{(s)}$, $(r=1,2,\ldots p,\ s=0,1,2,\ldots)$ che si viene a costruire, i vari sistemi di p equazioni

$$A_{j1}^{(i)}=0 \quad (j=1,2,\ldots p\,;\ i=1,2,\ldots)$$

nelle p incognite $c_r^{(0)}$ $(r=1,2,\ldots p)$, che insieme al dato devono ammettere soluzioni formate da valori non tutti nulli per le loro incognite, riescono alla loro volta omogenei, i loro determinanti $A^{(i)}$ devono quindi riuscire nulli.

Possiamo medesimamente stabilire, seguendo le stesse norme del caso trattato, anche le condizioni necessarie e sufficienti perchè, in un punto $\lambda = \varepsilon$, la $\Omega(x, \lambda)$ abbia un polo di ordine ν, anzi, si può dire di più, il teorema relativo all'ordine del polo in ε, avrà un enunciazione identica a quella che si riferisce al caso $\varepsilon = 0$, a parte, naturalmente, il valore effettivo dei simboli $A^{(i)}$ che, nel caso in questione, dovranno pensarsi riferiti al punto $\lambda = \varepsilon$. Anche al teorema che da la condizione necessaria e sufficiente perchè $\Delta(\lambda) \equiv 0$, si può dare una forma più generale.

Di tutto ciò ci si convincerà subito quando si pensi che colla trasformazione, nel sistema differenziale V, e in $\Delta(\lambda)$,

$$\lambda = \lambda' + \varepsilon$$

la trattazione dello sviluppo di $\Omega(x, \lambda)$ etc. nel caso che si abbia un polo per essa nel punto $\lambda = \varepsilon$, viene riportata al caso in cui il polo è nell'origine (1).

(1) Confronta n. 1 del cap. III « generalizzazione etc... ».

PARTE SECONDA

EQUAZIONI INTEGRALI LINEARI TIPO FREDHOLM

CUI SODDISFA LA FUNZIONE MEROMORFA $\Omega(x, \lambda)$

I.

Costruzione di una equazione tipo Fredholm equivalente al sistema V nell'ipotesi di incompatibilità del sistema VII.

1. — Se il sistema differenziale VII, è incompatibile, esiste la funzione di Green $G(x, \xi)$ ad esso relativa, potremo, allora, costruire una equazione integrale del tipo cosidetto di Fredholm, equivalente al sistema V, nel senso che ogni soluzione dell'uno è anche dell'altra e viceversa.

A questo scopo scriviamo il sistema V come segue:

$$(34) \qquad \begin{aligned} &D[\omega] = -\lambda A(x, \lambda)\,\omega + r(x, \lambda) \\ &L_i[\omega] = a_i \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots 2m) \end{aligned}$$

e supponiamo che la funzione $G(x, \xi)$ sia la funzione di Green relativa al sistema

$$(34)' \qquad D[\omega] = 0; \quad L_i[\omega] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots 2m)$$

e le funzioni $G_j(x)$, (per $j = 1, 2, \dots 2m$) rappresentino le soluzioni dei $2m$ sistemi seguenti:

$$(34)' \qquad \begin{aligned} &D[\omega] = 0 \\ &L_i[\omega] = \varepsilon_{ij} \qquad (\text{per } i = 1, 2, \dots 2m) \end{aligned}$$

e dove

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j \\ 1 & \text{» } i = j \end{cases}$$

Posto che $\bar{\omega}$ sia soluzione di (34), si prenda a considerare il nuovo seguente sistema:

$$(34)'' \qquad \begin{aligned} &D[\omega] = -\lambda A(x, \lambda)\,\bar{\omega} + r(x, \lambda) \\ &L_i[\omega] = a_i. \end{aligned}$$

La soluzione (unica) di quest'ultimo sistema, che evidentemente è $\bar{\omega}$, è anche espressa — come vuole la (5), (cap. I, parte prima) — dalla seguente formola:

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^{2m} a_i\, G_i(x) - \int_a^b G(x, \xi)\, A(x, \lambda)\, \bar{\omega}(\xi)\, d\xi + \\ + \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi, \lambda)\, d\xi.$$

e ove si ponga:

$$G(x, \xi)\, A(\xi, \lambda) = H(x, \xi, \lambda); \quad \sum a_i\, G_i(x) + \\ + \int_a^b G(x\xi)\, r(\xi, \lambda)\, d\xi = f(\xi, \lambda)$$

anche:

$$(35) \qquad \bar{\omega} = f(x, \lambda) - \lambda \int_a^b H(x, \xi, \lambda)\, \bar{\omega}(\xi)\, d\xi$$

che è l'equazione cui si voleva arrivare, la quale intanto è soddisfatta dalla soluzione $\bar{\omega}$ del sistema (34).

Inversamente, se $\bar{\omega}$ è soluzione della equazione integrale (35), e nel secondo membro di (34) si sostituisce $\bar{\omega}$ ad ω, il sistema che ne risulta, nelle nostre ipotesi, ha una sola soluzione espressa dalla formola.

$$\omega = f(x, \lambda) - \lambda \int_a^b G(x, \xi) A(\xi, \lambda) \bar{\omega}(\xi) d\xi.$$

Ora il secondo membro di quest'ultima è uguale a $\bar{\omega}$, segue, dunque, che la (35) è equivalente, come si era asserito, al sistema differenziale (34).

2. — *Caso in cui l'equazione di Fredholm si riduce omogenea.* In particolare se $r(x, \lambda) \equiv 0$ ed $a_i = 0$ $(j = 1, 2, \dots 2m)$ il sistema (34) *è omogeneo e tale riesce la corrispondente equazione di Fredholm.*

Quest'ultima, come è noto, per valori generici di λ non ammette soluzioni all'infuori di quella identicamente nulla, ciò che è in accordo con quanto avviene pel corrispondente sistema omogeneo.

Per una autosoluzione u_n, del sistema omogeneo VI, corrispondente all'autovalore λ_n, si avrà:

$$u_n(x) = -\lambda_n \int_a^b G(x, \xi) A(\xi, \lambda_n) u_n(\xi) d\xi \tag{36}$$

e viceversa una funzione $u_n(x)$ non nulla identicamente che soddisfi alla (36), e relativa a un certo valore λ_n di λ, è un'autosoluzione di VI, e λ_n ne è l'autovalore corrispondente.

Il problema, quindi, della ricerca degli autovalori del sistema differenziale VI *e delle relative autosoluzioni, è ricondotto alla ricerca dei valori* λ_n *di* λ, *pei quali la* (36) *ammette soluzioni diverse da quella nulla identicamente.*

II.

Equazione di Fredholm cui soddisfa la funzione $\Omega(x, \lambda)$ e nella quale è messo in evidenza l'ordine ν del polo di $\Omega(x, \lambda)$ stessa nell'origine.

1. — Supponiamo ora verificate le (32) o, ciò che fa lo stesso, supponiamo che la funzione meromorfa $\Omega(x, \lambda)$ integrale di V nell'origine $\lambda = 0$, abbia un polo di ordine ν; e proponiamoci la costruzione di una equazione integrale del tipo di Fredholm, cui soddisfa $\Omega(x, \lambda)$ stessa, nella quale venga posto in evidenza l'ordine ν del menzionato polo.

Per questo si prenda in considerazione il sistema seguente ottenuto da V sostituendovi, nel termine $\lambda A \omega$, $\Omega(x, \lambda)$ al posto di ω:

$$(37) \qquad \begin{aligned} D[\omega] &= -\lambda A(x)\, \Omega(x, \lambda) + r(x, \lambda)^{(1)} \\ L_i[\omega] &= a_i \qquad\qquad (\text{per } i = 1, 2, \ldots 2m) \end{aligned}$$

nell'ipotesi che il determinante $\Delta(o)$ sia zero, e di caratteristica $2m - p$ —

Il sistema (37), nella funzione incognita ω, è di certo compatibile (dotato cioè di soluzioni) per ogni valore di λ che non sia radice della equazione $\Delta(\lambda) = 0$, poichè, esso sistema ammette la soluzione $\omega = \Omega(x, \lambda)$; ne segue, che pel

---

(1) Qui per semplicità supporremo $A(x, \lambda)$ indipendente da λ.

medesimo sistema, saranno soddisfatte le relative condizioni di compatibilità, secondo quanto fu stabilito al cap. I della parte prima n. 4.

Avremo, cioè, le identità seguenti, valide per valori generici di λ, (che non annullano $\Delta(\lambda)$).

$$(38) \qquad \lambda \int_a^b H_j(\xi)\, A(\xi)\, \Omega(\xi,\lambda)\, d\xi = H_j + \int_a^b H_j(\xi)\, r(\xi,\lambda)\, d\xi$$

$$(\text{per } j = 1, 2, \ldots p)$$

(dove pel significato di questi simboli e di quelli che useremo nel seguito, ci riferiamo al n. 2 del cap. III parte prima).

Per la soluzioue generale del sistema (37) si ha poi, come è fissato dalla (13):

$$(39)' \qquad \omega(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j(x)\, c_{p+1-j} + \sum_{j=p+1}^{2m} u_j(x) \left(\sum_{i=1}^{2m} \alpha_{ji}\, a_i\right) +$$

$$+ \lambda \int_a^b \Gamma_p(x,\xi)\, A(\xi)\, \Omega(\xi,\lambda)\, d\xi - \int_a^b \Gamma_p(x,\xi)\, r(\xi,\lambda)\, d\xi \text{ (1)}$$

o anche

$$(39) \quad \omega(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j\, C_{p+1-j} + \psi + \lambda \int_a^b \Gamma_p(x,\xi)\, A(\xi)\, \Omega(\xi,\lambda)\, d\xi -$$

$$- \int_a^b \Gamma_p(x,\xi)\, r(\xi,\lambda)\, d\xi$$

le c_{p+1-j} essendo costanti — rispetto ad x — da determinare.

(1) I simboli qui adoperati hanno il significato loro attribuito nel n. 4 del cap. I, parte prima, ma si riferiscono al sistema differenziale VII che non è altro che il sistema omogeneo associato di (37). Per comodità, abbiamo mutato il segno di $\Gamma_p(x, \xi)$.

Ora, osserviamo, che, fra le soluzioni del sistema (37), si trova $\Omega(x,\lambda)$; e d'altra parte ogni soluzione di (37) stesso è contenuta nella (39), esisterà, quindi, certamente un sistema di valori per le costanti c_{p-1-j}, che sostituito nel secondo membro di (39), al posto del sistema delle c_{p+1-j} stesse, renda, tale secondo membro, identico ad $\Omega(x,\lambda)$.

Per un tale sistema di valori, che chiameremo $\bar{c}_{p+1-j}$ $(j=1,2,\dots p)$, si dovrà avere identicamente:

$$(40)\quad \Omega(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{p}\gamma_j\,\bar{c}_{p+1-j}+\psi+\lambda\int_a^b\Gamma_p(x,\xi)A(\xi)\Omega(\xi,\lambda)\,d\xi-$$
$$-\int_a^b\Gamma_p(x,\xi)\,r(\xi,\lambda)\,d\xi.$$

Dalle (38), e (40) ricaveremo (nell'ipotesi, si intende, che siano soddisfatte le condizioni (32)), i valori $\bar{c}_{p+1-j}$ $(j=1,2,\dots p)$.

