

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

VASCO RONCHI

## **Due nuovi metodi per lo studio delle superficie e dei sistemi ottici**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1<sup>re</sup> série, tome 15*  
(1927), exp. n° 1, p. 1-50

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1927\\_1\\_15\\_\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1927_1_15__A1_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

VASCO RONCHI

---

DUE NUOVI METODI

PER LO STUDIO

DELLE

SUPERFICIE E DEI SISTEMI OTTICI



---

---

## INTRODUZIONE

---

Scopo della presente Nota è l'esposizione di due nuovi metodi per lo studio delle superficie e dei sistemi ottici, entrambi fondati sulle proprietà dei *reticoli* a bassa frequenza.

Per *reticolo rettilineo* intenderemo un sistema piano di tratti rettilinei paralleli e equidistanti; si realizza praticando delle righe nell'argentatura di uno specchio piano o nella gelatina annerita di una lastra fotografica; o anche fotografando un reticolo disegnato in grande su carta bianca; indicheremo con  $a$  la larghezza complessiva di un tratto trasparente o bianco più quella di un tratto opaco o nero, e, benchè non sia indispensabile, supporremo però sempre che le due larghezze siano uguali; l'inverso di  $a$ , cioè il numero di tratti neri o bianchi che entrano nell'unità di lunghezza presa normalmente alla loro direzione, è la *frequenza*  $m$ :

$$m = 1 / a.$$

Per *reticolo circolare* intenderemo un sistema piano di tratti circolari concentrici ed equidistanti, e tali che lo spessore di ognuno sia uguale all'intervallo fra due successivi; e frequenza  $m$  è, come sopra, il numero di tratti che tagliano l'unità di lunghezza presa sul raggio.

Se sul cammino di un fascio di raggi luminosi convergenti in un punto  $P$  (fig. 1) interponiamo un reticolo  $R$ , normale all'asse del fascio stesso, si hanno lateralmente

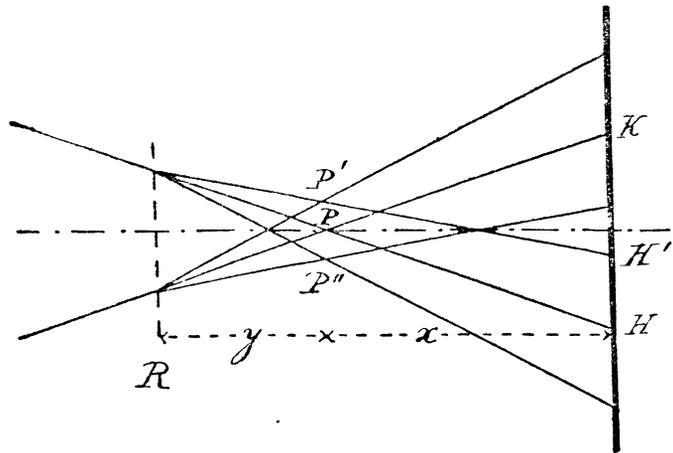


Fig. 1.

gli spettri dei vari ordini, che, trascurando le aberrazioni che così si vengono a generare, sono dei punti luminosi, come  $P'$  e  $P''$ , la cui distanza  $d$  da  $P$  è data dalla nota formula, in prima approssimazione,:

$$d = y\lambda / a$$

dove  $y$  è la distanza tra  $P$  e il reticolo,  $a$  la costante di questo, e  $\lambda$  la lunghezza d'onda della luce impiegata.

Ma questi punti possono funzionare come sorgenti di fasci di raggi capaci di interferire, e se quindi a una distanza  $x$  da  $P$  li raccogliamo su uno schermo, vi appaiono delle frangie d'interferenza, la cui larghezza, se consideriamo come sorgenti  $P, P'$  (e lo stesso avviene per  $P, P''$ ), è data da

$$A = x\lambda / d$$

e quindi

$$A = ax / y. \quad (1)$$

Tali frangie sono *acromatiche*, e dal punto di vista dell'Ottica geometrica altro non sono che l'*ombra* dei tratti del reticolo.

In modo analogo, come è stato esaurientemente dimostrato da tempo, quando sul cammino di un fascio di raggi per es.: paralleli che cadono sopra un sistema convergente si interpone un reticolo, nel piano focale del sistema si forma l'immagine puntiforme della sorgente infinitamente lontana, e lateralmente a questa gli spettri dei vari ordini; i quali a lor volta fungono da sorgenti di raggi che interferendo formano delle frangie di interferenza acromatiche (a parte le aberrazioni) costituenti appunto ciò che in Ottica geometrica si chiama l'immagine del reticolo.

I metodi di prova che esporremo si basano su questi due fenomeni; e risulta da questa premessa che l'argomento può esser trattato dal punto di vista geometrico liberamente.

## PRIMO METODO.

**Le frangie d'ombra.**

Indicheremo col nome di *frangie d'ombra* le frangie d'interferenza acromatiche, che si formano, come si è detto sopra, quando si raccoglie su uno schermo un fascio di raggi passanti per un punto  $P$  e tagliati da un reticolo.

Ne definiamo la larghezza  $A$  e la frequenza  $M = 1/A$  come per i reticoli;  $A$  risulta così la grandezza data dalla (1).

Conservando le notazioni già adoperate, conteremo le distanze  $x$  e  $y$  a partire dal punto  $P$ , e la  $x$  positivamente verso lo schermo, la  $y$  in senso contrario. Ponendo

$$x + y = D \quad (2)$$

segue dalla (1)

$$y = aD / (A + a).$$

Dato che supporremo sempre lo schermo al di là del punto di convergenza  $P$ ,  $x$  risulta sempre positivo,  $y$  viceversa può esser positivo, nullo o negativo; ne segue che anche  $A$  e  $a$  debbono essere affette da segno e precisamente dello stesso segno quando sono da parti opposte dell'asse.

Supponiamo il reticolo rettilineo: le frangie d'ombra costituiscono ancora un reticolo rettilineo di costante  $A$ .

Avendo poi, per  $a = \text{cost.}$  e  $x = \text{cost.}$ :

$$dA = -ax \, dy / y^2,$$

quando  $|y|$  diminuisce in valore assoluto di una quantità  $|dy|$ ,  $A$  aumenta di un certo valore  $|dA|$  tanto maggiore quanto più piccolo è  $|y|$ .

Quando poi  $|y|$  è sufficientemente piccolo, una mezza frangia d'ombra occupa tutto il campo, il quale appare così o tutto oscuro o tutto illuminato; e se ancora  $|y|$  diminuisce non si ha nessuna variazione nell'aspetto della figura sullo schermo. Chiamando  $\alpha$  la semi-apertura angolare del cono luminoso, il verificarsi di questa condizione col valor massimo  $y_m$  di  $|y|$  si ha quando

$$A / 4x = tg \alpha$$

cioè

$$a / 4y_m = tg \alpha, \quad y_m = a / 4tg \alpha. \quad (3)$$

$y_m$  è dunque l'approssimazione colla quale si può individuare il punto  $P$  spostando il reticolo lungo l'asse del cono luminoso e osservando l'apparenza della sua ombra sullo schermo.

Quando però si voglia realizzare l'esperienza, si può facilmente ottenere un fascio di raggi conico, col vertice in un punto  $P$ , ma non si può escludere che, in luogo di un punto luminoso,  $P$  sia un dischetto, per quanto di dimensioni minutissime; e può darsi che ciò porti alla completa confusione delle frangie.

Se (fig. 2) indichiamo con  $d = PP'$  il diametro del dischetto, e per i due punti estremi ripetiamo il calcolo

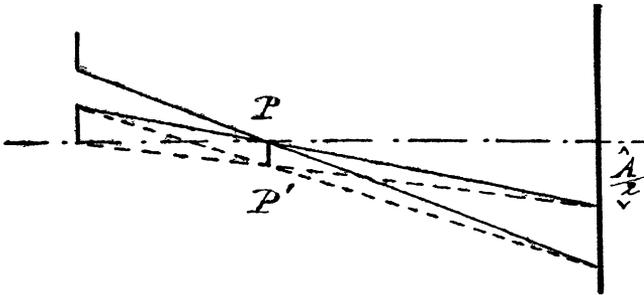


Fig. 2.

sopra riportato, si conclude che il campo sullo schermo riesce uniforme quando una frangia d'ombra dovuta a  $P$  è spostata di metà della sua larghezza rispetto a una dovuta a  $P'$ ; e poichè allora

$$A/2 : D = d : y ,$$

per la (1) e la (2) si ha:

$$d = a/2(1 + y/x).$$

Occorre dunque un  $d$  tanto più piccolo quanto più grande è la frequenza del reticolo e quanto più questo è vicino al punto  $P$ , perchè le frangie siano distinguibili sullo schermo: saranno poi tanto più nitide quanto più sono piccoli i valori di  $d$ .

È poi evidente che le frangie d'ombra di un reticolo rettilineo sono un reticolo rettilineo solo quando il fascio luminoso è un cono con un unico vertice  $P$ .

Supponiamo ora che i vari raggi intersechino il raggio medio o asse in punti diversi pur costituendo un fascio di rivoluzione intorno all'asse stesso, quale per es., si ottiene da un pezzo ottico centrato, non esente da aberrazione sferica.

Sia  $P$  (fig. 3) il punto in cui i raggi parassiali tagliano l'asse. Se anche tutti gli altri raggi passassero per questo punto, quando il reticolo è alla distanza  $y$  e lo schermo alla distanza  $x$  da esso, si avrebbero delle frangie d'ombra di larghezza  $A$ , data dalla (1). Poniamo ora

$$L_n = nA ; \quad l_n = na$$

dove con  $n$  si indica il numero *intero* di tratti di reticolo o di frangie che si considerano. Risulta subito:

$$L_n : l_n = x : y. \quad (3')$$

Ma se il raggio che lambisce l'ennesimo tratto di reticolo passa per un punto diverso  $P$ , colpisce lo schermo in un punto ad una distanza  $H_n$  dalla traccia dell'asse di-

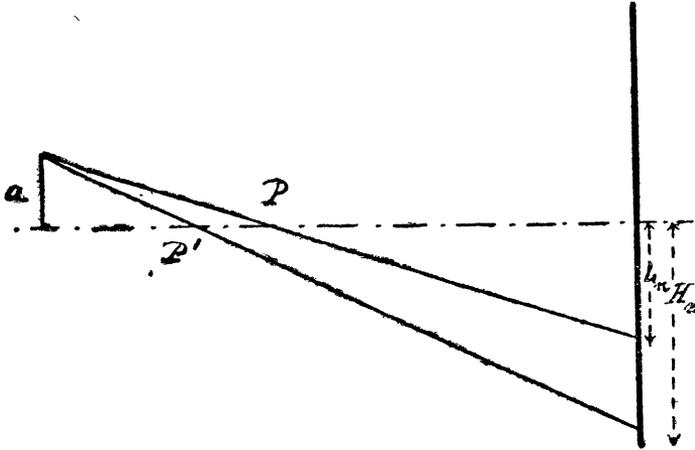


Fig. 3.

versa da  $L_n$ , e sono in corrispondenza diversi i valori di  $x_n$  e  $y_n$  relativi; ma hanno ancora luogo le relazioni:

$$H_n : na = x_n : y_n ; \quad x_n + y_n = D$$

onde

$$H_n = na (D / y_n - 1) \quad (4).$$

Possiamo supporre, come in generale, che  $y_n$  sia molto piccolo rispetto a  $D$ , e scrivere:

$$H_n = na D / y_n \quad (5).$$

In tal caso bisogna che la frequenza del reticolo sia assai elevata, perchè non si cada entro o vicini all'intervallo  $y_M$  per cui il campo appare uniforme; e possiamo dunque supporre che per  $n=1$  il valore di  $H_n$  differisca tanto poco da  $L_n$  da poterne trascurare la differenza; allora

$$H_1 = a D / y_1 = A.$$

Dei tre casi possibili:

$$1) H_n = nH_1 ; 2) H_n > nH_1 ; 3) H_n < nH_1 ;$$

il primo porta alla conclusione

$$y_n = aD / H_1 = y_1$$

cioè il raggio che lambisce l'ennesimo tratto di reticolo taglia l'asse nello stesso punto  $P$  in cui lo taglia quello che lambisce il primo tratto.

Il secondo caso porta a

$$|y_n| < |y_1| ;$$

dunque se  $y_1 > 0$  e anche  $y_n > 0$ , cioè entrambi i punti si trovano dopo il reticolo, si conclude che l'ennesima frangia è tanto più larga di quello che dovrebbe essere quanto più il punto  $P'$  è lontano da  $P$  e vicino al reticolo; come ancora se entrambi gli  $y$  sono negativi, cioè il reticolo si trova fra essi e lo schermo, l'ennesima frangia è tanto più larga di quello che dovrebbe essere quanto più il punto  $P'$  è lontano da  $P$  e vicino al reticolo.

Evidentemente il contrario succede nell'ultimo caso:

$$H_n < nH_1 .$$

Dunque l'ombra di un reticolo rettilineo non è più un reticolo a frequenza costante, ma le frangie risultano più o meno dilatate e contorte. Ma nell'ipotesi già esplicitamente espressa dell'essere il fascio di rivoluzione intorno all'asse, la figura sullo schermo risulta composta di tante zone circolari finite o infinitesime e concentriche, in ciascuna delle quali la frequenza è costante. Supponiamo inoltre di spostare trasversalmente il reticolo in modo che l'orlo di un tratto passi per l'asse; per simmetria la proiezione di quest'orlo è ancora rettilinea; ma la proiezione del-

l'orlo successivo non lo è più quando esistono vari punti di incontro dei raggi coll'asse. Supponiamo per fissare le idee, che i raggi di una zona interna passino tutti per un punto  $P$  e quelli di un'altra zona limitrofa per un punto  $P'$ . Se il reticolo è posto prima di essi e  $P'$  è più lontano di  $P$  dal suo piano, l'aspetto è quello della fig. 4; onde dall'esame della sola prima mezza frangia si deduce la dislocazione dei punti di intersezione  $P$  e  $P'$ .

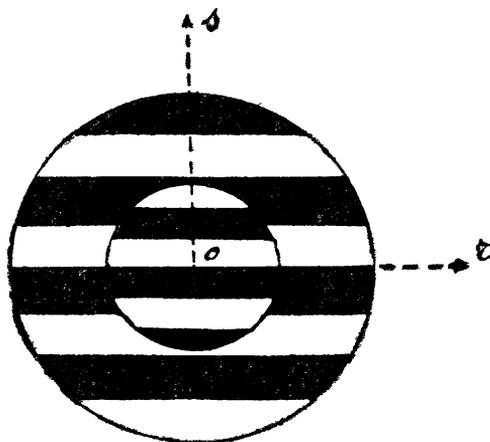


Fig. 4.

In generale prendendo la traccia dell'asse come origine, l'asse di simmetria del disco come asse delle ascisse  $r$ , e un asse ortogonale per le ordinate  $s$  possiamo rappresentare l'orlo della prima frangia coll'equazione:

$$s = f(r)$$

i cui valori coinciderebbero con quelli di  $H_n$  se  $n$  non fosse un numero intero, ma variabile con continuità. Quindi le ascisse dei punti  $P$  sull'asse a partire dal reticolo,  $y$ , mantenendo le convenzioni precedenti circa i segni, e le ipo-

tesi circa l'approssimazione dei calcoli, risultano espresse da

$$y = aD / f(r)$$

o, in generale, se si considera l'orlo della ennesima frangia:

$$y = naD / f(r).$$

Con maggiore approssimazione si può scrivere:

$$y = naD / (f(r) + a).$$

Queste formule ci permettono dunque di determinare la dislocazione dei punti  $P$  sull'asse in funzione di  $r$ , quando si conoscano le due costanti  $a$  e  $D$ , e si studi il comportamento di un orlo di un sistema di frangie d'ombra.

Se adoperiamo invece un reticolo circolare centrato, cioè col centro sull'asse del fascio, le frangie d'ombra debbono risultare anelli concentrici ed equidistanti solo quando il fascio di raggi è conico con un vertice  $P$  come nella fig. 1; e viceversa se tale è l'aspetto delle frangie, il fascio è conico con un unico vertice  $P$ .

Il raggio  $L_n$  dell'ennesimo anello è dato dalla (3'). Se i punti di intersezione dei raggi coll'asse sono vari, ma è rispettata l'ipotesi della rivoluzione intorno a questo, gli anelli sono ancora circolari e concentrici, ma non più equidistanti, e il raggio  $H_n$  dell'ennesimo anello è dato dalla (4) o dalla (5).

La discussione sul come conoscendo gli  $y$  si possano prevedere gli  $H_n$  e come da questi si deducano quelli non richiede nessuna variante.

Solo quando il fascio non è di rivoluzione intorno all'asse, le frangie d'ombra non riescono circolari; e viceversa. In tal caso, prendendo la traccia dell'asse come polo e una retta passante per esso come asse di riferimento,

l'orlo di un anello può rappresentarsi, in coordinate polari  $r$  e  $\theta$  coll'espressione:

$$r = f(\theta);$$

ed essendo i valori di  $r$  quelli di  $H_n$  nel caso che fosse  $f(\theta) = \text{cost.}$  possiamo scrivere:

$$y = naD / f(\theta);$$

e avere così la posizione, rispetto al reticolo, dei punti in cui i vari raggi tagliano l'asse.

Oltre i procedimenti esposti, che permettono di dedurre le funzioni  $y(r)$  e  $y(\theta)$ , in via approssimata, dall'esame di un sistema di frangie d'ombra, e dalla misura di due costanti,  $a$  e  $D$ , se ne può seguire un altro, più preciso, che richiede la misura di una sola costante, ma di due sistemi di frangie.

Sia (fig. 5)  $R$  la posizione del reticolo in un fascio di raggi passanti tutti per un punto  $P$ , e sia  $H_n$  la corrispondente distanza dall'asse dell'orlo dell'ennesima frangia,

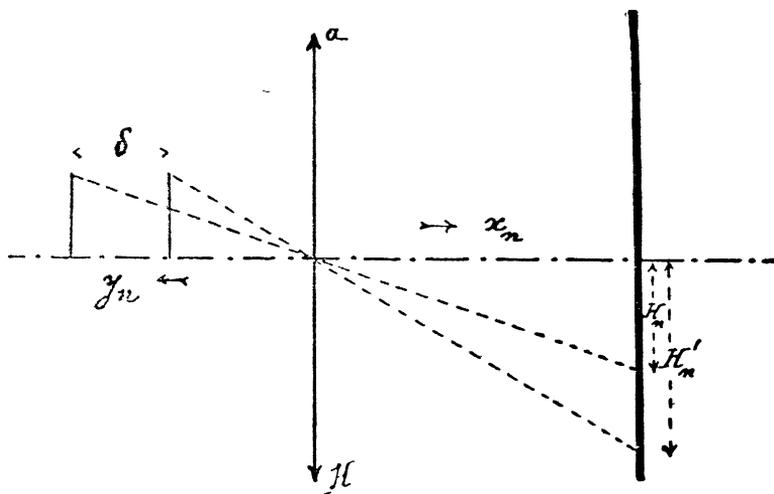


Fig. 5.

ombra dell'orlo dell'ennesimo tratto di reticolo, con  $n$  qualunque, intero o frazionario. Vale allora la

$$H_n : na = x_n : y_n.$$

Spostando il reticolo di un tratto  $\delta$ , si ha un valore  $H'_n$  in luogo di  $H_n$ , e un valore  $y'_n$  invece  $y_n$ , legati dalle relazioni:

$$y_n - y'_n = \delta \quad ; \quad H'_n : na = x_n : y'_n.$$

Occorre, distinguere due casi, perchè mentre  $y_n$  può esser sempre supposto positivo,  $y'_n$  può esser positivo (primo caso) o negativo (secondo caso).

Nel primo si ha subito

$$y_n = \delta : (1 - H_n / H'_n);$$

nel secondo

$$y_n = \delta : (1 + H_n / H'_n);$$

e si può scrivere brevemente:

$$y_n = \delta : (1 \mp H_n / H'_n)$$

pur di ricordare in quali casi vale l'uno o l'altro segno.

Se i vari raggi incontrano l'asse in diversi punti, il ragionamento fatto continua a valere, purchè lo si intenda applicato a una zona elementare (se il fascio è di rivoluzione) o a un fascetto elementare. In tal caso come si è avanti detto si può porre:

$$H_n = p(r) \quad ; \quad H'_n = q(r);$$

quindi si ha subito

$$y(r) = \delta : (1 \mp p(r) / q(r)).$$

Analogamente

$$y(\theta) = \delta : (1 \mp p(\theta) / q(\theta)),$$

avendo posto  $H_n = p(\theta)$  e  $H'_n = q(\theta)$ , per i reticoli circolari.