Pertanto sostituiamo nelle (38) ad $\Omega(x,\lambda)$ il secondo membro di (40), segue:

$$\lambda\sum_{j=1}^{p}\bar{c}_{p+1-i}\int_a^b H_i(\xi)A(\xi)\gamma_j\,d\xi+\lambda\int_a^b H_i(\xi)A(\xi)\psi(\xi)\,d\xi+$$
$$+\lambda^2\int_b^a H_i(\xi)A(\xi)\int_a^b(\Gamma_p\xi,\xi_1)A(\xi_1)\Omega(\xi_1,\lambda)\,d\xi_1=H_i+$$
$$+\int_a^b H_i(\xi)\,r(\xi,\lambda)\,d\xi+\lambda\int_a^b H_i(\xi)A(\xi)\,d\xi\int_a^b\Gamma_p(\xi,\xi_1)\,r(\xi_1,\lambda)\,d\xi_1$$
$$(\text{per}\quad i=1,2,\dots p)$$

da cui, ove si tenga conto di posizioni fatte, (al n. 2 del cap. III parte prima) e si pone ancora:

$$Y_i^{(n)} = \int_a^b H_i(\xi) A(\xi) d\xi \int_a^b \Gamma_p(\xi, \xi_1) A(\xi_1) d\xi_1 \ldots$$

$$\ldots \int_a^b \Gamma_p(\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) A(\xi_{n-1}) \Omega(\xi_{n-1}, \lambda) d\xi_{n-1}$$

$$F_i^{(1)} = \int_a^b H_i(\xi) r(\xi, \lambda) d\xi;$$

$$F_i^{(n)} = \int_a^b H_i(\xi) A(\xi) d\xi \int_a^b \Gamma_p(\xi, \xi_1) A(\xi_1) d\xi_1, \ldots$$

$$\ldots \int_a^b \Gamma_p(\xi_{n-2}, \xi_{n-1}) r(\xi_{n-1}) d\xi_{n-1}$$

si ricava:

$$(41) \qquad \lambda \sum \overline{c}_{p+1-j} H_{ji1} + \lambda H_j^{(1)} + \lambda^2 Y^{(2)} = H_j + F_j^{(1)} + \lambda F_j^{(2)}$$

$$(\text{per } j = 1, 2, \ldots p).$$

Operiamo con le (41) e (40) come si è operato con le (38) e (40), cioè, alla $\Omega(x, \lambda)$ che figura in $Y_j^{(2)}$, sostituiamo il secondo membro di (40); si ottiene:

$$(41)' \qquad \lambda \sum_{j=1}^{p} H_{ji1} \overline{c}_{p+1-i} + \lambda^2 \sum_{i=1}^{p} H_{ji2} \overline{c}_{p+1-i} + \lambda H_j^{(1)} + \lambda^2 H_j^{(2)} +$$

$$+ \lambda^3 Y_j^{(3)} = H_j + F_j^{(1)} + \lambda F_j^{(2)} + \lambda^2 F_j^{(3)}$$

$$(\text{per } j = 1, 2, \ldots p),$$

ripetendo con le (41)′ e (40) il procedimento medesimo, e così seguitando per ν volte in tutto, si vengono a ottenere le ν relazioni seguenti fra le $\overline{c}_{p+1-i}$

$$\sum_{r=1}^{m} \lambda^r \sum_{i=1}^{p} H_{jir} \overline{c}_{p+1-i} = - \sum_{r=1}^{m} \lambda^r H_j^{(r)} - \lambda^{m+1} Y^{(m+1)} + H_j + \sum_{r=1}^{m} \lambda^{r-1} F_j^{(r)}$$

$$(\text{per } j = 1, 2, \ldots p) \text{ e } (m = 1, 2, \ldots \nu)$$

che con evidenti posizioni scriveremo:

$$(42)\qquad A_{jm} \equiv \sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{p} H_{jir}\, c_{p+1-i}^{(r)} - (R_j^{(m)} - \lambda^{m+1}\, Y_j^{(m+1)}) = 0 \text{ (1)}$$

(dove si è pure posto $\lambda^r\, c_{p+1-i} = c_{p+1-i}^{(r)}$).

Il sistema (42) nelle incognite $c_{p+1-i}^{(r)}$ è conseguenza delle (38) e (40), esso, perciò, sarà di certo possibile, ne ricaveremo la soluzione (unica come vedremo) operando come segue:

Cominciamo col notare, che i primi membri delle equazioni di (42), sono, salvo il nome delle incognite, uguali e ugualmente disposti ai primi membri delle prime $p\nu$ equazioni del sistema di infinite equazioni ed incognite (22). Nel trattare dunque, di (42) ci varremo, tutte le volte che occorra, di posizioni fatte a proposito del sistema (22), e dei risultati raggiunti ivi.

La possibilità del sistema (42), ha, intanto, come conseguenza necessaria, quella del sistema formato colle sue prime p equazioni, cioè del sistema:

$$(42)'\qquad A_{j1} \equiv \sum_{i=1}^{p} H_{ji1}\, c_{p+1-i}^{(1)} - (R_j^{(1)} - \lambda^2\, Y_j^2) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots p)$$

Il determinante $\bar{A}^{(1)}$, di questo sistema, abbia la caratteristica $p - h$; i suoi primi membri saranno legati, allora, da h relazioni lineari omogenee indipendenti; siano queste ad esempio, le (23)′ cioè:

$$\sum_{j=1}^{p} M_{jl}\, A_{j1} = 0 \qquad (\text{per } l = 1, 2, \ldots h)$$

(1) Si noti la forma del sistema (42), essa è quella medesima del sistema (22) ma qui si tratta di un sistema di $p\nu$ equazioni soltanto, i primi membri delle quali, salvo il nome delle incognite, sono uguali e ugualmente disposti ai primi membri delle prime $p\nu$ equazioni di (22).

e si consideri il sistema di p equazioni,

$$A_{jm} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots p) \tag{43}$$

dove m, sia un fissato, ma qualsiasi, valore della successione $1, 2, \dots \nu$.

Applichiamo al sistema (43), i procedimenti applicati pel sistema omonimo relativo a (22)(1), segue:

$$\sum_{j=1}^{p} M_{jl} A_{jm} = \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{p} \overline{H}_{lir}\, c_{p+1-i}^{(r+1)} - \sum_{j=1}^{p} M_{jl} R_j^{(m)} + \lambda^{m+1} \sum_{j=1}^{p} M_{jl} \mathrm{Y}_j^{(m+1)} = 0$$

$$(\text{per } l = 1, 2, \dots h)$$

e ove poniamo:

$$\sum_{j=1}^{p} M_{jl} R_j^{(m)} = \overline{R}_l^{(m)}; \qquad \sum_{j=1}^{p} M_{jl} \mathrm{Y}_j^{(m+1)} = \overline{\mathrm{Y}}_l^{(m+1)}$$

si ha anche:

$$\sum_{j=1}^{p} M_{jl} A_{jm} \equiv \overline{A}_{l,m-1} = \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{p} \overline{H}_{lir}\, c_{p+1-i}^{(r+1)} - (\overline{R}_l^{(m)} - \lambda^{m+1} \overline{\mathrm{Y}}_l^{(m+1)}) = 0$$

Il sistema (43) riescirà, come si ebbe occasione di far vedere trattando del sistema di infinite equazioni (22), equivalente all'altro, pure di p equazioni, seguente:

$$\begin{array}{ll} A_{jm} = 0 & (j = 1, 2, \dots p - h) \\ \overline{A}_{l,m-1} = 0 & (l = 1, 2, \dots h) \end{array}$$

e tutto il sistema (42) avrà come conseguenza quest'altro:

$$\begin{array}{ll} A_{j1} = 0 & (j = 1, 2, \dots p - h) \\ \left.\begin{array}{ll} A_{jm} = 0 & (j = 1, 2, \dots p - h) \\ \overline{A}_{l,m-1} = 0 & (l = 1, 2, \dots h) \end{array}\right\} & (\text{per } m = 2, 3, \dots \nu) \end{array}$$

(1) Confronta n. 2, cap. III della parte prima.

Si moltiplichino ambo i membri di $A_{jm-1}=0$ $(j=1,2,\dots p-h)$ per λ, e si associno le $p-h$ equazioni $\lambda A_{jm-1}=0$ (per $j=1, 2,\dots p-h$) con le h equazioni $\overline{A}_{l,m-1}=0$ (per $l=1,2,\dots h$).

Posto allora:

$$\lambda A_{j,m-1}=A^{(2)}_{j,m-1};\quad H_{jir}=H^{(2)}_{jir};\quad \lambda R_j^{\prime m-1}=R^{(m-1)}_{j2};\quad \mathrm{Y}_j^{(m-1)}=\mathrm{Y}^{(m-1)}_{j2}$$
$$(\text{per } j=1,2,\dots p-h)$$

$$\overline{A}_{l,m-1}=A^{(2)}_{p-h+l,m-1};\quad \overline{H}_{lir}=H^{(2)}_{p-h+l,i,r};\quad \overline{R}_l^{(m)}=R^{(m-1)}_{p-h+l,2};$$
$$\overline{\mathrm{Y}}_l^{(m+1)}=\mathrm{Y}^{(m)}_{p-h+l,2}$$
$$(\text{per } l=1,2,\dots h)$$

consegue che il nostro sistema (42), avrà come conseguenza l'altro della medesima forma; e con $(\nu-1)p$ equazioni:

$$A^{(2)}_{jm}\equiv\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{p}H^{(2)}_{jir}\,c^{(r+1)}_{p+1-i}-(R_{jr}^{\prime(m)}-\lambda^{m+2}\,Y_{jr}^{(m+1)})=0 \tag{44}$$
$$(\text{per } j=1,2,\dots p;\ \text{ed } m=1,2,\dots\nu-1)$$

nel senso che ogni soluzione di (42) è anche soluzione di (44). È bene notare (ci sarà utile) *che le quantità* $R^{(m)}_{j s}$ *si annullano con le* $R_l^{(m)}$ *e le* $R_j^{(m)}$, *coll'annullarsi identicamente delle* a_i $(i=1,2,\dots 2m)$ *e della* $r(x,\lambda)$ (1).

Il sistema (44), avrà, a sua volta, come conseguenza un sistema che con evidente notazione si indicherà:

$$A^{(3)}_{jm}=\sum_{r=1}^{m}\sum_{i=1}^{p}H^{(3)}_{jir}\,c^{(r+2)}_{p+1-i}-(R^{(m)}_{j3}-\lambda^{m+3}\,\mathrm{Y}^{(m+1)}_{j3})=0$$
$$(j=1,2,\dots p);\quad (m=1,2,\dots\nu-2)$$

e che si compone di $(\nu-2)p$ equazioni soltanto, e si deduce da (44) come (44) stesso è stato dedotto da (42).

Procedendo in ugual modo su $A^{(3)}_{jm}=0$, si perverrà a un quarto sistema di $(\nu-3)p$ equazioni:

$$A^{(4)}_{jm}=0\qquad (j=1,2\dots p;\ m=1,2,\dots\nu-3)$$

(1) Si confronti il ricordato n. 2 del Cap. III.

che è soddisfatto da ogni soluzione del sistema (42), così seguitando per $(\nu - 1)$ volte in tutto si perverrà ad un sistema di p equazioni soltanto

$$A_{j1}^{(\nu)} = \sum_{i=1}^{p} H_{ji1}^{(\nu)} c_{p+1-i}^{(\nu)} - (R_{j\nu}^{(1)} - \lambda^{\nu+1} Y_{j\nu}^{(2)}) = 0$$
$$(j = 1, 2, \dots p)$$

che è soddisfatto da ogni soluzione di (42).

Ora quest' ultimo sistema è determinato, chè, per ipotesi, il suo determinante

$$A^{(\nu)} \equiv \text{determinante } |H_{ji1}| \neq 0,$$

di conseguenza, il sistema (42), sicuramente possibile, avrà una unica soluzione.

Questa soluzione è espressa da formole del tipo seguente:

$$c_{p+1-i}^{(\nu)} = \lambda^{\nu} \overline{c}_{p+1-i} = \beta_i(\lambda) - \lambda^{\nu+1} \int_a^b \varrho_i(\xi) A(\xi) \Omega(\xi, \lambda) \, d\xi$$
$$(i = 1, 2, \dots p)$$

dove le $\beta_i(\lambda)$ *sono lineari ed omogenee nelle* $R_{j\nu}^{(1)}$*, esse, quindi, si annullano con l'annullarsi identico di* $r(x, \lambda)$ *e delle* a_i $(i = 1, 2, \dots$ $\dots 2m)$. La $\varrho_i(\xi)$ è una opportuna funzione nota di cui non interessa qui avere la espressione precisa.

Sostituendo, nella (40), alle $\overline{c}_{p+1-i}$ le espressioni trovate si otterrà la eguaglianza:

$$(45) \quad \Omega(x, \lambda) - \lambda \int_a^b \left[\Gamma_p(x, \xi) - \sum_{i=1}^{p} \gamma_i(x) \varrho_i(\xi) \right] A(\xi) \Omega(\xi, \lambda) \, d\xi =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{p} \beta_i(\lambda) \gamma_i(x)}{\lambda^{\nu}} + \psi - \int_a^b \Gamma_p(x, \xi) r(\xi, \lambda) \, d\xi$$

la quale, ove si consideri Ω come incognita rappresenta un'equazione integrale lineare del tipo di Fredholm, che è quella da noi cercata, e in cui il termine noto è una funzione di λ avente nell'origine un polo di ordine ν (1).

Ogni soluzione del sistema differenziale

$$D[\omega]+\lambda A\omega=r; \quad L_i[\omega]=a_i \quad (\text{per } i=1,2,\dots 2m)$$

è una soluzione della equazione integrale (45), inversamente da quest'ultima si può risalire al primo.

Per ogni autosoluzione corrispondente ad un dato autovalore λ_n, per ogni soluzione ω_n, cioè, del sistema omogeneo seguente

$$D[\omega]+\lambda_n A\omega=0; \quad L_i[\omega]=0 \quad (i=1,2,\dots 2m),$$

si ha identicamente:

$$\omega_n(x)=\lambda_n\int_a^b\left[\Gamma_p(x,\xi)-\sum_{i=1}^{p}\gamma_i(x)\,\varrho_i(\xi)\right]A(\xi)\,\omega_n(\xi)\,d\xi \tag{46}$$

Viceversa si potrebbe verificare che ogni soluzione di (46) è una autosoluzione corrispondente all'autovalore λ_n, relativa al sistema omogeneo sopra scritto.