### Applicazione delle precedenti conclusioni alla prova dei sistemi ottici.

Dal momento che lo studio delle aberrazioni di un sistema ottico si riduce alla determinazione delle funzioni  $y(r)$  e  $y(\theta)$ , per varie regioni dell'asse, a seconda delle circostanze e degli scopi, è evidente come le frangie d'ombra possano servire allo scopo, non solo dal punto di vista qualitativo, osservandone la forma e l'andamento, ma anche quantitativamente, applicando le formule a cui siamo giunti.

Il procedimento non potrebbe essere più semplice; non occorre che una sorgente puntiforme, cioè una stella naturale o artificiale, bianca per i sistemi catottrici, monocromatica, sia pur grossolanamente, per i diottrici. Sul cammino dei raggi reduci dal sistema si interpone il reticolo, sopra un corsoio, in modo da poterlo far scorrere parallelamente all'asse del fascio luminoso.

Nel caso che il sistema da studiare sia un obbiettivo astronomico su montatura equatoriale, una stella può servire da sorgente; e dalla semplice osservazione a occhio delle frangie d'ombra che si vedono guardando l'obbiettivo attraverso un reticolo posto normalmente all'asse in vicinanza del fuoco, si deducono le condizioni dello strumento. Raccogliendo invece i raggi sopra una lastra fotografica, si può ottenere una fotografia da cui poi dedurre quantitativamente la funzione  $y(r)$ . In questo modo ho controllato che i risultati ottenuti con questo procedimento concordano con quelli ottenuti mediante altri metodi, sull'obbiettivo AMICI I dell'Osservatorio Astrofisico di Arcetri.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> V. RONCHI. *Sopra gli obbiettivi astronomici dell'Amici*. « Rivista d'Optica e Meccanica di precisione », dicembre 1922.

Nella fig. 6 (V. Tav. I) sono riportate fotografie ottenute nella prova di un obbiettivo acromatico di apertura relativa  $1/3$ , con notevole aberrazione sferica. La sorgente era resa monocromatica mediante un monocromatore Hilger, in  $\lambda = 4500$  U. Å. circa; il forellino di mm. 0,10 di diametro si trovava a 3 m. dall'obbiettivo; il reticolo era praticato nella gelatina annerita di una lastra fotografica, ed aveva  $m = 10$  tratti per mm.; quello circolare di cui i risultati si vedono nella parte inferiore della figura, aveva  $m = 100/12$  tratti per mm.

Questi reticoli, veramente ottimi, mi sono stati costruiti dal sig. Michele Collo, collaudatore del *Laboratorio di ottica pratica e meccanica di precisione*.

Nella fig. 7 (V. Tav. II) sono riprodotte le prove dello specchio sferico concavo AMICI III, di circa m. 12 di raggio e cm. 32 di apertura, già provato<sup>1</sup> coi metodi di Foucault e di Hartmann, i cui risultati sono riprodotti nelle figg. 8 e 9 (V. Tav. III e IV) rispettivamente. Anche in queste prove sono stati impiegati gli stessi reticoli di cui sopra. Da un confronto anche superficiale risulta subito quanto la prova coi reticoli, per quanto di frequenza assai limitata, sia più completa e sensibile, e come la curva che si ottiene col metodo di Hartmann sia poco attendibile quando il fascio non è di rivoluzione intorno all'asse come appunto in questo caso.

Per lo studio dell'aberrazione cromatica, si può illuminare con luci di varie lunghezze d'onda il foro sorgente, e ciascuna volta determinare gli spostamenti che ne conseguono nel fuoco; ma è assai più rapido, comodo e sensibile far cadere le frangie d'ombra ottenute in luce bianca

---

<sup>1</sup> V. RONCHI. *Loc. cit.*

sulla fenditura di uno spettroscopio, in modo che la dispersione di questo sia ad angolo retto con quella del reticolo, se rettilineo.<sup>1</sup> Si ottengono così figure come quelle della fig. 10 (V. Tav. V) ottenuta nella prova di un obbiettivo aplanetico Zeiss da fotografia ( $f=25$  cm.;  $0/f=1:5$ ) o della fig. 11 per un obbiettivo Ernemann da proiezione ( $f=25$  cm.;  $0/f=1:6$ ) ancora con un reticolo di  $m=10$  tratti per mm. La maggior o minor distanza delle singole frangie riguarda l'aberrazione sferica o zonale, la curvatura è dovuta alla aberrazione cromatica.

Se, per questa, si misurano le distanze  $H_n$  dei vari punti di ogni frangia a partire dall'asse di simmetria della figura, che è la traccia dell'asse del fascio incidente sulla fenditura, se tutto il dispositivo è accuratamente centrato, si può esprimerle in funzione della lunghezza d'onda:

$$H_n = p(\lambda); \text{ e anche } H'_n = q(\lambda)$$

dove  $H'_n$  sono i corrispondenti valori per un'altra fotografia; e si ha analogamente a quanto si è trovato per l'aberrazione sferica:

$$y(\lambda) = \delta : (1 \mp p(\lambda)/q(\lambda)).$$

Nelle figg. 10 e 11 (V. Tav. V) la parte superiore è la fotografia intrafocale, e la inferiore è l'ultrafocale; fra le due corrispondenti posizioni del reticolo correva una distanza di mm. 9,8 per la prima figura e di mm. 7,2 per la seconda.

Evidentemente la sensibilità del metodo cresce colla frequenza del reticolo adoperato; ma c'è un limite dovuto

---

<sup>1</sup> I circolari valgono come i rettilinei, dal momento che se ne isola una tenue striscia.

al fatto, notato fin da principio che le frangie d'ombra sono frangie di interferenza acromatiche dovute alla sovrapposizione dei coni di raggi che partono dai punti  $P, P'$  etc. (fig. 1).

E siccome, perchè ciò sia possibile, è necessario che il raggio  $PH'$  formi coll'asse un angolo  $\alpha$  inferiore che non quello che vi forma il raggio  $PK$ , colla solita approssimazione, si ha subito per la larghezza  $a$  che può avere il tratto di reticolo la relazione

$$a \geq \lambda / 2 \operatorname{sen} \alpha .$$

Dunque il reticolo più fitto che si può adoperare è anche il reticolo più fitto che il sistema è capace di risolvere.

Supponiamo che, provando un sistema ottico col reticolo di massima frequenza, le frangie risultino regolari, per  $y \neq 0$ . Ciò porta come necessaria conseguenza che diminuendo  $|y|$  fino al disotto del valore  $y_m$  dato dalla (3), una mezza frangia deve occupare tutto il campo, il quale così appare uniformemente illuminato o uniformemente oscuro. E siccome ciò significa che il dischetto luminoso  $P$  ha dimensioni<sup>1</sup> trasversali inferiori o uguali alla semilarghezza del tratto di reticolo, si conclude che il sistema ottico in esame è capace di risolvere un tale reticolo, cioè ha il potere risolutivo che teoricamente gli compete.

Dunque un sistema ottico trovato privo di difetti con questo metodo, utilizzato nel massimo della sensibilità, raggiunge effettivamente il massimo grado di perfezione a cui si può aspirare.

---

<sup>1</sup> S' intendono, com'è naturale, sufficientemente piccole le dimensioni della sorgente.

Inoltre, siccome nella (3), se si utilizza il reticolo di massima frequenza, dobbiamo porre:

$$a = \lambda/2 \operatorname{sen} \alpha$$

risulta:

$$y_m = \lambda/8 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha$$

che indica con quale estrema precisione si può individuare il punto  $P$  quando si adoperi reticoli a frequenza sufficientemente elevata.

Questo fatto può essere di grandissima utilità nelle misure di curvature e di distanze focali.

Il metodo può esser adoperato indifferentemente per i sistemi diottrici e catottrici, solo che per questi ultimi, dato che è necessario far l'esame fuori dell'asse, non risulta più adatto a meno che non si tratti di lunghi raggi di curvatura.

## SECONDO METODO.

**Le frangie di combinazione.**

Non ha questo inconveniente un altro metodo, che utilizza *le frangie di combinazione*<sup>1</sup> che si formano quando si vengono a sovrapporre due reticoli.

Tale metodo consiste nel disporre le cose in modo che un reticolo venga a combinarsi o colla propria immagine fornita dal sistema in esame, o coll'immagine di un reticolo opportuno.

Per rendere evidente come dalla forma delle frangie di combinazione che così si formano, si possano dedurre le irregolarità e le aberrazioni, cominceremo collo studiare quale dovrebbe essere il loro comportamento quando il sistema è uno specchio perfettamente sferico; si renderà poi ragione degli aspetti delle frangie quando lo specchio presenta delle irregolarità e infine passeremo allo studio delle lenti e degli obbiettivi, nonchè delle superficie piane e convesse.

Conservando ad  $a$  e a  $m$  i significati fin qui attribuiti, diremo *paralleli* due reticoli quando sono tali i loro piani; e li diremo *centrati* se rettilinei quando i tratti dell'uno

---

<sup>1</sup> A. RIGHI. *Sui fenomeni che si producono colla sovrapposizione di due reticoli e sopra alcune loro applicazioni*. «Nuovo Cimento», T. 21, pag. 203, 1887.

A. R. OCCHIALINI. *Il nonio in nuove forme e nuovi impieghi*. «Rivista d'Ottica e Meccanica di precisione», I, 6, febbraio 1920.

sono paralleli ai tratti dell'altro, se circolari quando i centri loro sono allineati sopra una normale alla loro giacitura.

Limitandoci per ora ai reticoli rettilinei, indicheremo con  $A$  la larghezza e con  $M$  la frequenza delle frangie di combinazione, definite come quelle dei reticoli, e legate quindi dalla relazione

$$M = 1/A.$$

Dovendo parlare di due reticoli, li distingueremo colle notazioni  $R$  e  $R'$ , e indicheremo gli elementi omologhi colle stesse lettere, aggiungendo un apice a quelle relative a  $R'$ .

Dalla sovrapposizione di due reticoli paralleli e centrati risultano delle frangie rettilinee ed equidistanti la cui frequenza  $M$  è una funzione delle frequenze dei reticoli; e precisamente si trova

$$M = m' - m$$

quando si consideri l'analogia esistente fra la formazione delle frangie e il fenomeno dei battimenti, cosicchè la frequenza delle prime dipende da quella dei reticoli, come la frequenza dei secondi da quella delle ondulazioni che si sovrappongono.

Se i reticoli, pur mantenendosi paralleli e centrati, non sono sovrapposti, la formazione delle frangie ha ancor luogo sopra uno schermo su cui arrivi un fascio di raggi luminosi che li abbia attraversati entrambi; se tale fascio è di raggi paralleli, qualunque sia la distanza fra i reticoli e fra questi e lo schermo, le frangie hanno sempre la stessa frequenza, quella cioè che avrebbero se fossero sovrapposti; ma se i raggi passano per un punto  $P$  (fig. 12),  $M$  dipende dalla distanza  $\delta$  fra  $R$  e  $R'$ , dalla distanza  $D$  fra  $P$  e  $R$  e dalla posizione dello schermo  $S$ .

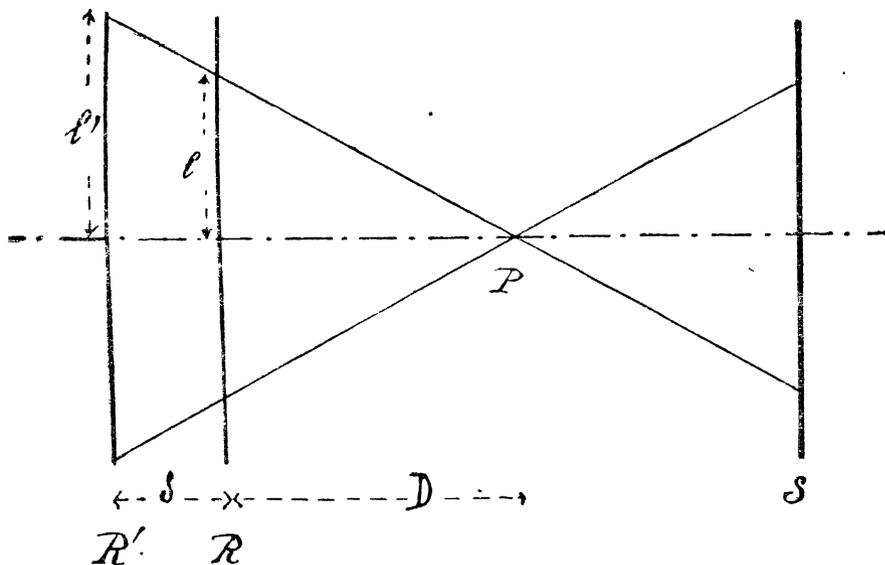


Fig. 12.

Si può eliminare l'influenza di quest'ultimo, del tutto accessoria, considerando, anzichè il valore di  $M$ , quello del rapporto

$$N = m/M = A/a,$$

dove con  $a$  e con  $m$  si indicano la costante e la frequenza della proiezione del reticolo  $R$  sullo schermo.  $N$  indica così quanti tratti di  $R$  in proiezione sono compresi nella larghezza  $A$  di una frangia; numero che rimane sempre lo stesso dovunque si trovi lo schermo.

Il caso in discorso si può riportare a quello in luce parallela, purchè si ammetta che la frequenza di  $R'$  aumenti di mano in mano che aumenta  $\delta$  in modo che il numero dei  $\tau$  tratti contenuti in  $l'$  venga a esser contenuto in un

intervallo uguale a  $l$ : indicando con  $n'$  tale frequenza virtuale, di  $R'$ , ne segue che la frequenza delle frangie è

$$M = n' - m.$$

Limitandoci al caso di  $m = m'$ , si ha per la definizione di  $n'$ :

$$n'l = m'l' = m'l';$$

e poichè d'altronde:

$$l(D + \delta) = l'D$$

si ha subito

$$n' = m(D + \delta) / D$$

e quindi

$$M = m\delta / D, \quad N = D / \delta \quad (6)$$

cosicchè due tali reticoli *in luce convergente* danno frangie di combinazione infinitamente larghe solo quando  $\delta = 0$ .

In realtà, siccome il cono di raggi non può avere un'apertura angolare troppo grande, e i reticoli non possono avere infiniti tratti illuminati, non possiamo realizzare le condizioni per controllare quando effettivamente sia  $N = \infty$ , ma al massimo potremo accorgersi quando  $N$  è il doppio dei  $\tau$  tratti di  $R$  compresi nel cono luminoso perchè allora il campo è o tutto bianco o tutto nero, essendo occupato da mezza frangia, e a tal valore di  $N = 2\tau$  corrisponde un valore di  $\delta$  che è il minimo di cui ci possiamo accorgere

$$\delta_m = D / 2\tau$$

perchè, per valori di  $\delta$  inferiori, i reticoli si comportano come se fossero sovrapposti. Tale limite essenzialmente dipende dalla frequenza del reticolo e dalla semiapertura angolare  $\alpha$  del cono luminoso; invero si ha

$$\delta_m = 1 / 4m \operatorname{tg} \alpha.$$

Di mano in mano che  $\delta$  assume valori superiori a questo minimo,  $N$  diminuisce, cioè le frangie si serrano, dapprima rapidamente, poi più adagio, perchè

$$d\delta = -D dN / N^2 \quad (7)$$

cosicchè la sensibilità alle variazioni di  $\delta$  cresce proporzionalmente al quadrato di  $N$ .

Dunque dall'esame delle frangie si può decidere della coincidenza di due reticoli a meno della grandezza  $\delta_m$ , e si possono apprezzare variazioni nella loro distanza più o meno piccole a seconda delle circostanze.

Della coincidenza si può giudicare con precisione anche maggiore ricorrendo all'effetto di parallasse, che assume un aspetto nuovo e molto notevole per il comportamento delle frangie di combinazione. Quando di due reticoli  $R$  e  $R'$  sovrapposti, uno, per es.  $R'$ , si sposta in direzione normale ai tratti, pur rimanendo a contatto con  $R$  le frangie, che si formano per essere  $m \neq m'$ , si spostano nella stessa direzione ma con una velocità  $N'$  volte più grande di quella di  $R'$ , perchè quando il reticolo ha percorso il tratto  $a'$ , la frangia, dovendo occupare la posizione che prima occupava la successiva, deve essersi spostata di  $A$ .

Se i due reticoli distano di un tratto  $\delta$  pur rimanendo paralleli e centrati, lo scorrimento relativo che appare a chi li guarda spostando la visuale trasversalmente in direzione normale ai tratti, deve produrre gli stessi effetti come lo spostamento effettivo di  $R'$  rispetto a  $R$  nel caso precedente; onde l'osservatore vede spostarsi le frangie in modo molto più cospicuo che non i tratti del reticolo. Dalla fig. 13 segue subito che lo spostamento  $s$  apparente del reticolo è

$$s = \delta \operatorname{tg} \varphi$$

onde il conseguente spostamento delle frangie  $S$  è

$$S = N' \delta \operatorname{tg} \varphi.$$

Ma se il punto di osservazione è vicino, il valore di  $N'$  viene alterato perchè vi è  $\delta$  e anche perchè è difficile che la distanza fra il punto di vista e  $R$  rimanga costante. Se poi i due reticoli sono identici, in via approssimata, tra-

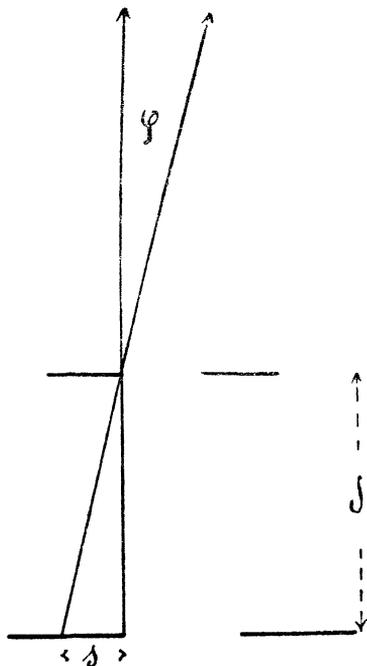


Fig. 13.

scurando queste complicazioni di ordine superiore, che del resto contribuiscono a migliorare la sensibilità, si può porre

$$\delta = S/N \operatorname{tg} \varphi.$$

Il minimo di  $\delta$  può assumere valori piccolissimi; infatti se si ammette di poter apprezzare un  $S$  pari alla larghezza

$a$  di un tratto di reticolo, il minimo di  $\delta$ , avendosi quando tale spostamento si raggiunge colla massima possibile rotazione della visuale  $\varphi_M$ , risulta

$$\delta_m = 1 / mN \operatorname{tg} \varphi_M.$$

Le proprietà studiate valgono anche per i reticoli circolari purchè paralleli e centrati; in tal caso le frangie risultano cerchi concentrici ed equidistanti; altrimenti si hanno frangie come quelle delle figg. 14 e 15 (V. Tav. VI), di cui la prima mostra l'effetto della scentratura in reticoli identici e sovrapposti,<sup>1</sup> la seconda in reticoli a frequenza diversa e sovrapposti, o identici e non sovrapposti.

I criteri per giudicare della coincidenza dei piani dei reticoli risentono in maniera diversa della nuova forma; così l'effetto di parallasse è molto agevolato perchè l'inclinazione della visuale porta a una scentratura con deformazione delle frangie; mentre l'osservazione della frequenza di queste risulta la metà meno sensibile che non coi rettilinei, a parità di area e di frequenza, perchè la simmetria rispetto al centro produce l'effetto di ridurre a metà il numero totale dei tratti. Le due specie di reticoli presentano, a seconda dei casi, vantaggi e inconvenienti che segnaleremo volta per volta.

Diciamo subito che la maniera più semplice per l'esame in luce convergente è di guardare uno sfondo chiaro attraverso i reticoli, assai vicini all'occhio; per cui colla frase: osservazione da un punto vicino, intenderemo alludere a questo procedimento.

---

<sup>1</sup> Le linee medie di tali frangie sono archi di iperbole.

### Specchi sferici.

Quando un reticolo con  $\tau$  tratti si trova in un piano di fronte vicino al centro di curvatura di uno specchio concavo, perfettamente sferico, viene a trovarsi a piccola distanza dalla sua immagine che è ancora un reticolo con  $\tau$  tratti; e siccome i raggi che concorrono alla formazione di tale immagine passano anche attraverso il reticolo e quindi possono essere raccolti sopra uno schermo o osservati da un punto qualunque (che prenderemo sempre sull'asse), si vengono a realizzare le condizioni perchè si formino le frangie come fra due reticoli non sovrapposti. Tale formazione è dovuta a due cause contemporaneamente:

- 1.) la diversità delle frequenze dei due reticoli;
- 2.) l'osservazione da un punto più o meno vicino.