La equazione integrale (45) traduce il problema della determinazione di un integrale del sistema differenziale V, tale equazione, essendo del tipo di Fredholm, permette (nel supposto che $\sum_{n=-\nu}^{\infty} u_n\lambda^n$ rappresenti lo sviluppo di $\Omega(x,\lambda)$ nell'intorno dell'origine), un calcolo ricorrente delle u_n.

---

(1) Le $\beta_i(\lambda)$ contengono anche termini indipendenti da λ.

III.

Cenno sopra un procedimento atto a provare l'esistenza o meno di autovalori e a determinarne i moduli. Costruzione delle autosoluzioni corrispondenti ad assegnati autovalori.

1. — La nostra trattazione ci permette, come si è visto, di stabilire in ogni caso se la funzione meromorfa $\Omega(x, \lambda)$ — integrale del sistema differenziale V — esiste, e, nel caso affermativo, di calcolarne lo sviluppo in serie di potenze del parametro λ, nell'intorno di un suo punto regolare o di un polo.

Una volta fissato lo sviluppo della $\Omega(x, \lambda)$ in serie di potenze, è possibile dare un criterio che permetta la effettiva costruzione degli autovalori relativi al sistema differenziale VI, e delle corrispondenti autosoluzioni, costruzione che eseguiremo più avanti in un notevole caso particolare.

Qui ci limiteremo soltanto a fare alcune osservazioni di carattere generale inerenti alla questione.

Supponiamo che la $\Omega(x, \lambda)$ nell'origine ($\lambda = 0$) abbia un polo di ordine ν, (ordine che possiamo precisare perfettamente) e si consideri la funzione,

$$\lambda^{\nu}\,\Omega(x, \lambda)$$

regolare nel punto $\lambda = 0$.

Possiamo porre allora:

$$\lambda^{\nu}\,\Omega(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i\,\lambda^i; \tag{47}$$

lo sviluppo rappresentato dal secondo membro della (47) sarà valido in un intorno dell'origine.

La funzione intera $\lambda^\nu \, \Omega(x, \lambda)$ al finito potrà presentare al più singolarità di tipo polare, e i poli eventuali di essa sono precisamente gli autovalori λ_n, non nulli, di λ.

Segue: affinchè esista un autovalore λ_n non nullo è necessario e basta che il raggio di convergenza della serie (47) sia finito. Ove ciò accada e si chiami r_1 il raggio di convergenza della suddetta serie, si potrà affermare che esisterà *almeno un autovalore* λ_1 *di* λ, *di modulo uguale* a r_1. Potranno esistere solo un numero finito di autovalori di modulo r_1, chè la $\Omega(x, \lambda)$ non ha singolarità essenziali al finito. Supponiamo che il numero degli autovalori di λ di modulo r_1 sia n_1, che si abbiano cioè n_1 poli per la funzione meromorfa $\Omega(x, \lambda)$ di modulo r_1, e diciamo questi poli $\lambda_{11}; \lambda_{12}; \ldots \lambda_{1n_1}$ i cui ordini di moltiplicità siano rispettivamente $\nu_{11}; \nu_{12}; \ldots \nu_{1n_1}$.

Le funzioni

$$\lambda^\nu (\lambda - \lambda_{1i})^{\nu_{1i}} \Omega(x, \lambda); \quad \lambda^\nu (\lambda - \lambda_{1i})^{\nu_{1i}} \frac{\partial \Omega(x, \lambda)}{\partial x}; \ldots \lambda^\nu (\lambda - \lambda_{1i})^{\nu_{1i}} \frac{\partial^{2m} \Omega(x, \lambda)}{\partial x}$$

hanno limiti determinati per $\lambda \to \lambda_{1i}$; esse inoltre tendono uniformemente a detti limiti (1); se si pone quindi

$$\lim \lambda^\nu (\lambda - \lambda_{1i})^{\nu_{1i}} \Omega(x, \lambda) = \Omega_{1i}(x)$$

(1) Per vedere ciò basta che si tenga presente la forma di $\Omega(x, \lambda)$ (Parte prima, n. 1, cap. II) e cioè:

$$\Omega(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{2m} c_j(\lambda) \, \eta_j(x, \lambda) + \eta(x, \lambda)$$

e si ricordi inoltre (cf. numero citato) che

$$\lim \lambda^\nu (\lambda - \lambda_{1i}) \, c_j(\lambda) = \text{quantità determinata e finita},$$

e che le funzioni $\eta_j(x, \lambda)$ e $\eta(x, \lambda)$ sono continue, insieme alle loro derivate rapporto ad x fino a quelle di ordine n incluse, in x e λ.

conseguirà necessariamente:

$$\lim \lambda^{\nu} (\lambda - \lambda_{1i})^{\nu_{1i}} \frac{\partial^{j} \Omega(x, \lambda)}{\partial x^{j}} = \frac{\partial^{j} \Omega_{1i}(x)}{\partial x^{j}}$$

$$(\text{per } j = 1, 2, 3, \ldots 2m),$$

se si considerano allora le identità,

$$D[\Omega(x, \lambda)] + \lambda A \, \Omega(x, \lambda) = r(x, \lambda); \quad L_j[\Omega(x, \lambda)] = a_j$$

$$(\text{per } j = 1, 2, \ldots 2m),$$

se ne moltiplicano ambo i membri per $\lambda^{\nu} (\lambda - \lambda_{l\nu})^{\nu_{1i}}$ e si passa quindi al limite per $\lambda \to \lambda_{1i}$ si dedurrà:

$$D[\Omega_{1i}(x)] + \lambda_{1i} A \, \Omega_{1i}(x) = 0; \qquad L_j[\Omega_{1i}(x)] = 0$$

$$(\text{per } j = 1, 2, \ldots 2m)$$

le quali ci mostrano che la funzione $\Omega_{1i}(x)$ è autosoluzione corrispondente all'autovalore λ_{1i}.

Si prenda ora in considerazione la funzione

$$(47)' \qquad \lambda^{\nu} \prod_{i=1}^{n_1} (\lambda - \lambda_{1i})^{\nu_{1i}} \, \Omega(\lambda, x)$$

regolare in tutto un cerchio di centro nell'origine e raggio maggiore di r_1, e diciamo r_2 il raggio di convergenza del relativo sviluppo in serie di potenze di λ nell'intorno del punto $\lambda = 0$. Sarà:

$$r_2 > r_1.$$

Se r_2 risulterà infinito, se cioè la funzione (47)$'$ riescirà intera in λ, non si avranno altri autovalori di λ oltre quelli di modulo zero, o $r^{(1)}$ di cui si è detto dianzi; in caso contrario, ove cioè risulti r_2 finito, esisteranno certamente autovalori (in numero finito) di modulo r_2. In altri termini condizione necessaria e sufficiente affinchè esistano autovalori di modulo maggiore di r_1 si è che la serie

$$\lambda^{\nu} \prod_{i=1}^{n_1} (\lambda - \lambda_{1i})^{\nu_{1i}} \Omega(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{v}_i \lambda^i$$

abbia raggio di convergenza finito. Supposto r_2 finito e supposti inoltre determinati gli autovalori di modulo r_2, si potrà, procedendo come sopra, pervenire alla determinazione delle autosoluzioni relative.

In modo perfettamente analogo si procederà poi per la determinazione degli eventuali autovalori di modulo maggiore di r_2, e così via.

Circa la maniera colla quale si può operare per la determinazione effettiva degli autovalori di λ, diremo in un capitolo della parte seconda del presente lavoro, riferendoci alle equazioni del quarto ordine con particolari condizioni ai limiti.

PARTE TERZA

EQUAZIONI DEL QUARTO ORDINE AUTOAGGIUNTE CON CONDIZIONI LINEARI SIMMETRICHE

I.

Esistenza di infiniti autovalori relativi ad una equazione del 4.° ordine con condizioni lineari simmetriche.

1. — Il sistema che qui prenderemo in esame è della forma:

$$\text{VIII.}\quad \begin{cases} L_\lambda[z] \equiv \dfrac{d^2}{dx^2}\theta_0\dfrac{d^2z}{dx^2} + \dfrac{d}{dx}\theta_1\dfrac{dz}{dx} + (\lambda A + B)z \equiv D[z] + \lambda A z = r \\ L_i[z] = a_i \qquad (\text{per } i = 1,2,3,4) \end{cases}$$

dove $\theta_0, \theta_1, A_0, B, r$ rappresentano funzioni continue della x definite simultaneamente nell'intervallo (a, b) nel quale si ha pure sempre $\theta_0 > 0$, e le a_i costanti qualsiansi.

Quanto alle operazioni $L_i[z]$ supporremo che siano del tipo considerato dianzi (1).

Insieme al sistema VIII consideriamo l'associato

$$\text{IX.}\quad \begin{cases} L_\lambda[z] \equiv D[z] + \lambda A z = 0 \\ L_i[z] = 0 \quad (\text{per } i = 1,2,3,4). \end{cases}$$

(1) Cfr. Capo I, parte prima.

Ammetteremo poi, qui e in seguito, che l'equazione $L_\lambda[z]=0$ sia *autoaggiunta, e le condizioni* $L_i(z)=0$ *simmetriche,* tali, cioè, che se u e v rappresentano due qualsivogliano funzioni che le verifichino, consegua:

$$\int_a^b [v L_\lambda[u] - u L_\lambda[v]]\, dx = [P(u,v)]_a^b = 0$$

avendo posto

$$P(u,v) = \left[v \frac{d}{dx}\theta_0 \frac{d^2 u}{dx^2} - u \frac{d}{dx}\theta_0 \frac{d^2 v}{dx^2}\right] - \\ - \theta_0 \left[\frac{dv}{dx}\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{du}{dx}\frac{dv^2}{dx^2}\right] + \theta_1 \left[v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right]$$

Come sistemi di condizioni simmetriche potremo assumere, ad esempio, i due seguenti:

$$L_1[z] \equiv z(a) = 0 \qquad\qquad L_3[z] \equiv z(b) = 0$$

$$L_2[z] \equiv \left[\frac{dz}{dx}\right]_{x=a} = 0 \qquad\qquad L_4[z] \equiv \left[\frac{dz}{dx}\right]_{x=b} = 0$$

oppure, nelle ipotesi:

$$\theta_0(a) = \theta_0(b); \quad \theta'_0(a) = \theta'_0(b); \quad \theta_1(a) = \theta_1(b)$$

$$L_i[z] \equiv \left[\frac{d^i z}{dx^i}\right]_{x=a} - \left[\frac{d^i z}{dx^i}\right]_{x=b} = 0 \quad (\text{per } i = 0,1,2,3).$$

Se con $\eta_1(x,\lambda)$, $\eta_2(x,\lambda)$, $\eta_3(x,\lambda)$, $\eta_4(x,\lambda)$ indichiamo un sistema fondameutale di integrali per la equazione omogenea $L_\lambda[z]=0$, porremo come nei precedenti capitoli:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1[\eta_1] & L_1[\eta_2] & L_1[\eta_3] & L_1[\eta_4] \\ L_2[\eta_1] & L_2[\eta_2] & L_2[\eta_3] & L_2[\eta_4] \\ L_3[\eta_1] & L_3[\eta_2] & L_3[\eta_3] & L_3[\eta_4] \\ L_4[\eta_1] & L_4[\eta_2] & L_4[\eta_3] & L_4[\eta_4] \end{vmatrix}$$

e la funzione intera (1) $\Delta(\lambda)$ la diremo ***determinante relativo al sistema*** IX *o* VIII. Si continuerà infine ad indicare con $\Omega(x, \lambda)$ la funzione meromorfa di λ, integrale del sistema differenziale VIII.

Ciò posto, cominciamo col supporre che il sistema differenziale omogeneo:

$$\text{X} \qquad \begin{aligned} &D[z] = 0 \\ &L_i[z] = 0 \qquad \text{per } (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

sia incompatibile, ciò che è quanto dire che $\Delta(o) \neq 0$; esisterà, in questa ipotesi, la funzione di Green ad esso relativa.

Tale funzione di Green, che chiameremo $G(x, \xi)$, nelle fatte ipotesi relativamente al sistema IX, è, come si ebbe occasione di provare (2), funzione simmetrica nei suoi argomenti x e ξ; di più essa è funzione chiusa. Difatti, esista, se è possibile, una funzione $\varphi(x) \not\equiv 0$ per cui si abbia identicamente:

$$\int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\,\xi \equiv 0$$

e si consideri l'equazione non omogenea seguente:

$$D[z] = \varphi(x).$$

La funzione:

$$z = \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\,(\xi) \equiv 0 \, (2)$$

è integrale di tale equazione; ma ciò è assurdo, se $\varphi(x) \not\equiv 0$.