Nel caso generale gli effetti si sovrappongono; ma dato che ci dobbiamo riferire di prevalenza a quelle posizioni del reticolo per cui la distanza dal centro è piccolissima, è facile dimostrare che la prima causa diventa trascurabile di fronte alla seconda.

Infatti se  $\eta$  è la distanza del reticolo materiale  $R$  dal centro dello specchio, e  $\eta'$  quella dell'immagine  $R'$ , chiamando  $f$  la distanza focale, si ha subito

$$\eta' = (f + \eta) ; m / m' = \eta' / \eta.$$

Se quindi osserviamo i due reticoli da un punto molto lontano, in modo da poter considerar paralleli i raggi che si intercettano, abbiamo

$$N = f / \eta$$

e anche

$$\eta = f' / N.$$

Il minimo di  $\eta$  si percepisce quando  $N=2\tau$ .

$$\eta_m = f/2\tau.$$

Dunque per tutte le posizioni del reticolo comprese nell'intervallo  $(+\eta_m, -\eta_m)$  il campo, osservato da un punto lontano, appare uniforme cioè è nullo l'effetto della prima causa: agli effetti delle frangie possiamo dunque porre

$$m = m', \text{ quindi anche } \eta = \eta'.$$

Ma in tale intervallo appaiono ancora frangie se si osserva da un punto  $P$  alla distanza  $D$  dal reticolo più vicino, (supponiamo  $R$ ), colla legge (6) ponendo  $\delta = 2\eta$ ; onde

$$N = D/2\eta \quad (8)$$

e in questo caso il nuovo  $\eta_m$  percettibile, avendosi ancora quando  $N=2\tau$ ,

$$\eta_m = D/4\tau$$

risulta dipendente da elementi del tutto in nostro arbitrio, e quindi può esser ridotto piccolo fino al punto in cui non si urta contro difficoltà tecniche.

Rimane così dimostrato che delle due cause che producono le frangie la prima cessa di agire assai più presto della seconda, onde, volendo accorgersi di piccole distanze fra il reticolo e la propria immagine, fa d'uopo ricorrere all'osservazione da un punto vicino.<sup>1</sup>

È opportuno notar subito che  $\eta_m$  può anche esprimersi

$$\eta_m = 1/8 m \operatorname{tg} \alpha,$$

dove  $\alpha$  è la semiapertura angolare dello specchio; onde volendo ridurre piccolo il suo valore, l'unico mezzo, una

---

<sup>1</sup> Quando entrambe le cause agiscono simultaneamente si ha

$$N = Df/\eta^2 + D\eta + 2f\eta.$$

volta data l'apertura, è di aumentare la frequenza del reticolo.

In molti casi si può usufruire dell'effetto di parallasse; e allora il minimo di  $\eta$ , se poniamo  $\varphi_M = 2\alpha$  circa, risulta espresso approssimativamente da

$$\eta_m = 1/2 mN \operatorname{tg} \alpha.$$

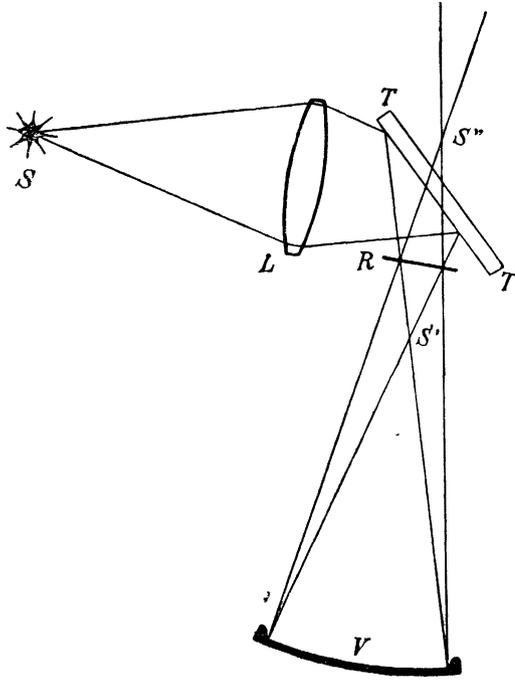
Concludiamo che sia coll'osservazione delle frangie da un punto vicino al reticolo, sia mediante l'effetto di parallasse, si può decidere quando il piano del reticolo dista dal centro meno di una certa quantità  $\eta_m$  che può esser ridotta piccolissima usufruendo di reticoli sufficientemente frequenti; onde si può senz'altro affermare che a meno di un piccolissimo errore si può giudicare quando il reticolo contiene il centro nel proprio piano.

Le formule succitate valgono per reticoli paralleli e centrati, cioè se rettilinei basta che siano normali all'asse; se circolari debbono inoltre aver sempre il centro sull'asse, il quale allora per  $N = \infty$  coincide col centro dello specchio.

In pratica, se il raggio di curvatura dello specchio è assai piccolo, (15-20 cm. circa), basta sostenere il reticolo nella giacitura opportuna con un corsoio, provvisto di viti micrometriche, e guardando a occhio nudo verso lo specchio, si vedono sullo sfondo di questo le frangie, tanto più frequenti quanto più grande è la distanza fra il reticolo e il centro; e si vedono scomparire, cioè diventare infinite, solo quando questa è inferiore al limite derivante dall'apertura, dalla frequenza, e dalla posizione del punto di osservazione.

Se il raggio è molto lungo occorre illuminare il reticolo, e un dispositivo può esser quello della fig. 16, dove una lastra di vetro a faccie piane e parallele  $TT$  devia i

raggi provenienti da un condensatore  $L$ . Perchè dal punto di osservazione  $S''$  si veda il campo illuminato completamente, conviene far convergere i raggi del condensatore nel punto  $S'$  tra lo specchio in esame e il suo centro; ve-



*Fig. 16.*

nendosi così il reticolo a trovare circa a metà strada fra  $S'$  e  $S''$ . Se la luce è troppo intensa, giova interporre un vetro smerigliato fra  $L$  e  $TT$ , con che riesce anche molto comodo l'impiego dell'effetto di parallasse.

Se la sorgente  $S$  fosse puntiforme e il condensatore  $L$  privo di aberrazioni sull'asse, il cono di raggi posteriori a  $S''$  potrebbe essere raccolto sopra uno schermo o una lastra fotografica e si avrebbe così anche una fotografia

delle frangie, nella quale il numero  $N$  si legge molto facilmente perchè, immersi nelle frangie, si vedono anche i tratti del reticolo come mostrano le figg. 14 e 15 (V. Tav. VI). Ma per ottenere una sufficiente nitidezza occorre completare il dispositivo come mostra la fig. 17, dove  $S$  è un forellino sottilissimo, di cui l'obbiettivo  $L$  fornisce l'immagine  $S'$  fra lo specchio in esame e il suo centro. Un secondo forellino è necessario dove si forma il concentramento di raggi  $S''$ ;

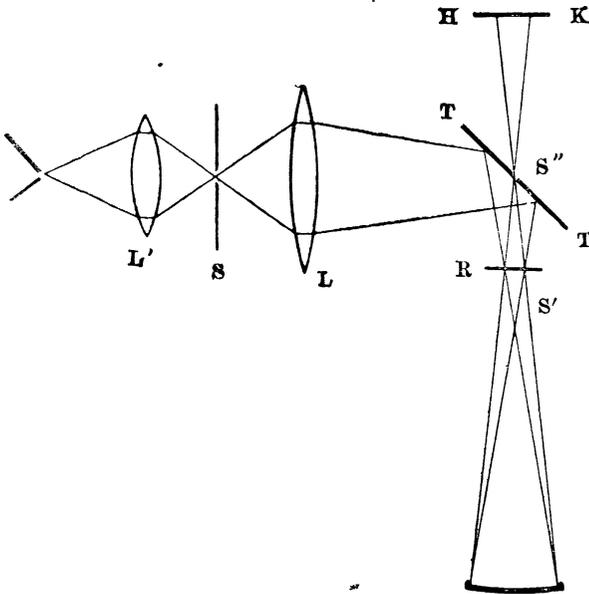


Fig. 17

ed è comodo praticarlo, come mostra la figura, nell'argen-  
tatura di uno specchio che sostituisce la lastra  $TT$ , potendo  
così usufruire della maggior parte della luce e ridurre al  
minimo la distanza  $D$  fra  $S''$  e  $R$ .

Questo secondo forellino  $S''$  è una parte essenziale, e  
solo se ne può fare a meno quando il cammino dei raggi

è così regolato che si comportano come se ci fosse; guardando a occhio, la pupilla ne tiene il posto, ma anche allora la presenza di un foro artificiale più minuto<sup>1</sup> rende più nitide e precise le osservazioni.

È fondamentale notare che la presenza di questo forellino *selettore* discosto dal centro di curvatura fa sì che ad ogni elemento dello specchio corrisponda un elemento nella figura che si forma sullo schermo, cosicchè sopprimendo una porzione del primo viene soppressa anche una porzione simile nella seconda.

Possiamo dopo queste premesse togliere l'ipotesi che lo specchio sia sfericamente perfetto, perchè le regole che abbiamo dedotto, in tal caso continuano a valere, purchè si applichino a ciascuna porzione considerata isolatamente; per ognuna essendo lo stesso il valore di  $D$ , ma diversi i valori di  $f$  e di  $\eta$ , in quanto non coincidono i relativi centri di curvatura, avremo, per una data posizione del reticolo, diversi valori di  $N$ . Quando uno specchio affetto da irregolarità è esaminato col dispositivo della fig. 17, sullo schermo  $HK$  non appare più un unico sistema di frangie con frequenza costante, ma ad ogni centro di curvatura corrisponde un sistema con frequenza diversa, e tale sistema lo si vede in quella porzione di figura che corrisponde alla porzione di specchio che ha quel centro. Perciò la frequenza è unica quando il centro è unico, e viceversa; altrimenti tante sono le frequenze nelle varie parti del campo quanti sono i centri di curvatura. Dunque da un semplice esame della figura che appare sullo schermo si deduce lo stato della superficie riflettente.

---

<sup>1</sup> Il forellino deve però permettere il passaggio almeno degli spettri secondari di primo ordine, che per diffrazione attraverso il reticolo si formano ai lati dell'immagine centrale.

Osservando a occhio si vede ogni sistema di frangie sullo sfondo della porzione di specchio che lo ha generato.

Volendo misurare le distanze fra un centro e l'altro, *misurare cioè le irregolarità*, si può leggere su uno schermo o su una fotografia il numero  $N$  corrispondente a ciascuna frequenza e dedurne i corrispondenti valori di  $\eta$ , cioè le distanze dal piano del reticolo; ma per irregolarità forti è più pratico far scorrere il reticolo stesso lungo l'asse in modo da portarlo a coincidere coi vari centri, e poichè, come abbiamo visto, possiamo a meno di un errore piccolissimo  $\eta_m$  giudicare quando un centro di curvatura giace nel reticolo, osservando quando le frangie diventano infinitamente larghe, si conclude che il reticolo contiene il centro di curvatura di una porzione dello specchio tutte le volte che scompaiono le frangie nella corrispondente porzione di figura sullo schermo. Cosicchè spostando il reticolo lungo l'asse vediamo variare in modo diverso le diverse frequenze, e ognuna diminuisce, si annulla e torna a crescere a seconda che il reticolo si avvicina al centro *corrispondente*, lo contiene nel proprio piano, oppure se ne allontana. Se il movimento avviene lungo un corsoio graduato, si misura senz'altro la distanza fra i vari centri.

Se le porzioni sono zone circolari si deduce in tal modo la misura degli errori zonali; in pratica la cosa riesce un po' più complicata perchè, avendosi un passaggio graduale da una zona all'altra, anche i sistemi di frangie non sono nettamente separati, ma si passa con continuità da uno all'altro.

Quanto si è detto vale per reticoli rettilinei e circolari, purchè questi ultimi si intendano centrati. I primi sono preferibili per un esame rapido e per rivelare piccole irregolarità, perchè, traducendosi la variazione della frequenza

in una distorsione delle frangie, è molto facile notarla anche quando è piccolissima, tanto più perchè esiste la falsa riga dei tratti del reticolo; e l'esame è molto rapido perchè in qualunque posizione (normale all'asse) il reticolo è centrato. Ma quelli circolari, seppure si prestano meno bene a far risaltare a occhio errori zonali piccolissimi, e per quanto esigano una continua e accurata centratura che richiede delicati movimenti micrometrici, rispondono meglio allo scopo di compiere *misure*. D'altra parte meglio di quelli rettilinei servono a rivelare variazioni di curvatura da un meridiano all'altro della stessa zona, perchè ciò si traduce in un'alterazione della forma circolare delle frangie che si nota benissimo sulla falsa riga dei tratti del reticolo. Cosicchè se una zona avesse un massimo e un minimo di curvatura secondo due diametri ad angolo retto, le frangie avrebbero andamento ellittico coll'asse maggiore ora in una direzione ora a  $90^0$  con questa a seconda che il centro del reticolo è più vicino al centro di massima o di minima curvatura.

Se poi una zona non fosse coassiale colle altre, mal ci se ne avvedrebbe coi reticoli rettilinei, mentre quelli circolari, che se son centrati per questa non lo son per le altre, ne danno una prova sensibilissima e permettono di misurare la distanza fra le traccie dei due assi sul piano del reticolo, con semplice spostamento laterale di questo.

I reticoli rettilinei richiedono una particolare attenzione quando lo specchio ha errori zonali, perchè avendo un comportamento leggermente diverso parallelamente ai tratti che non ad angolo retto, dalla forma delle frangie si potrebbe desumere una variazione di curvatura da un meridiano all'altro delle zone; infatti le porzioni in cui la frequenza è costante appaiono, invece che circolari, leg-

germante ellittiche, coll'asse maggiore parallelo ai tratti; ma che l'effetto non è dovuto allo specchio si dimostra subito ruotando il reticolo nel proprio piano, perchè le ellissi ruotano insieme.

La sensibilità del metodo dipende dalla sensibilità del reticolo alle variazioni di  $\eta$ , e, per la (7), risultando in valore assoluto

$$d\eta = D dN / N^2,$$

si deduce che il massimo si ha quando le frangie sono le più larghe possibili, e può darsi che uno specchio giudicato perfetto quando  $N$  è ancora piccolo, risulti affetto da irregolarità, aumentando  $N$ , col semplice avvicinare il reticolo ai centri.

Se  $l$  è la larghezza di reticolo *illuminato*, il numero dei tratti impegnati è

$$\tau = lm$$

e quindi il massimo si ha quando è  $N = 2lm$ ; per cui

$$d\eta = D dN / 8l^2 m^2 = dN / 16lm^2 \operatorname{tg} \theta,$$

dove  $\theta$  è la metà dell'angolo sotto cui dal punto di osservazione o dal foro selettore si vede lo specchio. Dunque la sensibilità cresce coll'apertura dello specchio e colla larghezza del reticolo  $l$ ; ma soprattutto dipende da  $m$ .

Del resto questo è il fattore di cui si deve tenere il massimo conto, anche perchè gli altri due sono così collegati che, per uno stesso specchio, non si può aumentare  $\theta$  senza diminuire  $l$ ; il massimo utile corrisponderebbe a  $D = 2f$ , e quindi  $l$  metà del diametro dello specchio stesso; ma realizzare queste condizioni, mentre può esser difficile dal punto di vista tecnico, può portare degli inconvenienti dal punto di vista ottico perchè un tale reticolo può es-

sere troppo esteso per non dar luogo a fenomeni di distorsione, che a lor volta appaiono enormemente accresciuti nelle frangie. Si noti anche che la sensibilità massima così calcolata corrisponde al caso in cui lo specchio è così vicino alla perfezione da permettere a mezza frangia di occupare tutto il campo o quasi; se esistono irregolarità più notevoli,  $N$  non può più assumere valori vicini a  $2\tau$ , e quindi la sensibilità diminuisce, ma allora non c'è più bisogno del massimo.

Quando la sorgente di luce è puntiforme, come nel dispositivo della fig. 17, lo schermo può essere lo stesso reticolo, e infatti su questo si vedono le frangie, identiche, a parte le dimensioni, a quelle che si vedrebbero sopra un altro schermo qualunque dietro il foro selettore; ma quando la sorgente è estesa, mentre dietro il foro stesso diminuisce un po' la nitidezza dei contorni, le figure sul piano del reticolo, non risentendo più dell'azione selettiva del forellino, risultano confuse e sfumate, tanto più quanto maggiore è la distanza fra il reticolo e il centro, nel caso che lo specchio ne abbia uno solo. Allora questo nuovo sistema di frangie che son dovute all'immagine, seppure si può chiamar così, *più o meno sfocata che si forma sul piano del reticolo*, risulta uguale al sistema che appare attraverso il foro selettore *solo* quando il reticolo contiene il centro nel proprio piano, e, per distinguerle, chiameremo *fisse* le nuove frangie, volendo indicare la loro genesi per cui non sono soggette all'effetto di parallasse, mentre chiameremo *visuali* quelle di cui abbiamo trattato sempre, per indicare che per vederle è sufficiente guardare a occhio nudo verso lo specchio.

Se lo specchio è affetto da irregolarità, mentre le frangie visuali hanno il comportamento innanzi esposto, quelle fisse

non hanno importanza, e ciò in virtù della profonda differenza che esiste nella loro genesi. Queste infatti risentono degli errori dello specchio solo in quanto i raggi che riflessi da *tutti* (essendo la sorgente estesa) *i punti della sua superficie*, dovrebbero, convergendo in un punto, formare un dischetto circolare di dimensioni piccolissime, formano un dischetto o più largo o deformato. Ne segue che le frangie fisse non si formano più secondo le regole stabilite, ma sono sempre o sfumate o irregolari, e il massimo di nitidezza corrisponde alla posizione di massimo concentramento dei raggi, ma non può dare alcun indizio sulla dislocazione dei centri di curvatura delle varie zone.

Può anche darsi che il reticolo non sia perfetto, entro i limiti richiesti; e cioè o non abbia frequenza costante o abbia i tratti deformati. Tali imperfezioni hanno un notevole effetto sulle frangie fisse per il fatto che l'immagine è rovesciata rispetto all'oggetto, a cui va a sovrapporsi; quelle visuali possono apparire non più perfettamente circolari o rettilinee, e invece di scomparire quando dovrebbero, presentano un massimo di larghezza; ma in ogni caso ci si può assicurare che le deformazioni non dipendono dallo specchio, perchè ruotando il reticolo nel proprio piano, anche queste ruotano con lui.

### **Specchi parabolici.**

Il metodo delle frangie di combinazione, che utilizza le proprietà del centro di curvatura di uno specchio, mal si presta in generale per lo studio degli specchi parabolici, che soprattutto dovrebbero essere studiati nel fuoco. Si può tuttavia fare un'utile applicazione nel caso di piccole aperture angolari, per le quali si può supporre che i centri

delle varie zone siano ancora sull'asse. Allora lo studio di uno specchio parabolico coincide con quello di uno sferico con errori zonali, e tutto sta a constatare che la deviazione dalla sfera è quella che deve essere.

Se, come indica la fig. 18,  $C$  è il centro di curvatura nel vertice della parabola  $AVA$ , sezione meridiana dello

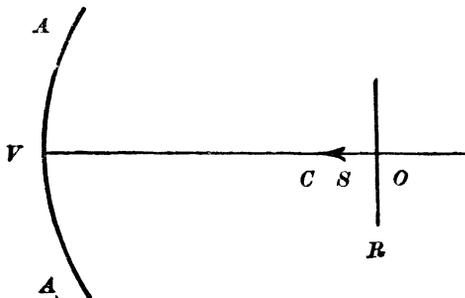


Fig. 18.

specchio, e  $S$  quello della zona periferica, il centro di curvatura della zona elementare generica dista da  $C$  della quantità  $y^2/2r$ , dove  $r = CV$  e  $y$  la distanza dall'asse di un punto qualunque della zona considerata.

Ponendo un reticolo circolare  $R$  col centro in  $O$ , e chiamando  $\eta_M$  la distanza  $CO$ , la distanza  $\eta$  dal centro della zona elementare generica è

$$\eta = \eta_M - y^2/2r$$

e quindi per la (8)

$$N = rD / (2r\eta_M - y^2).$$

In particolare se il centro del reticolo è in  $C$ ,  $\eta_M = 0$  e

$$N = rD / y^2,$$

per cui il numero  $N$  risulta inversamente proporzionale al quadrato della distanza  $y$  della zona dall'asse; e poichè per  $y = 0$  si ha  $N = \infty$  com'era da prevedersi, si può giu-

dicare quando  $\eta_{11}=0$  dal fatto che le frangie debbono avere la massima larghezza al centro del campo.