Il sistema differenziale VIII, nel supposto $\Delta(o) \neq 0$,

---

(1) Le $\eta\ (x, \lambda)$ sono intere in λ.

(2) Vedi Cap. I parte prima.

riesce equivalente ad una equazione integrale lineare del tipo di Fredholm, precisamente alla equazione:

$$z(x, \lambda) = -\lambda \int_a^b G(x, \xi) A(\xi) z(\xi, \lambda) d\xi + f(x) \quad (48)$$ [1]

dove $f(x)$ ha il significato attribuito a $f(x, \lambda)$ nel Cap. I della parte seconda, ma qui, naturalmente, bisogna pensarla riferita al sistema VIII.

Il nucleo dell'equazione (48), è di quelli cosidetti a tipo polare, ove si supponga quindi la funzione $A(x)$ di segno costante in (a, b), o più in generale, con un numero finito finito di cambiamenti di segno in (a, b), per i risultati di Hilbert [2], sulle equazioni a nucleo polare segue che: *esistono infiniti valori eccezionali di λ per l'equazione* (48), *(valori, cioè, pei quali l'equazione omogenea di Fredholm*

$$z(x) = -\lambda \int_a^b G(x, \xi) A(\xi) z(\xi) d\xi$$

ammette soluzioni non nulle identicamente), conseguentemente esistono un'infinità di autovalori di λ relativi al sistema omogeneo IX *e di corrispondenti autosoluzioni.*

Ma c'è di più, si può in generale stabilire il seguente notevole:

Teorema. — *Se la funzione intera $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$, e la funzione $A(x)$ hà solo un numero finito di cambiamenti di segno in (a, b)* [3]*, esistono una infinità di autovalori di λ relativi alla equa-*

(1) Cfr. Cap. I parte seconda.

(2) Hilbert, *Grundzuge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleicungen*, Göttingen Nachrichten, 1906.

(3) La restrizione relativa al numero finito di cambiamenti di segno in (a, b) della $A(x)$, per quel che riguarda le equazioni *del 2° ordine*, in un mio lavoro in corso di pubblicazione nella « Mathematische Zeitschrift », è stata tolta.

zione $L_\lambda[z] = 0$, *e alle condizioni* $L_i[z] = 0$ (per $i = 1, 2, 3, 4$). *Se poi* $\Delta(\lambda) \equiv 0$ *ogni valore di* λ *è un autovalore.*

Questo risultato, in termini così generali, che io sappia, non è stato fin ora messo in evidenza neanche trattando della ricerca degli autovalori relativi ad un'equazione del secondo ordine del tipo

$$\frac{d}{dx}\,\theta\,\frac{dy}{dx} + (\lambda A + B)\,y = 0 \; (*)$$

con le condizioni ai limiti

$$y(a) = y(b) = 0 \; (**) \; (1)$$

Si noti inoltre che il teorema — come facilmente si intenderà seguendo la dimostrazione che ora faremo — *vale anche pel caso di equazioni di ordine* $2m$ *autoaggiunte, con condizioni simmetriche, e, naturalmente, in eguali ipotesi.*

La dimostrazione dell'enunciato teorema è immediata: Invero, se $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$ esisterà certamente un valore reale ε di λ per cui sia:

$$\Delta(\varepsilon) \neq 0.$$

Si consideri allora il sistema:

XI
$$\begin{aligned} &D_\varepsilon[z] \equiv D[z] + \varepsilon A z = 0 \\ &L_i[z] = 0 \qquad\qquad (\text{per } i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

---

(1) I casi pei quali viene provata la esistenza di infiniti autovalori relativi ad equazioni del tipo (*) e alle condizioni lineari (**) si riducono in complesso ai due seguenti: 1° la funzione A è di segno costante in tutto l'intervallo di sua definizione. 2° Il sistema omogeneo formato dalle (*) e (**) nell'ipotesi $\lambda = 0$, è incompatibile — in altre parole, il determinante $\Delta(\lambda)$ relativo al sistema delle (*) e (**), è diverso da zero nell'origine. Casi, questi, che rientrano nel teorema da noi enunciato.

Questo sistema è di certo incompatibile, chè pel relativo determinante $\overline{\Delta}$ si ha:

$$\overline{\Delta} = \Delta(\varepsilon) \neq 0$$

esisterà quindi la funzione di Green ad esso relativa: sia $G_\varepsilon(x, \xi)$ tale funzione di Green.

Il sistema IX, d'altra parte, ove si scambi λ in $\lambda_\varepsilon + \varepsilon$, assume la forma seguente:

$$\text{IX}' \qquad \begin{aligned} &D_\varepsilon[z] + \lambda_\varepsilon A z = 0 \\ &L_i[z] = 0 \qquad\qquad (\text{per } i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

Il determinante $\overline{\Delta}(\lambda_\varepsilon)$ relativo a quest'ultimo sistema è funzione intera di λ_ε diversa da zero nel punto $\lambda_\varepsilon = 0$, poichè dall'essere: $\overline{\Delta}(\lambda_\varepsilon) = \Delta(\lambda_\varepsilon + \varepsilon)$ segue:

$$\overline{\Delta}(o) = \Delta(\varepsilon) \neq 0$$

Ora, il sistema IX′ (che poi non è altro che il IX) rispetto al sistema differenziale XI, viene a trovarsi nelle identiche condizioni del sistema IX per rispetto a X quando per quest'ultimo se ne supponeva la incompatibilità; esso sistema IX′ ammetterà, quindi, come il IX, un'infinità di autovalori di λ_ε e di corrispondenti autosoluzioni.

Tali autovalori di λ_ε sono dati dai valori eccezionali della equazione omogenea di Fredholm seguente:

$$(48)' \qquad z(x) = -\lambda \int_a^b G_\varepsilon(x, \xi)\, A(\xi)\, z(\xi)\, d\xi$$

la quale come la 48 è a nucleo polare ecc.

Se λ'_ε è un valore eccezionale relativo a (48)', e u_ε la corrispondente funzione eccezionale, $\lambda_\varepsilon + \varepsilon$, e u_ε sono rispettivamente autovalore e corrispondente autosoluzione relativi a IX (1).

(1) Il PICONE, nella memoria citata nell'introduzione a questo lavoro, dimostra il teorema stesso nel caso di equazioni del 4° ordine, — più particolari però di quelle qui considerate —, ma nella sola ipotesi che il determinante $\Delta(\lambda)$, nel punto $\lambda = 0$, sia diverso da zero.

II.

Gli autovalori relativi al sistema IX nell'ipotesi che $A(x)$ sia di segno costante in (a, b).

1. — *Non esistono autovalori complessi.* Ci proponiamo in questo 1° numero di dimostrare che l'equazione

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

nella nostra ipotesi, non ammette radici complesse, con ciò, resta pure dimostrata, poichè $\Delta(\lambda)$ non sarà allora identicamente zero, la esistenza di infiniti autovalori relativi al sistema IX. A tale uopo stabiliremo alcune importanti relazioni delle quali in seguito faremo largo uso.

Rappresentino λ_i e λ_j due autovalori relativi a IX e u_i e u_j le rispettive autosoluzioni corrispondenti.

Dalla identità:

$$u_j D[u_i] + \lambda A u_i u_j = 0,$$

integrando si ricava:

$$\int_a^b D[u_i] u_j dx = -\lambda \int_a^b A u_i u_j dx;$$

e ove al primo membro di questa ultima applichiamo due successive integrazioni per parti, anche:

$$(49) \qquad \Big[u_j(\theta_0 u''_i)'\Big]_a^b - \Big[\theta_0 u'_j u''_i\Big]_a^b + \int_a^b \theta_0 u''_i u''_j dx + \\ + \Big[\theta_1 u_j u'_i\Big]_a^b - \int_a^b \theta_1 u'_i u'_j dx + \int_a^b B u_i u_j dx = -\lambda_i \int_a^b A u_i u_j dx.$$

Scambiando in questa identità i con j si ottiene l'analoga:

$$(49)' \quad \Big[u_i(\theta_0 u''_j)'\Big]_a^b - \Big[\theta_0 u'_i u''_j\Big]_a^b + \int_a^b \theta_0 u''_i u''_j dx +$$

$$+ \Big[\theta_1 u_i u'_j\Big]_a^b - \int_a^b \theta_1 u'_i u'_j dx + \int_a^b B u_i u_j dx = -\lambda_j \int_a^b A u_i u_j dx.$$

Sottraendo membro a membro (49) e (49)' e tenendo conto della circostanza che u_i e u_j soddisfano alle condizioni (*simmetriche*) $L_i[z]=0$, e però verificano la relazione

$$\Big[P(u_i u_j)\Big]_a^b = 0$$

segue, nel supposto che $\lambda_i \neq \lambda_j$,

$$(50) \qquad \int_a^b A u_i u_j dx = 0.$$

La (50) ci permette di dimostrare il nostro asserto.

Sia, ad esempio, possibile l'esistenza di un autovalore complesso $\lambda' + i\lambda''$, $(\lambda'' \neq 0)$; cioè, $\lambda' + i\lambda''$ sia uno zero della funzione intera $\Delta(\lambda)$. Il valore coniugato $\lambda' - i\lambda''$ sarà pure esso uno zero per la funzione $\Delta(\lambda)$, e quindi un autovalore di IX, e ove $u_i + iu_2$ sia autosoluzione corrispondente a $\lambda' + i\lambda''$, la funzione ad essa coniugata $u_1 - iu_2$ riuscirà autosoluzione corrispondente a $\lambda' - i\lambda''$: per la (50), allora, si avrà, poichè $(\lambda' + i\lambda'' \neq \lambda' - i\lambda'')$:

$$\int_a^b [u_i^2 + u_j^2] A\, dx = 0$$

la quale se A si mantiene in (a, b) di segno costante non potrà essere soddisfatta altro che nel caso:

$$u_i \equiv u_j \equiv 0$$

ciò che contraddice l'ipotesi, e cioè che $u_i \pm i u_j$ siano autosoluzioni del sistema IX.

2. — *Esistenza di infiniti autovalori reali. I poli della funzione meromorfa in λ, $\Omega(x,\lambda)$ sono reali e semplici.* — Poichè non esistono autovalori complessi, la funzione intera $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$, e perciò esisterà, nella nostra ipotesi, la funzione, meromorfa in λ, $\Omega(x,\lambda)$ soddisfacente al sistema differenziale VIII.

Ora, se non è già $\Delta(o) \neq 0$ certamente dovrà esistere un valore reale $\varepsilon \neq 0$ per cui riesca:

$$\Delta(\varepsilon) \neq 0.$$

Nel sistema differenziale VIII, si cambi λ in $\lambda_\varepsilon + \varepsilon$, esso sistema assumerà allora la forma:

$$\text{VIII}' \qquad D[z] + \varepsilon A z + \lambda_\varepsilon A z \equiv D_\varepsilon[z] + \lambda_\varepsilon A z = r$$
$$L_i[z] = a_i \quad (\text{per } i = 1,2,3,4)$$

e ove si chiami $G_\varepsilon(x,\xi)$ la funzione di Green relativa al sistema omogeneo incompatibile

$$D_\varepsilon[z] = 0; \quad L_i[z] = 0 \qquad (i = 1,2,3,4),$$

per la funzione meromorfa in λ_ε

$$\Omega_1(x,\lambda_\varepsilon) \equiv \Omega(x, \lambda_\varepsilon + \varepsilon),$$

soddisfacente al sistema differenziale VIII, si avrà — per ogni valore di λ_ε che non sia polo per Ω — la seguente equazione integrale lineare di Fredholm:

$$(51) \qquad \Omega_1(x, \lambda_\varepsilon) = f_\varepsilon(x) - \lambda_\varepsilon \int_a^b G_\varepsilon(x, \xi) A(\xi) \Omega_1(\xi, \lambda_\varepsilon) \, d\xi \text{ (1)}$$

dove $f_\varepsilon(x)$ ha il significato seguente:

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{4} a_j \, G_j(x) + \int_a^b G_\varepsilon(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi$$

le $G_j(x)$ rappresentando gli integrali — ben determinati — dei sistemi:

$$D_\varepsilon[z] = 0; \quad L_i[z] = \varepsilon_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{per } j = i \\ 0 & \text{» } j \neq i \end{cases}$$

La (51) è un'equazione di Fredholm a nucleo di quelli cosiddetti di Schmidt, il prodotto cioè di una funzione simmetrica e chiusa $G_\varepsilon(x, \xi)$ per una funzione $A(\xi)$ della sola variabile d'integrazione, di *segno costante;* per note proprietà delle equazioni a nuclei cosiddetti avremo dunque (2):

1.° I valori eccezionali di λ_ε, relativi a (51), e *però gli autovalori di* λ *relativi ad* VIII (nell'ipotesi che $A(x)$ conservi segno costante in (a, b)) *sono reali ed in numero finito.*

2.° *I poli del nucleo risolvente della* (51), *e quindi della funzione meromorfa* $\Omega(x, \lambda)$ *integrale di* VIII, *sono reali e semplici.*

---

(1) Cfr. n. 1. Capo I, parte seconda.