Se il centro del reticolo è in  $S$ , si ha  $N=\infty$  per  $y^2=2r$  cioè al bordo, e le frangie si vanno stringendo verso il centro. Quando non si ha questo comportamento, la ragione è da ricercarsi in irregolarità dello specchio, che si possono dedurre e misurare colle note regole.

Con un reticolo rettilineo, dalla forma e dalla regolarità delle frangie, si può con molta precisione giudicare del grado di bontà dello specchio.

### **Lenti e sistemi convergenti.**

I reticoli servono a rivelare e a misurare le aberrazioni e le irregolarità delle lenti secondo gli stessi principii che sono stati sviluppati per gli specchi sferici concavi. L'analisi delle aberrazioni assiali (sferica e cromatica) e delle irregolarità segue le stesse regole già enunciate; e si può procedere in due modi; o sovrapponendo lo spazio oggetto allo spazio immagine mediante uno specchio piano posto dietro la lente; oppure mantenendo distinti i due spazii e sdoppiando il reticolo, esaminando cioè la sovrapposizione di uno coll'immagine di un altro identico, posti entrambi nei punti cardinali dell'asse principale. Per il primo caso supporremo lo specchio esente da ogni errore, entro i limiti che ci sono necessarii e che definiremo tra breve; possiamo però ritenere sempre realizzata questa condizione usufruendo della superficie pulita di una bacinella di mercurio. Il dispositivo da impiegarsi è quello stesso della fig. 17 dove allo specchio concavo è sostituito il sistema lente più specchio piano. La sorgente di luce, in linea generale, deve essere monocromatica, e, per un esame completo, devesi di-

sporre di varie lunghezze d'onda; in qualche applicazione, come vedremo, è utile la luce bianca.

Per l'esame nei punti cardinali si può far l'osservazione a occhio e allora oltre i due reticoli non necessita che la sorgente di luce monocromatica e un banco su cui misurare gli spostamenti; ma volendo fare osservazioni precise ed eventualmente fotografie, occorre anche in questo caso

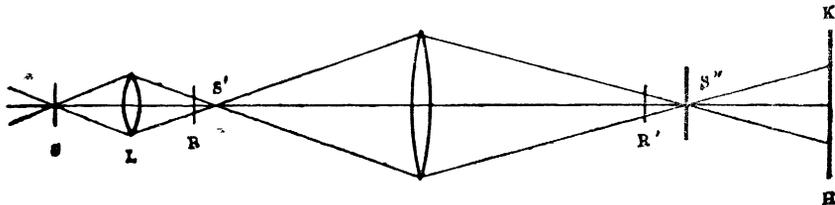


Fig. 19.

ridurre puntiforme la sorgente e introdurre il foro selettore dietro il secondo reticolo, come mostra la fig. 19.

Una volta individuati i punti cardinali<sup>1</sup> per una zona e una lunghezza d'onda, per misure grossolane si può tener fisso il reticolo oggetto e spostare solo quello di confronto; ma per misure precise si debbono far compiere a entrambi spostamenti simmetrici rispetto alla lente in esame; come si può ottenere mediante una vite di passo costante ma destrorsa da una parte e sinistrorsa dall'altra.

L'esame può farsi analogamente in un punto qualsiasi dell'asse principale, purchè le frequenze dei reticoli siano in opportuno rapporto.

Entrambi i dispositivi, con opportune modificazioni, servono anche a studiare *il campo* di una lente o di un ob-

<sup>1</sup> L'esame delle sole frangie visuali può portare a degli equivoci, che scompaiono del tutto esaminando anche le frangie fisse o applicando l'effetto di parallasse.

biettivo; e per veder come, passeremo in rivista le principali aberrazioni di un sistema convergente, indicando per ciascuna i metodi di rivelazione e di misura, quando il sistema è *esente da tutte le altre*.

**ABERRAZIONE DI SFERICITÀ.** — Le frangie visuali coi reticoli circolari centrati appaiono cerchi concentrici con frequenza variabile da zona a zona e a seconda della posizione del reticolo, colle stesse leggi come per gli specchi sferici concavi. Analogamente per i reticoli rettilinei. La misura dell'aberrazione si ottiene molto più rapidamente coll'esame nel fuoco che non nei punti cardinali.

**ABERRAZIONE CROMATICA ASSIALE.** — Le frangie visuali, con entrambe le specie di reticoli, appaiono cerchi o rette con frequenza diversa a seconda della lunghezza d'onda della luce impiegata; gli spostamenti che deve subire il reticolo perchè al variar di questa rimanga inalterata la frequenza delle frangie danno la misura dell'aberrazione, e riportati in ordinate sulle corrispondenti lunghezze d'onda come ascisse forniscono la « curva di colore ». Se l'esame vien fatto in luce bianca, i vari sistemi di frangie che si formerebbero successivamente per una stessa posizione del reticolo, quando si inviassero luci monocromatiche, vengono a sovrapporsi; e in generale rendono il campo uniformemente grigiastro, ma con obbiettivi acromatici, essendo piccola la differenza tra l'uno e l'altro, fanno apparire le frangie iridate con una successione di colori che dipende dalla forma della curva di colore; in tal caso dall'esame in luce bianca si può apprezzare globalmente l'entità dell'aberrazione. È opportuno notare la sensibilità del metodo: siccome si possono avvertire variazioni di distanza focale dell'ordine del  $1/100$  e anche del  $1/1000$  di mm., le frangie in luce bianca riuscirebbero incolore solo quando l'obbiettivo

in esame avesse un'aberrazione cromatica contenuta *tutta* in quei limiti, rimanendo nel campo dello spettro visibile; e siccome questo non è stato ancora ottenuto da nessun costruttore, con opportuni reticoli, le frangie appaiono sempre iridate. Facendo cadere le frangie in luce bianca sulla fenditura di uno spettroscopio, in modo che la dispersione di questo sia parallela agli elementi di tratto di reticolo (tanto rettilineo quanto circolare) non intercettati dal metallo della fenditura, si ha uno spettro composto di un reticolo rettilineo come sfondo su cui spiccano le frangie, più o meno curvate a seconda dell'entità dell'aberrazione cromatica in esame. Da una di queste fotografie è facilissimo dedurre  $N$  in funzione della lunghezza d'onda.

ASTIGMATISMO. — Si dispongono i reticoli come nella fig. 20: se sono circolari e centrati si notano in corrispondenza della zona osservata frangie visuali con andamento

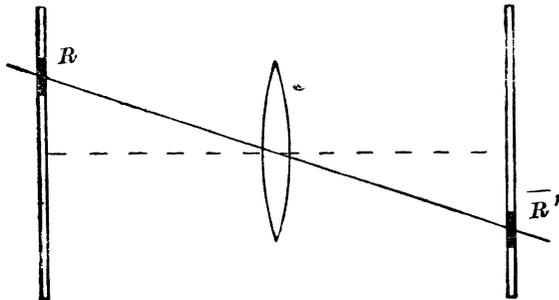


Fig. 20.

ellittico, coll'asse maggiore ora in un senso, ora in un altro a seconda che il reticolo è più vicino all'una o all'altra focale. Quando l'inclinazione dei raggi luminosi sull'asse principale è grande o i reticoli molto sensibili o molto estesi, si nota una dissimetria laterale nelle frangie dovuta al fatto che l'astigmatismo varia già sensibilmente anche

nella porzione di campo utilizzata. Possono analogamente servire anche i reticoli rettilinei, ma meno bene. L'aberrazione può essere studiata in tutto il campo disponendo due guide come nella figura.

ABERRAZIONE CROMATICA OBLIQUA. — Vale ancora il dispositivo della fig. 20. Siccome si dice che una lente ne è affetta quando il fuoco di tutte le zone (unico per la supposta assenza delle altre aberrazioni) sull'asse secondario considerato, a seconda della lunghezza d'onda, si trova più o meno spostato lateralmente, quando il reticolo è centrato per una data luce non lo è più per le altre: quindi le frangie visuali risultano cerchi concentrici solo per quella lunghezza d'onda per cui il reticolo è centrato e per le altre si hanno le figure caratteristiche dello scentramento più o meno accentuate. Siccome poi le distanze dei vari fuochi sono piccolissime, tali figure sono ancora approssimativamente sistemi di cerchi e così in luce bianca si vedono molti di questi sistemi leggermente spostati gli uni rispetto agli altri, ciò che porta a una dissimmetrica distribuzione dei colori. Mediante spostamenti laterali del reticolo si può ottenere la centratura perfetta colle varie lunghezze d'onda e così misurare l'aberrazione. I reticoli rettilinei coi tratti normali alla congiungente il reticolo coll'asse principale, danno, in luce bianca, sistemi di frangie rettilinee di vario colore leggermente spostati gli uni rispetto agli altri, in modo che ne risulta, come sopra, una asimmetrica estensione e distribuzione delle parti colorate del campo; se poi l'aberrazione fosse notevole, il campo apparirebbe uniforme.

COMA. — Col dispositivo della fig. 20 e coi reticoli circolari il coma viene ancora rivelato dalle frangie visuali. Siccome avviene ora per le diverse zone quello che nel caso precedente avveniva per le diverse lunghezze d'onda,

è quindi analogo il comportamento delle frangie. E cioè: per una certa posizione del reticolo appaiono frangie visuali centrate per una zona e non centrate per le altre; spostando il reticolo in modo da allontanarlo dall'asse vengono a centrarsi le frangie di altre zone e cessano di esserlo quelle di prima: lo spostamento che deve subire il reticolo per passare dalla posizione in cui sono centrate le frangie della zona centrale a quella in cui lo sono le frangie della zona esterna è la misura del coma in quel piano e per quell'inclinazione sull'asse. Quando il coma è piccolo le frangie visuali appaiono tanti cerchi o figure quasi circolari, ma non concentriche. Coi reticoli rettilinei le frangie hanno sempre la stessa frequenza, ma quelle di una zona spostate rispetto a quelle di un'altra. È opportuno rimarcare che tale apparenza richiede *l'assenza completa dell'aberrazione sferica sull'asse principale*.