(2) Cfr. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique,* t. III, 3ª edizione, pagg. 457 e segg., Paris, 1923.

Tutto ciò potrebbe dedursi anche per via diretta, senza, cioè, ricorrere allo strumento delle equazioni integrali, anzi per tale via si avrebbe il vantaggio di istituire, contemporaneamente, un metodo di calcolo ricorrente degli autovalori di λ. Noi, qui, però tralasceremo di fare ciò perchè, nel caso che adesso prenderemo in esame, seguiremo precisamente detta via per la ricerca degli autovalori di λ, relativi al sistema IX.

III.

Autovalori relativi al sistema IX nelle ipotesi: $A(x)$ sia funzione qualsiasi continua, $B(x) \geq 0$, $\theta_1(x) \leq 0$ — in tutto (a, b).

1. — In questo capitolo prenderemo in esame il caso particolare che nel sistema VIII o IX le funzioni $B(x)$ e $\theta_1(x)$, in tutto l'intervallo (a, b), soddisfino alle limitazioni:

$$B(x) \geq 0, \quad \theta_1(x) \leq 0 \tag{52}$$

ferma restando sempre l'altra $\theta_0 > 0$

mentre lasciamo completa arbitrarietà di scelta per la funzione $A(x)$. Quanto alle condizioni $L_i[z] = 0$, supporremo che siano simmetriche nel senso da noi altre volte precisato, e inoltre soddisfino alla limitazione seguente:

$$\rho(z) \equiv [z(\theta_0 z'')']_a^b - [\theta_0 z' z'']_a^b + [\theta_1 z z']_a^b \geq 0, \tag{52)'}$$

a questa limitazione soddisfano, ad esempio, i due sistemi di condizioni stabiliti al n. 1 del Cap. I di questa III parte, e cioè:

$$L_1(z) \equiv z(a) = 0; \quad L_2(z) \equiv \left[\frac{dz}{dx}\right]_{x=a} = 0; \tag{53}$$

$$L_3(z) \equiv z(b) = 0; \quad L_4(z) \equiv \left[\frac{dz}{dx}\right]_{x=b} = 0$$

oppure nelle ipotesi:

$$\theta_0(a) = \theta_0(b); \quad \theta'_0(a) = \theta_0'(b); \quad \theta_1(a) = \theta_1(b),$$

$$L_i[z] \equiv \left[\frac{d^i z}{dx^i}\right]_{x=a} - \left[\frac{d^i z}{dx^i}\right]_{x=b} = 0 \quad (\text{per } i = 0, 1, 2, 3). \tag{53'}$$

Dalla relazione (49), intanto, ove si faccia $i = j$, segue l'altra:

$$\Big[u_i(\theta_0 u_i'')'\Big]_a^b - \Big[\theta_0 u'_i u''_i\Big]_a^b + \Big[\theta_1 u_i u'_i\Big]_a^b + \tag{54}$$
$$+ \int_a^b \theta_0 (u''_i)^2 dx - \int_a^b \theta_1 (u'_i)^2 dx + \int_a^b B u_i^2 dx = -\lambda \int_a^b A u_i^2 dx .$$

2. — *Non esistono autovalori complessi.* — Invero, ove ciò accada, detto $\lambda' + i\lambda''$ ($\lambda'' \neq 0$) uno di tali autovalori, segue che sarà pure un autovalore di λ il coniugato di $\lambda' + i\lambda''$, $\lambda' - i\lambda''$, e se $u_1 + i u_2$ è autosoluzione corrispondente a $\lambda' + i\lambda''$, $u_1 - i u_2$ sarà autosoluzione corrispondente a $\lambda' - i\lambda''$.

Dalle identità:

$$L_i[u_1 \pm i u_2] = L_i[u_1] = L_i[u_2] = 0$$
$$(\text{per } i = 1, 2, 3, 4)$$

si ha poi, grazie alle ipotesi fatte sulle condizioni $L_i[z] = 0$

$$\begin{gathered} [P(u_1, u_2)]_a^b = 0 \\ \varrho(u_1) \geqslant 0 \quad \varrho(u_2) \geqslant 0 \end{gathered} \tag{55}$$

D'altra parte, poichè $\lambda' + i\lambda'' \neq \lambda' - i\lambda''$, vale la (50); sostituendo quindi nella (49) a u_i e u_j rispettivamente

$u_1 + i u_2$ e $u_1 - i u_2$, e tenendo conto della (55), si ottiene(*):

$$\int_a^u \theta_0 [(u''_1)^2 + (u''_2)^2]\, dx - \int_a^b \theta_1 [(u'_1)^2 + (u'_2)^2]\, dx + \tag{56}$$
$$+ \int_a^b B\, [u_1^2 + u_2^2]\, dx + \varrho(u_1) + \varrho(u_2) = 0.$$

Dalla (56), si trae:

Se $B(x) \not\equiv 0$,

$$u_1 \equiv u_2 \equiv 0$$

contro l'ipotesi, che cioè $\lambda' + i\lambda''$ sia un autovalore di λ.

Se poi $B(x) \equiv 0$, ma $\theta_1(x) \not\equiv 0$ l'autosoluzione di IX,

---

(*) $$\Big[(u_1 + i u_2)\big\{\theta_0 (u_1'' - i u_2'')\big\}'\Big]_a^b - \Big[\theta_0 (u_1' + i u'_2)(u_1'' - i u_2'')\Big]_a^b +$$
$$+ \Big[\theta_1 (u_1 + i u_2)(u'_1 + i u'_2)\Big]_a^b = \Big[\theta_0 (u_1 u'''_1 + u_2 u'''_2) + i\theta_0 (u_2 u_1''' - u_1 u_2''')\Big]_a^b +$$
$$+ \Big[\theta'_0 (u_1 u''_1 + u_2 u''_2) + i\theta'_0 (u_2 u_1'' - u_1 u_2'')\Big]_a^b - \Big[\theta_0 (u'_1 u''_1 + u'_2 u''_2) +$$
$$+ i\theta_0 (u_2' u_1'' - u_1' u_2'')\Big]_a^b + \Big[\theta_1 (u_1 u'_1 + u_2 u'_2) + i\theta_1 (u_2 u'_1 - u_1 u'_2)\Big]_a^b =$$
$$= i\Big[u_2 (\theta_0 u_1'')' - u_1 (\theta_0 u_2'')'\Big]_a^b - i\Big[\theta_0 (u_2' u_1'' - u_1' u_2'')\Big]_a^b + i\Big[\theta_1 (u_2 u_1' - u_1 u_2')\Big]_a^b +$$
$$+ \Big[u_1 (\theta_0 u_1'')' - \theta_0 u'_1 u_1'' + \theta_1 u_1 u_1'\Big]_a^b + \Big[u_2 (\theta_0 u_2'')' - \theta_0 u'_2 u''_2 + \theta_1 u_2 u_2'\Big]_a^b =$$
$$= i\Big[P(u_1, u_2)\Big]_a^b + \rho(u_1) + \rho(u_2).$$

$u_1 + i u_2$, non potrà che essere costante, e conseguentemente $\lambda' + i\lambda'' = 0$(**), che contraddice l'ipotesi $\lambda'' \neq 0$.

Se infine $B(x) \equiv 0$ e $\theta_1(x) \equiv 0$, $u_1 + i u_2$ riesce *funzione lineare di* x, e consegue ancora, contro l'ipotesi $\lambda' + i\lambda'' = 0$.

La funzione intera in λ, $\Delta(\lambda)$, non ha dunque zeri complessi, essa non è quindi nulla identicamente, ed esisterà, pertanto, la funzione meromorfa in λ, $\Omega(x, \lambda)$ integrale di VIII (1), i cui poli (tutti reali) sono gli autovalori di λ relativi al sistema omogeneo IX.

Posto che λ_i sia uno di tali autovalori, e u_i la corrispondente autosoluzione, dalla (54) ricaviamo la relazione notevole:

$$\lambda_i \int_a^b A u_i^2 \, dx < 0 \tag{57}$$

a meno che non si abbia $B(x) \equiv 0$.

Si concluderà quindi che:

Se $B(x) \not\equiv 0$, *lo zero non è autovalore di* λ *relativo a* IX.

3. — *Il caso particolare di* $B(x) \equiv 0$. Se $B(x) = 0$ in (a, b), lo zero potrà essere autovalore di IX, soltanto se una costante (non nulla) riesca autosoluzione corrispondente.

Ora, una costante è di certo soluzione della equazione:

$$D[z] + \lambda A z = 0$$

nell'ipotesi $B \equiv 0$ e $\lambda = 0$; quindi affinchè lo zero sia un

---

(**) In tale ipotesi la $L[z] = 0$ si riduce:

$$\frac{d^2}{dx^2} \theta_0 \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d}{dx} \theta_1 \frac{dz}{dx} + (\lambda' + i\lambda'') A z = 0;$$

e per $z =$ costante c quindi: $(\lambda' + i\lambda'') A c \equiv 0$, dalla quale poichè $A \not\equiv 0$ segue $\lambda' + i\lambda'' = 0$.

(1) Nella presente ipotesi.

autovalore occorre e basta che per una costante c si abbia:

$$L_i[c]=0 \qquad (\text{per } i=1,2,3,4).$$

La costante c può essere, data la linearità delle operazioni $L[u]$, qualsiasi, e possiamo, senz' altro supporla eguale ad 1, e scrivere le precedenti relazioni come segue:

$$L_i[1]=0 \qquad i=(1,2,3,4).$$

D' altra parte, si osservi che il sistema IX, in questo caso particolare, si riduce al seguente: (per $\lambda=0$)

$$\frac{d^2}{dz^2}\theta_0\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d}{dx}\theta_1\frac{dz}{dx}=0$$

$$L[u]=0 \qquad (i=1,2,3,4)$$

il quale non può essere soddisfatto che da una costante, e infatti dalla (54) grazie alla (52)′ e (52) consegue

$$\int_a^b \theta_0(z'')^2\,dx-\int\theta_1(z)'\,dx=0$$

da cui:

$$z'\equiv 0 \text{ e però } z=\text{cost.}$$

Quest' ultima osservazione ci permette di affermare che, *lo zero, ove sia un autovalore di* λ *relativo a* IX, *è un autolore semplice* (1).

Tutto questo vale nell' ipotesi che, essendo $B(x)\equiv 0$, non sia ad un tempo, $\theta_1(x)\equiv 0$; in quest' ultima ipotesi si potrà, fra gli autovalori di λ, avere anche lo zero, ma alla sola condizione che una funzione lineare di x ne sia autosoluzione corrispondente.

---

(1) **N. 2, Cap. II, parte prima.**

Il nostro sistema nelle ipotesi $B(x) \equiv \theta_1(x) \equiv 0$, per $\lambda = 0$ ha la forma:

$$\frac{d^2}{dx^2}\theta_0\frac{d^2 z}{dx^2} = 0$$

$$L_i[z] = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2, 3, 4)$$

il quale potrà essero soddisfatto (per la (54)) soltanto da una funzione lineare di x,

$$z = c_1 x + c_2.$$

Perchè, dunque lo zero sia autovalore di λ, occorre e basta poter determinare due costanti c_1 e c_2 tali da soddisfare alle seguenti relazioni:

$$L_i[c_1 x + c_2] = c_1 L_i[x] + c_2 L_i[1] = 0$$
$$(\text{per } i = 1, 2, 3, 4).$$

4. — *I poli della funzione meromorfa in* λ, $\Omega(x, \lambda)$ *integrali di* VIII, *diversi dall'eventuale polo nullo sono semplici.* Dalla (57) intanto si trae:

Se in (a,b) $A(x) \geq 0$, non esistono autovalori positivi.
» » » $A(x) \leq 0$, » » » negativi.

Facciamo ora vedere come i poli della funzione $\Omega(x, \lambda)$ integrale del sistema differenziale VIII nelle presenti ipotesi, siano semplici.

Sia λ_i un polo non nullo di $\Omega(x, \lambda)$, una radice cioè della equazione:

$$\Delta(\lambda) = 0$$

poichè $\Delta(\lambda_i)=0$, esistono di certo (1) integrali non nulli identicamente del sistema omogeneo:

$$\text{XII}\quad \begin{cases} \overline{D}[z] \equiv \dfrac{d^2}{dx^2}\,\theta_0\,\dfrac{d^2z}{dx^2}+\dfrac{d}{dx}\,\theta_1\,\dfrac{dz}{dx}+(\lambda_i A+B)z=0 \\ L_i[z]=0 \qquad (i=1,2,3,4). \end{cases}$$

Scriviamo il sistema VIII come segue:

$$\overline{D}[z]+(\lambda-\lambda_i)Az=r$$
$$L_i[z]=a_i \qquad (t=1,2,3,4)$$

e assumiamo come parametro per questo sistema la differenza $\mu=\lambda-\lambda_i$. La soluzione di quest'ultimo sistema sarà rappresentata da una funzione, meromorfa in μ, $\overline{\Omega}(x,\mu)$, avente nell'origine $\mu=0$, un polo che supporremo di ordine ν.

Lo sviluppo in serie di potenze di μ della $\overline{\Omega}(x,\mu)$ nell'intorno del punto $\mu=0$ sia ad esempio il seguente:

$$\overline{\Omega}(x,\mu)=\sum_{n=-\nu}^{\infty}\overline{u}_n\,\mu^n \equiv \sum_{n=-\nu}^{\infty}\overline{u}_n(\lambda-\lambda_i)^n=\Omega(x,\lambda)$$

dove si ricordi (2), il coefficiente $\overline{u}_{-\nu}$ di $\overline{\mu}^{-\nu}$, è un integrale, non nullo identicamente, del sistema omogeneo XII; si ha cioè identicamente:

$$\overline{D}[\overline{u}_{-\nu}]=0;\quad L_i[\overline{u}_{-\nu}]=0 \qquad (i=1,2,3,4).$$

Ove si supponga $\nu\geqq 2$ pel coefficiente $\mu^{-\nu+1}\,\overline{u}^{-\nu+1}$ si ha:

$$\overline{D}[u_{-\nu+1}]+A\overline{u}_{-\nu}=0 \quad L_i[\overline{u}_{-\nu+1}]=0 \quad (i=1,2,3,4).$$

---

(1) Cfr. Cap. II (parte prima) n. 3 (nota 14).
(2) V. parte prima, Cap. III, n. 2.

Da questa ultima relazione e dalla precedente si ricavano le altre:

$$
(58)\quad \left\{\begin{array}{l}
\overline{u}_{-\nu} D[\overline{u}_{-\nu+1}] - \overline{u}_{-\nu+1} D[\overline{u}_{-\nu}] + A\overline{u}^2_{-\nu} \equiv \overline{u}_{-\nu}(\theta_0 \overline{u}''_{-\nu+1})'' + \\
\qquad + \overline{u}_{-\nu}(\theta_1 \overline{u}'_{-\nu+1})' - \overline{u}_{-\nu+1}(\theta_0 \overline{u}''_{-\nu})'' - \overline{u}_{-\nu+1}(\theta_1 \overline{u}'_{-\nu})' + \\
\qquad\qquad + A\overline{u}^2_{-\nu} = 0 \\
\qquad\qquad L_i[\overline{u}_{\nu-}] = L_i[\overline{u}_{-\nu+1}] = 0 \quad (i = 1,2,3,4).
\end{array}\right.
$$

Dalla prima delle (58), integrando fra a e b, tenuto conto che $\overline{u}_{-\nu}$ e $\overline{u}_{-\nu+1}$ soddisfano entrambe alle condizioni simmetriche $L_i[z] = 0$ $(i = 1,2,3,4)$, consegue: (1)

$$\int_v^b A\overline{u}^2_{-\nu}\, dx = 0$$

che *è in contraddizione colla* (57). Si può dunque affermare:

Un autovalore di λ non nullo è polo semplice per la funzione meromorfa $\Omega(x, \lambda)$ integrale di VIII.

5. — *Sull'eventuale autovalore nullo — determinazione dell'ordine dell'eventuale polo nullo di* $\Omega(x, \lambda)$. Nel n. 3 di questo capitolo, abbiamo visto che l'autovalore zero, può aversi soltanto nel caso che sia $B(x) = 0$.

Supponiamo dunque $B(x) = 0$, e dapprima $\theta_1(x) \neq 0$.

Se lo zero, allora, è un autovalore, per quanto si ebbe occasione di vedere al ricordato n. 3, una costante, non nulla c, sarà autosoluzione di IX corrispondente a zero; per la funzione meromorfa $\Omega(x, \lambda)$, si avrà di conseguenza uno sviluppo in serie di potenze di λ nell'intorno dell'origine del tipo:

$$\Omega(x, \lambda) = c\lambda^{-\nu} + \sum_{n=-\nu+1}^{\infty} u_n \lambda^n \quad \text{con } c \text{ costante,}$$

(1) Cfr. parte terza, Cap. I, n. 1.

e ove si supponga $\nu \geqslant 2$, una dimostrazione perfettamente analoga a quella fatta nel precedente n. 1, porterebbe alla conseguenza:

$$\int_a^b A c^2 dx = c^2 \int_a^b A dx = 0. \tag{59}$$

Se, sulla funzione $A(x)$, si fa dunque l'ipotesi:

$$\int_a^b A dx \neq 0$$

lo zero non potrà essere che polo *semplice* di $\Omega(x, \lambda)$.

Nel caso, poi, si abbia ad un tempo:

$$B(x) \equiv 0 \qquad \theta_1(x) \equiv 0,$$

se lo zero è autovalore di λ, l'autosoluzione corrispondente, non potrà essere che del tipo, $x + c$ (con c costante), ragionando come dianzi, quindi, si perverrebbe alla conseguenza necessaria:

$$\int_a^b (x + c) A dx = 0;$$

e però, se quest'integrale non è nullo, lo zero non può essere che polo *semplice* di $\Omega(x, \lambda)$.

Proponiamoci ora, nel caso si verifichi la condizione $\int_a^b A dx = 0$, e nell'origine si abbia un polo per $\Omega(x, \lambda)$, di determinare l'ordine: Io dico, che, se lo zero è un autovalore, e la corrispondente autosoluzione(1) una costante, l'ordine del polo di $\Omega(x, \lambda)$ nell'origine non può superare il 2.

(1) Va ricordato qui che lo zero, secondo quanto fu stabilito al n. 3 di questo capitolo, non può essere che autovalore semplice (cfr. n. 2, car. II, parte prima).

Secondo i risultati del (n. 2, cap. III, parte prima) per la determinazione dell'ordine del polo di $\Omega(x,\lambda)$ nell'origine, bisogna considerare la successione dei determinanti:

$$A^{(1)};\ A^{(2)};\ldots\ldots A^{(\nu)};\ldots\ldots$$

(dove i simboli $A^{(i)}$ hanno il significato loro attribuito al citato n. 2, cap. III parte prima), e vedere quale è il primo di essi determinanti che non s'annulli: — e se, ad esempio, $A^{(\nu)}$ è il primo determinante della successione delle $A^{(i)}$ diverso da zero, ν sarà l'ordine del poto $\Omega(x,\lambda)$ nell'origine.

Ora, nel caso in considerazione la caratteristica del determinante $\Delta(\lambda)$, nel punto $\lambda = 0$, è $4-1=3$, (*lo zero è autovalore semplice*). Perciò i vari determinanti $A^{(i)}$ sono del primo ordine.

Nel sopracitato n. 2, si faccia, quindi, dapertutto nelle formule, $2m=4$; $p=1$, si ricava:

$$A^{(1)} = H_{11}^{(1)}\ ;\quad A^{(2)} = H_{11}^{(2)}\ldots\ldots\ldots$$

dove si ricordi:

$$H_{11}^{(1)} = \int_a^b H_1(\xi)\, H(\xi)\, \gamma(\xi)\, d\xi;$$

$$H_{11}^{(n)} = \int_a^b H_1(\xi)\, A(\xi)\, d\xi \int_a^b \Gamma(\xi,\xi_1)\, A(\xi_1)\, d\xi_1 \ldots\ldots \int_a^b \Gamma(\xi_{n-2}\,\xi_{n-1})\, A(\xi_{n-1})\, \gamma(\xi_{n-1})\, d\xi_{n-1}$$

$\gamma(x)$, essendo la autosoluzione corrispondente all'assegnato autovalore: « nel nostro caso, una costante non nnlla c ».

Facciamo, intanto, vedere che la funzione $H_1(\xi)$ nelle nostre ipotesi è costante — infatti, nel precedente numero è stato dimostrato che se $\int_a^b A\,dx \neq 0$, l'ordine ν del polo di

$\Omega(x,\lambda)$ nell'origine è uno, per conseguenza si dovrà avere in tale caso:

$$A^{(1)} \equiv H_{11}^{(1)} = c \int_a^b H_1(\xi) A(\xi) d\xi \neq 0.$$

La funzione $H_1(\xi)$, d'altra parte, non dipende da $A^{(1)}$; si presenta, dunque, la circostanza: se la funzione $A(x)$ è tale che $\int_a^b A\, d\xi \neq 0$, deve conseguire necessariamente:

$$\int_a^b H_1(\xi)\, A(\xi)\, d\xi \neq 0.$$

Ora ciò è falso; è sempre possibile, invero, scegliere una funzione $A(\xi)$ che soddisfi ad un tempo alle due relazioni:

$$\int_a^b A\, d\xi \neq 0; \text{ e } \int_a^b H_1 A\, d\xi = 0$$

a meno che $H_1(\xi)$ non sia costante (2).

---

(1) Pel significato di $H_1(\xi)$ vedere n. 2, cap. III, parte prima.

(2) Si prenda, infatti, come funzione $A(\xi)$ la seguente:

$$A(\xi) = \psi(\xi) - \frac{H_1(\xi)}{\int_a^b H^2{}_1\, d\xi} \int_v^b H_1 \psi\, d\xi$$

dove $\psi(\xi)$ è una funzione continua qualsiasi. Si ha:

$$\int_a^b H_1 A\, d\xi = 0;$$

mentre non è possibile che per qualunque $\psi(\xi)$, si abbia

$$\int_a^b A\, d\xi = 0$$

chè altrimenti ne seguirebbe:

$$\int_a^b \left[1 - \frac{\int_a^b H_1\, d\xi}{\int_a^b H^2{}_1\, d\xi} H_1(\xi)\right] \psi(\xi)\, d\xi = 0$$

comunque si scelga $\psi(\xi)$ e però:

$$1 - \frac{\int_a^b H_1\, d\xi}{\int_a^b H^2{}_1\, d\xi} H_1(\xi) = 0$$

cioè $H_1(\xi) =$ costante.

Sia allora $H_1(\xi)$ costante K non nulla, e si prenda a considerare il sistema seguente:

$$(\theta_0 z'')'' + (\theta_1 z')' + \varphi(x) = 0$$
$$L_i[z] = 0 \qquad (\text{per } i = 1, 2, 3, 4).$$

Perchè questo sistema ammetta soluzioni, nelle nostre ipotesi, (la caratteristica del relativo determinante $\Delta(o)$ è 3) occorre e basta, per la (11) del n. 4, cap. I, parte prima, che sia soddisfatta la condizione:

$$\int_a^b H_1 \varphi \, dx = K \int_a^b \varphi \, dx = 0$$

cioè:

$$\int_a^b \varphi \, dx = 0;$$

e ove questa condizione sia soddisfatta, per la soluzione generale dell'ultimo sistema si ha (come vuole la (13) del cap. I, parte prima):

$$z = c_1 + \int_a^b \Gamma_1(x, \xi) \varphi(\xi) \, d\xi$$

con c_1 costante arbitraria.

Ciò detto, se $\Omega(x, \lambda)$, nell'origine, ha, supponiamo, un polo d'ordine maggiore di 1, sarà:

$$H_{11}^{(1)} = Kc \int_a^b A \, dx = 0$$

ma allora, il sistema differenziale che si ottiene da quello testè considerato, sostitueudovi A in luogo di φ, ammette, come integrale la seguente funzione:

$$u = \int_a^b \Gamma_1(x, \xi) A(\xi) \, d\xi.$$

Dalla identità:

$$(\theta_0 u'')'' + (\theta_1 u')' + A = 0$$

moltiplicando ambo i membri per u, e integrando segue quindi:

$$\left[u\,(\theta_0\, u'')'\right]_a^b - \left[\theta_0 u'\, u''\right]_a^b + \left[\theta_1\, u\, u'\right]_a^b +$$

$$+ \int_a^b \theta_0 u''^2\, d\, x - \int_a^b \theta_1\, u'^2 d\, x = - \int_a^b A\, u\, d\, x.$$

Per le (52) e (52)' di questo capitolo, il primo membro di questa identità non è nullo, e perciò:

$$\int_a^b A\, u\, d\, x \neq 0$$

segue:

$$A^{(2)} \equiv H_{11}^{(2)} = \int_a^b H_1(\xi)\, A(\xi)\, d(\xi) \int_a^b \Gamma_1(\xi, \xi_1)\, A(\xi_1)\, \gamma(\xi_1)\, d\, \xi_1 =$$

$$= K c \int_a^b A(\xi)\, d\, \xi \int_a^b \Gamma_1(\xi, \xi_1)\, A(\xi_1)\, d\, \xi_1 = K c \int_a^b A(\xi)\, u(\xi)\, d\, \xi \neq 0$$

e conseguentemente il punto $\lambda = 0$, *è polo doppio di* $\Omega(x, \lambda)$.