**DISTORSIONE.** — Si deduce dall'esame delle frangie fisse quando i reticoli abbiano dimensioni tali da abbracciare tutto il campo oppure siano mobili su sostegni e guide che permettano di spostarli in tutte le posizioni. Coi reticoli rettilinei si manifesta come una flessione delle frangie; con quelli circolari centrati sull'asse principale si traduce in una variazione di frequenza dal centro ai bordi. Diaframmando opportunamente si può studiare come varia la distorsione da zona a zona.

**CURVATURA DEL CAMPO.** — Collo stesso dispositivo che serve per l'esame della distorsione si può determinare la curvatura del campo; e poichè in seguito a questa aberrazione l'immagine del reticolo oggetto, essendo una certa superficie a forma di calotta, non può coincidere col reticolo di confronto, uno qualunque dei metodi che servono per giudicare della coincidenza di due reticoli, e in particolare

l'effetto di parallasse, col suo comportamento differenziale tra le varie parti del campo ci mette in grado di determinare le coordinate della superficie immagine rispetto al piano del reticolo confronto.

Questo per le aberrazioni quando il sistema ne presenta una sola. Se ne coesistono varie, come di solito, è sempre possibile, per quanto le frangie assumano aspetti più complicati, scindere le varie cause che li producono.

Evidentemente le aberrazioni cromatiche non possono essere confuse nè fra loro nè colle altre, e continuano a manifestarsi nella stessa maniera qualunque sia l'andamento dei raggi.

Lo stesso dicasi della distorsione, per la quale soltanto si esaminano le frangie fisse, e della curvatura del campo, che eventualmente può richiedere la diaframmatatura per scindere l'azione delle varie zone.

L'astigmatismo, caratterizzato della forma ovale delle frangie visuali, continua a manifestarsi così comunque commisto ad altre aberrazioni, sia sull'asse sia fuori; ed il coma non può confondersi coll'aberrazione di sfericità perchè questa riguarda solo l'asse principale; ma uno speciale esame è però utile quando sono presenti entrambi.

Nel caso già esaminato in cui è zero l'aberrazione di sfericità, e quindi varia al variar delle zone soltanto la lunghezza focale equivalente, è sufficiente l'esame in un piano come si è indicato. Nel caso in cui è *soddisfatta la condizione del seno* ( $h/senu = cost.$ ) l'aberrazione sferica non è nulla ed è invece zero la variazione della lunghezza focale equivalente, ma il coma esiste tuttora; in tal caso l'esame mediante i reticoli richiede un movimento parallelo all'asse principale e le frangie visuali sono soggette contemporaneamente alla scentratura variabile in virtù del

coma e alla variazione di frequenza in virtù dell'aberrazione sferica. Spostando quindi il reticolo parallelamente all'asse principale, in ogni posizione vi deve essere una zona in corrispondenza della quale le frangie visuali sono infinite e centrate e non lo sono più appena il reticolo si sposta e tanto meno quanto più si allontana da quella posizione. Quando invece è soddisfatta la condizione  $h/\text{sen } u - f = 0$ , cioè nè l'aberrazione di sfericità, nè la variazione zonale della lunghezza focale equivalente sono zero, ma sono regolate in modo che il coma resta distrutto, spostando il reticolo in modo che il suo centro rimanga sempre sull'asse secondario in esame, si devono vedere frangie visuali circolari e concentriche con variazioni di frequenza analoghe a quelle che si verificano nell'esame dell'aberrazione sferica sull'asse principale.

Quando quest'apparenza è verificata, il sistema in esame è senza dubbio esente da coma (e anche da astigmatismo) nei limiti della sensibilità dei reticoli adoperati. Si richiede la luce monocromatica; le eventuali variazioni colle varie lunghezze d'onda si riferiscono all'aberrazione cromatica obliqua.

Le aberrazioni oblique si possono rivelare e studiare anche nel piano focale, disponendo uno specchio dietro alla lente, come nella fig. 21, e due reticoli identici e complanari

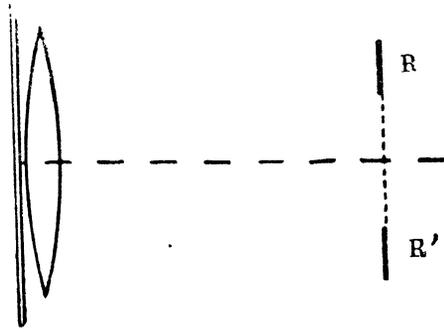


Fig. 21.

in modo che l'immagine di uno vada a finire sopra l'altro; solo che così la misura riesce assai complicata per il fatto che i raggi luminosi attraversano due volte il sistema, e non sempre attraverso le stesse zone. Ma se si vuol semplicemente costatare la presenza delle aberrazioni, è molto più rapido e comodo questo dispositivo che non l'altro finora descritto.

Questo per le aberrazioni: se poi il sistema è affetto da irregolarità in una maniera qualsiasi, benchè queste manchino del tutto anche in lenti di mediocre valore, l'irregolarità e la cattiva centratura delle frangie visuali sull'asse principale ne sono una prova altrettanto sicura quanto sensibile.

### **Superficie piane e convesse.**

Passiamo ora a calcolare entro quali limiti è necessaria la correzione delle superficie piane combinate colle lenti nei precedenti dispositivi.

Se la superficie piana presenta una concavità con un raggio  $r$  di curvatura, il sistema che ne deriva da una combinazione con una lente di distanza focale  $f$  ha una distanza focale  $f - \sigma$ , legata ad  $f$  ed  $r$  dalla relazione

$$1/(f - \sigma) = 1/f + 1/r$$

donde 
$$r = f(f - \sigma) / \sigma.$$

Essendo sempre  $f > 0$ ,  $\sigma < f$  segue subito  $\sigma > 0$ .

Se invece la superficie ha una convessità, la formula continua a valere inalterata dando a  $r$  il segno negativo; e quindi, finchè il suo valore assoluto non è inferiore a  $f$ , si ha anche  $\sigma < 0$ .

Dunque la presenza di una convessità o di una concavità nello specchio posto dietro la lente produce rispettivamente un allungamento o un accorciamento della distanza focale, e lo specchio si può ritenere piano per il nostro scopo purchè tale variazione sia inferiore al limite di sensibilità del reticolo adoperato, o, secondo la (9)

$$\sigma \leq dN / 16 \, lm^2 \, \text{tg } \theta$$

dove per  $\theta$  va intesa la metà dell'angolo sotto cui dal punto di osservazione è visto il tratto non piano dello specchio. Nel caso limite vale il segno di eguaglianza; e dato che  $\sigma$  è allora un numero piccolissimo, si può trascurarlo di fronte a  $f$  e scrivere:

$$r = f^2 / \sigma$$

donde il minimo valore assoluto di  $r$  sensibile risulta

$$r = 16 \, f^2 \, lm^2 \, \text{tg } \theta / dN$$

e se poniamo  $dN = 1$

$$r = 16 \, lm^2 \, \text{tg } \theta \, f^2;$$

e se poi indichiamo con  $h$  la semilarghezza della zona incurvata dello specchio, approssimativamente si ha

$$r = 16 \, lm^2 \, hf.$$

Per es.: se  $l = 10$  mm. (larghezza di reticolo che dal punto di osservazione è vista sotto lo stesso angolo di  $2h$ ),  $m = 10$  tratti per mm.,  $h = 50$  mm.,  $f = 2000$  mm., si ha  $r = 16 \times 10^8$  mm.

Ancora: se  $l = 4$  mm.;  $h = 25$  mm.,  $m = 20$  tratti per mm.,  $f = 250$  mm., si ha  $r = 16 \times 10^6$  mm.

Curvature sempre molto piccole; e solo per brevi distanze focali o per piccole frequenze del reticolo è sufficiente la correzione che generalmente si cerca di raggiungere.

Però i valori calcolati nel modo suddetto possono trovare in pratica qualche diminuzione perchè può darsi che per  $dN$  si richieda un valore superiore a 1. Rimane in ogni modo assodato che lo specchio deve avere un altissimo grado di perfezione, e se la  $f$  ha valori rilevanti è opportuno usare la superficie di una vaschetta piena di mercurio.

Ma la necessità di questa perfezione se può recare impaccio da una parte, serve dall'altra a dimostrare come un tale dispositivo costituisce un sensibilissimo mezzo per rivelare le irregolarità degli specchi piani; basta osservare la deformazione che subiscono le frangie visuali quando si sostituisce uno specchio campione a quello in esame nella combinazione con un obbiettivo.

Analogamente si possono studiare le superficie convesse, deducendone le irregolarità per differenza da quelle già note dell'obbiettivo intermediario. La sensibilità del metodo cresce colla distanza focale di questo obbiettivo; la quale, per le superficie convesse, deve essere inferiore al loro raggio di curvatura.

Oltre i metodi esposti, per giudicare della coincidenza dei reticoli, ne possono essere adottati molti altri anche più sensibili e a seconda dei casi più o meno vantaggiosi; come, per es.: spesso conviene non centrare i reticoli, essendo più utile osservare le frangie di scentratura delle figg. 14 e 15 (V. Tav. VI). La cosa assume un aspetto anche più interessante quando si deve sovrapporre un reticolo all'immagine di un altro; ma di questo si tratterà in una prossima nota.

Quanto alla sensibilità che si può raggiungere con questo metodo, da semplici considerazioni analoghe a quelle fatte per quello delle frangie di ombra, si deduce che un sistema trovato perfetto utilizzando la massima sensibilità ha certamente il potere risolutivo che teoricamente gli compete.

Nelle figg. 22 e 23 (V. Tav. VII e VIII) sono esposti i risultati di alcune prove fatte con questo metodo. La prima riproduce dieci fotografie fatte sulle due faccie di una lente divergente, usando ancora i reticoli di cui a pag. 16; le fot. Ia, Ib, IIa, IIb sono state fatte con un reticolo rettilineo; le Ic e IIc con uno circolare centrato, le altre con uno circolare non centrato. Dal confronto di queste ultime colle figg. 14 e 15 risulta che la Id e la II $d$  sono state fatte quando il reticolo conteneva nel proprio piano il centro della zona periferica, le Ie e IIe il centro della zona centrale; sono poi evidenti numerose irregolarità.

La fig. 23 riproduce alcune prove fatte sullo specchio AMICI III di cui a pag. 12; ed è evidente l'accordo coi risultati ottenuti mediante il metodo delle frangie di ombra.

*Istituto di Fisica, Arcetri-Firenze, gennaio 1923.*