6. — *Sull' esistenza di infiniti autovalori di* λ. Circa l'esistenza di una infinità di autovalori di λ relativi al sistema IX nelle ipotesi fatte al n. 1 di questo capitolo, faremo qui la seguente breve considerazione, riservandoci nel seguente capitolo di trattare la cosa in modo completo.

Cominciamo coll' osservare che nelle nostre ipotesi il sistema omogeneo ottenuto da IX facendovi $\lambda = 0$, il sistema cioè:

$$D[z] = 0$$
$$L_i[z] = 0$$

è incompatibile. E invero, posto che u sia integrale, non nullo identicamente, di questo sistema, si ha:

$$\int_a^b u\, D[u]\, d\,x = \Big[u\,(\theta_0\, u'')'\Big]_a^b - \Big[\theta_0\, u'\, u''\Big]_a^b + \Big[\theta_1\, u\, u'\Big]_a^b +$$

$$+ \int_a^b \theta_0\, (u'')^2\, d\,x - \int_a^b \theta_1\, (u')^2\, d\,x + \int_a^b B\, u^2\, d\,x = 0$$

la quale, per la (52) e (52)$'$ non può essere soddisfatta altro che dalla soluzione $u \equiv 0$, a meno che non si abbia $B\,(x) \equiv 0$.

L'incompatibilità del detto sistema ha, come necessaria conseguenza, la esistenza della relativa funzione di Green $G\,(x, \xi)$.

Con considerazioni perfettamente eguali a quelle fatte nel precedente capitolo, si perviene, allora, alla conclusione:

Il sistema differenziale VIII, per valori generici di λ nelle ipotesi (52) e (52)$'$, è equivalente alla equazione integrale lineare del tipo di Fredholm seguente,

$$z\,(x, \lambda) = f\,(x) - \lambda \int_a^b G\,(x, \xi)\, A\,(\xi)\, z\,(\xi, \lambda)\, d\,\xi$$

il cui nucleo è di quelli a tipo polare; quindi, pei risultati di Hilbert altra volta citati, si concluderà, che se A, in (a, b), ha soltanto un numero finito di cambiamenti di segno si avranno una infinità di valori eccezionali per la equazione integrale sopra scritta, *e però una infinità di autovalori di* λ *relativi al sistema* IX.

La condizione restrittiva che la funzione A nell'intervallo (a, b) si annulli solo un numero finito di volte non è necessaria per le conclusioni del presente numero, ciò sarà provato nel capitolo seguente.

IV.

Calcolo degli autovalori e delle corrispondenti autosoluzioni. Contemporanea dimostrazione di esistenza di infiniti autovalori.

1. — Il sistema, che in questo capitolo verrà preso in esame, è della forma considerata IX, nelle ipotesi stabilite al n. 1 del capitolo precedente relativamente alle funzioni $\theta_0, \theta_1(x)$, $A(x)$ ed alle operazioni $L_i[z]$. Per semplicità, però qui supporremo che le condizioni $L_i[z]=0$ si riducano addirittura alle (53) o (53)' e cioè:

$$z(a)=z'(a)=z(b)=z'(b)=0 \tag{53}$$

oppure nelle ipotesi $\theta_0(a)=\theta_0(b)$; $\theta'_0(a)=\theta'_0(b)$; $\theta_1(a)=\theta_1(b)$

$$L_i[z]\equiv\left[\frac{d^i z}{d x^i}\right]_{x=a}-\left[\frac{d^i z}{d x^i}\right]_{x=b}=0 \tag{53'}$$

per $i=0, 1, 2, 3$.

Nel precedente capitolo è stato dimostrato come, in queste ipotesi, non esistano autovalori complessi di λ; il determinante, relativo a IX, $\Delta(\lambda)$, quindi non sarà identicamente nullo, ed esisterà, perciò, la funzione meromorfa $\Omega(x, \lambda)$ integrale del sistema non omogeneo

$$D[z]+\lambda A z=0$$
$$L_i[z]=a_i \qquad (i=1, 2, 3, 4),$$

(comunque si prendano le costanti a_i) i poli della quale sono gli autovalori relativi a IX.

Per questa funzione $\Omega(x, \lambda)$ nell' origine avremo un punto regolare, od un polo di ordine finito e precisabile ν, a seconda che il sistema omogeneo:

$$D[z] = 0; \quad L_i[z] = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

risulti o no incompatibile.

Supponiamo, in generale, che l'origine $\lambda = 0$ sia per $\Omega(x, \lambda)$ un polo di ordine ν, (sarà $\nu = 0$ nel caso che il punto $\lambda = 0$ sia regolare per Ω) e si consideri la funzione:

$$\lambda^\nu \Omega(x, \lambda)$$

regolare nell'origine. In un intorno conveniente del punto $\lambda = 0$, questa funzione è sviluppabile in serie di potenze intere e positive di λ; poniamo:

$$\lambda^\nu \Omega(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i . \tag{60}$$

Se riusciamo a dimostrare che la serie (60), ha raggio di convergenza finito $r^{(0)}$, sarà provata la esistenza di almeno un autovalore di modulo $r^{(0)}$. (1)

Cominciamo, intanto, col determinare le u_i. Dalle identità:

$$D[\Omega] + \lambda A \Omega = 0$$
$$L_j[\Omega] = a_j \qquad (\text{per } j = 1,2,3,4)$$

ove si moltiplichino ambo i membri di ciascuna per λ^ν, si ricava:

$$D[\lambda^\nu \Omega] + \lambda A \lambda^\nu \Omega = D\Big[\sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^i\Big] + A \sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^{i+1} = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i D[u_i] +$$
$$+ A \sum_{i=0}^{\infty} u_i \lambda^{i+1} = D[u_0] + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i (D[u_i] + A u_{i-1}) = 0$$

$$L_j[\lambda^\nu \Omega] = L_j[\Sigma u_i \lambda^i] = \Sigma \lambda^i L_j[u_i] = a_j \lambda^\nu \qquad (j = 1,2,3,4)$$

(1) Cf. Cap. III, parte seconda.

dalle quali conseguono le relazioni nelle u_i:

$$\begin{array}{lll}
D[u_0]=0; & L_j[u_0]=0 & \text{per } j=1,2,3,4) \\
D[u_1]+A\,u_0=0; & L_j[u_1]=0 & \text{»} \qquad \text{»} \\
\cdots\cdots & & \\
D[u_\nu]+A\,u_{\nu-1}=0 & L_i[u_\nu]=a_j & \text{»} \qquad \text{»} \\
\cdots\cdots & & \\
D[u_i]+A\,u_{i-1}=0 & L_i[u_i]=0 & \text{»} \qquad \text{»} \\
\cdots\cdots & &
\end{array}$$

che stabiliscono un calcolo ricorrente delle funzioni u_j stesse(1).

(Si osservi che se $\nu>0$ la u_0 è un'autosoluzione).

Si ponga:

$$V_{n+m}=-\int_a^b A\,u_n\,u_m\,dx$$

e cominciamo col far vedere che, pei valori di n ed m maggiori di ν, il valore di V_{n+m} dipende esclusivamente dalla somma $m+n$, e non dai singoli valori di m ed n; si ha invero:

$$V_{n+m}=-\int_a^b A\,u_n\,u_m\,dx=\int_a^b u_n\,D[u_{m+1}]\,dx=$$

$$=\int_a^b [u_n\,D[u_{m+1}]-u_{m+1}\,D[u_n]]\,dx+\int_a^b u_{m+1}\,D[u_n]\,dx=$$

$$=\Big[P(u_{m+1},u_n)\Big]_a^b-\int_a^b A\,u_{n-1}\,u_{m+1}\,dx=V_{(n-1)+(m+1)}$$

poichè, dall'essere m ed n maggiori di ν, segue $L_j[u_{m+1}]=$ $=L_j[u_n]=0$, e però, $[P(u_{m+1},u_n)]_a^b=0$.

Si consideri la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_{n+\nu}\,\lambda^{n+\nu}=\sum_{i=\nu}^{\infty} V_i\,\lambda^i \tag{62}$$

(1) Cf. Cap. III, parte prima.

il cui raggio di convergenza non è inferiore a quello della serie (60); se questa serie ha raggio di convergenza finito, altrettanto avverrà per la (60), ora si ha per $n, m > \nu$:

$$(63) \qquad V_i \equiv V_{n+m} = -\int_a^b A\, u_n\, u_m\, dx = \int_a^b u_n\, D\, [u_{m+1}] =$$

$$= \Big[u_n (\theta_0\, u''_{m+1})'\Big]_a^b - \Big[\theta_0\, u'_n\, u''_{m+1}\Big]_a^b + \Big[\theta_1\, u_n\, u'_{m+1}\Big]_a^b +$$

$$+ \int_a^b \theta_0\, u''_n\, u''_{m+1}\, dx - \int_a^b \theta_1\, u'_n\, u'_{m+1}\, dx + \int_a^b B\, u_n\, u_{m+1}\, dx$$

da cui posto $m = n - 1$:

$$V_{2n-1} = \Big[u_n\, (\theta_0\, u''_n)'\Big]_a^b - \Big[\theta_0\, u'_n\, u''_n\Big]_a^b + \Big[\theta_1\, u_n\, u'_n\Big]_a^b +$$

$$+ \int_a^b \theta_0 (u''_n)^2\, dx - \int_a^b \theta_1 (u'_n)^2\, dx + \int_a^b B\, u_n^2\, dx \quad .$$

e quindi, poichè per $n > \nu$, la u_n verifica le $L_i[z] = 0$, e consegnentemente la (52)' del capitolo precedente, segue:

$$V_{2n-1} > 0 \, ,$$

si ha medesimamente, per $n > \nu + 1$ (ove nella (63) si ponga $n - 1$ ed n al posto rispettivamente di n ed m):

$$V_{2n-1} = \Big[u_{n-1} (\theta_0\, u''_{n+1})'\Big]_a^b - \Big[\theta_0\, u'_{n-1}\, u''_{n+1}\Big]_a^b + \Big[\theta_1\, u_{n-1}\, u'_{n+1}\Big]_a^b +$$

$$+ \int_a^b \theta_0\, u''_{n-1}\, u''_{n+1}\, dx - \int_a^b \theta_1\, u'_{n-1}\, u'_{n+1}\, dx + \int_a^b B u_{n-1} u_{n+1}\, dx > 0 .$$

Nella ipotesi (53) per le $L_i[z]$, i termini di V_{2n-1} fuori dai segni integrali, hanno somma nulla; segue (ove per comodità si ponga $-\theta_1 = \mu > 0$):

$$V_{2n-1} = \int_a^b \theta_0 u''_{n-1} u''_{n+1}\, dx + \int_a^b \mu\, u'_{n-1} u'_{n+1}\, dx + \int_a^b B u_{n-1} u_{n+1}\, dx > 0$$

$$V_{2n-3} = \int_a^b \theta_0 (u''_{n-1})^2 dx + \int_a^b \mu (u'_{n-1})^2 dx + \int_a^b B (u_{n-1})\, dx > 0 \qquad n \geq \nu + 2$$

$$V_{2n+1} = \int_a^b \theta_0 (u''_{n+1})^2 dx + \int_a^b \mu (u'_{n+1})^2 dx + \int_a^b B (u_{n+1})\, dx > 0.$$

La relazione di Schwarz (1) applicata alle coppie di funzioni:

$$\sqrt{\theta_0}\, u''_{n-1}, \sqrt{\theta_0}\, u''_{n+1};\quad \sqrt{\mu}\, u'_{n-1}, \sqrt{\mu}\, u'_{n+1};\quad \sqrt{B}\, u_{n-1}, \sqrt{B}\, u_{n+1}$$

ci dà:

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\int_a^b \theta_0 u''_{n-1} u''_{n+1}\, dx\right)^2 dx \leq \int_a^b \theta_0 (u''_{n-1})^2 dx \int_a^b \theta_0 (u''_{n-1})^2 dx \\ &\left(\int_a^b \mu u'_{n-1} u'_{n+1}\, dx\right)^2 dx \leq \int_a^b \mu (u'_{n-1})^2 dx \int_a^b \mu (u'_{n+1})^2 dx \qquad n \geq \nu + 2 \\ &\left(\int_a^b B u_{n-1} u_{u+1}\, dx\right)^2 dx \leq \int_a^b B u_{n-1}^2\, dx \int_a^b B u_{n+1}\, dx \end{aligned}\right.$$

Da queste relazioni, per un ben noto teorema elementare segue: (2)

$$V_{2n-1}^2 \leq V_{2n-3} V_{2n+1}$$

(1) V. ad es. VIVANTI, *Equazioni integrali lineari*. Milano, Hoepli, 1916.

(2) Se fra le quantità a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, \ldots n$ intercedono relazioni del tipo:

$$a_i \leq b_i c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

consegue:

$$\left(\sum_i a_i\right)^2 \leq \left(\sum_i b_i\right) \left(\sum_i c_i\right).$$

o anche:

$$\frac{V_{2n-1}}{V_{2n-3}} \leq \frac{V_{2n+1}}{V_{2n-1}}.$$

La successione $\gamma_n = \frac{V_{2n-1}}{V_{2n-3}}$ è monotona, e però regolare; al tendere di n all'infinito essa convergerà quindi ad un limite finito (non nullo) oppure a ∞.

Ma non è possibile che avvenga

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = \infty$$

chè altrimenti la serie $V_{2n+1}\lambda^{m+1}$ avrebbe raggio di convergenza nullo, ciò che non è, tale serie avendo raggio di convergenza non minore di quello della serie (60). Sarà dunque: $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n =$ quantità finita non nulla, e però il raggio di convergenza della serie $\Sigma V_{2n+1}\lambda^{2n+1}$ è finito; finiti pure, quindi, saranno i raggi di convergenza delle (62) e (60).

Sia $r^{(0)}$ il raggio di convergenza della (60), la funzione meromorfa in λ, $\Omega(x,\lambda)$, ammetterà, allora, poli (in numero finito) di modulo $r^{(0)}$. Ma i poli di $\Omega(x,\lambda)$ sono tutti reali, segue quindi che al più potranno esistere due poli di modulo $r^{(0)}$, e cioè i due punti dell'asse reale $r^{(0)}$ e $-r^{(0)}$.

Per la equazione omogenea:

$$D[z] + \lambda A z = 0$$

si avranno, quindi, autovalori di λ ad essa relativi e alle condizioni (53) o (53)', di modulo uguale ad $r^{(0)}$, ed in numero non superiore a due.

Sia $r^{(0)}$, ad esempio, uno di questi autovalori, esso per quanto è stato provato dianzi, è polo semplice di $\Omega(x,\lambda)$, consegue che la funzione:

$$\lambda^{\nu}\left(1 - \frac{\lambda}{r^{(0)}}\right)\Omega(x,\lambda)$$

è regolare nel punto $\lambda = r^{(0)}$. Di più, basta pensare alla forma di $\Omega(x, \lambda)$ (1), per convincersi subito come essa, e le sue derivate rapporto ad x, abbiamo limiti determinati e finiti per λ convergente verso $r^{(0)}$, limiti, ai quali le medesime tendono uniformemente.

Pertanto, dalle identità:

$$\begin{aligned} &D[\Omega] + \lambda A\, \Omega(x,\lambda) = \\ &L_j[\Omega] = a_i \qquad\qquad (i = 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

moltiplicandone ambo i membri di ciascuna per $\lambda^\nu\left(1 - \frac{\lambda}{r^{(0)}}\right)$, e passando al limite per $\lambda \to r^{(0)}$ si ottiene; (posto $\lim \lambda^\nu\left(1 - \frac{\lambda}{r^{(0)}}\right)\Omega(x,\lambda) = U_0$)

$$\begin{aligned} &D[u_0] + r^{(0)} A\, U_0 = 0 \\ &L_j[u_0] = 0 \end{aligned}$$

la quale ci dice che U_0 è l'autosoluzione corrispondente a $r^{(0)}$.

2. — *Calcolo dell'autovalore $r^{(0)}$ di λ di minimo modulo.*

Si consideri la funzione finita continua e monodroma, in un cerchio di raggio maggiore di $r^{(0)}$,

$$\psi(\lambda) = \lambda^\nu\left(1 - \frac{\lambda^2}{(r^{(0)})^2}\right)\Omega(x,\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda^2}{(r^{(0)})^2}\right)\sum_{i=0}^{\infty} u_i\, \lambda^i$$

e si ponga, $\qquad \psi(\lambda) = \sum v_i\, \lambda^i$

si ha:

$$v_0 = u_0, \; v_1 = u_1; \quad v_2 = \left(u_2 - \frac{u_0}{(r^{(0)})^2}\right) \ldots\ldots v_n = \left(u_n - \frac{u_{n-2}}{(r^{(0)})^2}\right).$$

(1) Cf. Cap. III, parte seconda - e v. 1, - Cap. I, parte prima.

La serie $\Sigma\, v_i \lambda^i$, ha raggio di convergenza maggiore di $r^{(0)}$, e per $\lambda = \pm r^{(0)}$, essa si riduce alle autosoluzioni corrispondenti ai due autovalori, $r^{(0)}$ e $-r^{(0)}$.

Ciò, naturalmente, nel caso che tanto $r^{(0)}$, quanto $-r^{(0}$ siano autovalori, chè se, invece, uno solo di essi è autovalore, e l'altro no, il limite di ψ, per λ tendente all'ultimo, è zero.

Ora si ha:

$$\sum_{i=0}^{n} v_i \cdot (r^{(0)})^i = u_0 + u_i r^{(0)} + \sum_{i=2}^{n} (u_i \cdot (r^{(0)})^i - u_{i-2} \cdot (r^{(0)})^{i-2}) =$$

$$= u_n \cdot (r^{(0)})^n - u_{n-1} \cdot (r^{(0)})^{n-1}$$

e medesimamente:

$$\sum_{i=0}^{n} v_i \cdot (-r^{(0})^i = u_n \cdot (-r^{(0)})^n = u_{n-i} \cdot (-r^{(0)})^{n-1}$$

perciò:

$$\lim_{n \to \infty} (u_n \cdot (r^{(0)})^n - u_{n-i} \cdot (r^{(0)})^{n-1}) = U_0$$

$$\lim_{n \to \infty} (u_n \cdot (-r^{(0)})^n - u_{n-1} \cdot (-r^{(0)})^{n-1}) = U_{-0}$$

dove con U_{-0} si è indicata l'autosoluzione corrispondente ad $-r^{(2)}$.

Dalle due ultime relazioni consegue:

$$\lim_{n \to \infty} u_{2n} (r^{(0)})^{2n} = \frac{1}{2} (U_0 + U_{-0}).$$

Le funzioni U_2 e U_{-0} non sono nulle entrambe, perciò non è possibile che accada $U_0 \equiv - U_{-0}$ chè altrimenti dalle identità:

$$D[U_0] + r^{(0)} A\, U_0 = 0\,; \quad D[-U_0] - r^{(0)} A\, U_{-0} = 0$$

seguirebbe:

$$A\,U_0 \equiv 0$$

e quindi poichè $A \not\equiv 0$

$$U_0 \equiv U_{-0} \equiv 0.$$

Il limite di $u_{2n}(r^{(0)})^{2n}$, quindi, per un valore generico di x non sarà zero, esiste, conseguentemente, il limite del rapporto $\frac{u_{2n}}{u_{2n-2}}$, come segue dalla relazione:

$$\lim_{n \to \infty} (u_{2n} \cdot (r^0)^{2n} - u_{2n-2} \cdot (r^{(0)})^{2n-2} = 0$$

e si ha:

(64)
$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{2n}}{u_{2n-2}} = \frac{1}{(r^{(0)})^2}$$

La (64) *ci da mezzo, precisamente, di calcolare gli autovalori non nulli di modulo minimo.*

Una volta calcolato $r^{(0)}$ si calcoleranno le autosoluzioni corrispondenti agli autovalori $\pm r^{(0)}$ cercando i limiti delle espressioni:

(65)
$$\lim (\pm r^{(0)})^n u_n + (\pm r^{(0)})^{n-1} u_{n-1}).$$

Se per uno di questi limiti si troverà lo zero, è segno che esiste un solo autovalore di modulo $r^{(0)}$, quello la cui corrispondente autosoluzione, calcolata dalla (65), non è nulla identicamente. In caso contrario tanto $r^{(0)}$, quanto $-r^{(0)}$ saranno autovalori di λ.

3. — *Esistenza di infiniti autovalori di λ e procedimento generale per il calcolo dei medesimi.*

La funzione

$$\psi(\lambda) = \sum v_i \lambda^i$$

è finita e continua e monodroma in un cerchio di centro nell'origine e di raggio $r^{(1)} > r^{(0)}$ *finito,* come vedremo. Esisterà, quindi almeno un autovalore di modulo $r^{(1)}$, e poichè tutti gli autovalori sono reali, potranno esistere al più due autovalori di modulo $r^{(1)}$. La dimostrazione che il raggio di convergenza di $\psi(\lambda)$ è finito, è del tutto analoga a quella che ci ha condotto a dimostrare che è finito il raggio di convergenza della serie $\sum u_i \lambda^i$.

Dalle identità tra le v_i,

$$(66) \qquad \begin{aligned} &D[v_i] + A v_{i-1} = 0 \\ &L_j[v_i] = 0 \end{aligned}$$

e che valgono per $i > \nu + 2$ segue, come prima, posto:

$$W_{n+m} = -\int_a^b A\, v_n v_m \, dx\,,$$

che W_{m+n}, dipende soltanto dalla somma $m+n$, e non dai singoli valori degli indici m ed n.

Poniamo:

$$\psi_1(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} W_{n+\nu+2}\, \lambda^{n+\nu+2} = \sum_{i=\nu+2}^{\infty} W_i \lambda^i .$$

La serie $\psi_1(\lambda)$ ha raggio di convergenza non inferiore a quello della serie $\psi(\lambda)$. E però avremo dimostrato il nostro asserto che, cioè il raggio di convergenza di $\psi(\lambda)$ è finito, quando la medesima cosa sarà stata dimostrata per la serie $\psi_1(\lambda)$.

Ora come per le V_i, si dimostrano, per le W_i le relazioni:

$$W_{2i-1} > 0$$

e

$$W_{2i-1}^2 \leq W_{2i+1} \cdot W_{2i-3}$$

dalle quali si deduce, come prima, che il raggio di convergenza della serie

$$\sum W_{2i-1}\, \lambda^{2i-1}$$

(raggio quest'ultimo non inferiore a quelli delle serie ψ_1 e ψ) è finito, finito sarà quindi anche quello di ψ.

Pel calcolo effettivo del raggio $r^{(1)}$ di convergenza della serie ψ, e delle corrispondenti autosoluzioni U_1 e U_{-1}, si procederà con metodo identico a quello seguito per calcolare $r^{(0)}$, U_0, U_{-0}.

Posto ora:

$$\psi_2 \equiv \lambda^{\nu}\left(1-\frac{\lambda^2}{(r^{(0)})^2}\right)\left(1-\frac{\lambda^2}{(r^{(1)})^2}\right)\Omega(x,\lambda) \equiv \left(1-\frac{\lambda^2}{(r^{(1)})^2}\right)\psi_1 = \sum_{i=0}^{\infty} w_i \lambda^i$$

segue analogamente: $\psi_2(\lambda)$ è finita continua e monodroma in un cerchio di centro nell'origine e di raggio maggiore di $r^{(1)}$, ed inoltre essa ha raggio di convergenza finito. Se $r^{(2)}$ è tale raggio, uno almeno dei due valori $r^{(2)}$ o $-r^{(2)}$ di λ, è un autovalore relativo al sistema IX, e in ogni caso, oltre a questi due $(\pm r^{(2)})$ non esistono altri autovalori di λ di modulo $r^{(2)}$.

Con procedimento analogo si procederà per la dimostrazione e quindi pel calcolo di un'autovalore reale di modulo maggiore di $r^{(2)}$, e così via indefinitamente. Concludendo si ha il:

TEOREMA. — Esistono infiniti autovalori reali aventi il punto all'infinito come unico punto limite, relativi alla equazione:

$$\frac{d^2}{dx^2}\theta_0\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d}{dx}\theta_1\frac{dz}{dx}+(\lambda A+B)z=0$$

e alle condizioni ai limiti:

$$z(a) = z'(a) = z(b) = z'(b) = 0$$

oppure alle altre (nel supposto si abbia $\theta_0(a) = \theta_0(b)$; $\theta'_0(a) = \theta'_0(b)$; $\theta_1(a) = \theta_1(b)$

$$z(a) - z(b) = z'(a) - z'(b) = z''(a) - z''(b) = z'''(a) - z'''(b) = 0$$

nella ipotesi:

$A(x)$ funzione continua qualunque

$B(x) \geq 0$ in tutto l'intervallo (a, b) e $\theta_1(x) \leq 0$

Catania, 15 Settembre 1925.