Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Giovanni Sansone

Sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri regolari e in tetraedri

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 12 (1912), exp. nº 3, p. 1-76
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1912_1_12__A3_0>

GIOVANNI SANSONE

Sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico

IN

POLIEDRI REGOLARI E IN TETRAEDRI

TESI DI LAUREA

PREFAZIONE

È noto per le ricerche di Poincaré [1]) che il problema di costruire i gruppi discontinui di sostituzioni lineari sopra una variabile complessa equivale a quello della divisione regolare dello spazio iperbolico in poliedri elementari congruenti. Lo studio di questi gruppi da quindi luogo a due diverse questioni, e cioè: 1.º Definito aritmeticamente il gruppo cercare la divisione corrispondente dello spazio; 2.º Data una divisione regolare dello spazio trovare la definizione aritmetica del gruppo corrispondente.

Nel presente lavoro mi propongo di trattare quei casi particolari della seconda questione in cui i poliedri congruenti che effettuano la divisione della spazio iperbolico sono *poliedri regolari* o *tetraedri*.

Ho diviso per questo il mio lavoro da due parti: Nella prima che tratta la divisione dello spazio iperbolico in poliedri regolari, espongo per i gruppi relativi al tetraedro e all'ottaedro regolare i resultati ottenuti dal professore L. Bianchi in due sue memorie [2]). Trovo poi la costituzione aritmetica del gruppo del cubo e in parte quella del dodecaedro regolare a vertici propri [3]).

---

[1]) *Sur les groupes Kleinéens.* Acta Mathem. Bd. 3.

[2]) *Sulle divisioni regolari dello spazio non-euclideo in poliedri regolari.* Atti Accademia Lincei, 1893.

Sui gruppi di sostituzioni lineari corrispondenti alle divisioni dello spazio non-euclideo in tetraedri e ottaedri regolari. Atti Acc. Lincei, 1909.

[3]) La costruzione geometrica del dodecaedro trovasi nella prima delle memorie citate dal Prof. L. Bianchi.

La seconda parte ha per iscopo di trovare tutte le divisioni regolari dello spazio iperbolico in tetraedri elementari congruenti, e di definire aritmeticamente i gruppi propriamente discontinui corrispondenti.

Ho da considerare evidentemente cinque tipi di divisione secondo il numero dei vertici propri ed impropri che effettuano le divisioni in discorso. Corrispondentemente a questi cinque tipi ho diviso la trattazione della 2.ª parte in cinque capitoli. Per quasi tutti i gruppi corrispondenti alle divisioni in tetraedri con almeno un vertice improprio, ho trovato la costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti. In un ulteriore lavoro mi propongo di determinare la costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti ai due dodecaedri regolari e alle divisioni in tetraedri con vertici propri.

Per determinare il gruppo corrispondente ad una data divisione, do ad essa una conveniente orientazione. Con ciò non si toglie nessuna generalità alle ricerche, perchè i gruppi corrispondenti ad una determinata specie di divisione sono l'uno trasformato dell'altro con un opportuno movimento di 1.ª o 2.ª specie. Trovo allora le sostituzioni corrispondenti alle riflessioni sulle facce della cella che voglio assumere come fondamentale del gruppo Γ_0 da costruire, e indago quali sono le leggi aritmetiche comuni cui soddisfano i coefficenti delle suddette sostituzioni, leggi che però debbono valere anche per le sostituzioni ottenute da esse componendo con la ben nota regola. Trovo poi le sostituzioni corrispondenti ai movimenti che riportano la cella in se, le quali non dovendo appartenere a Γ_0 portano in generale a nuove leggi oltre le trovate. Procedo infine in senso inverso verificando se le leggi trovate bastano ad individuare Γ_0 o se occorra portare ancora convenienti restrizioni. Tale metodo mi ha permesso nel maggior numero dei casi portare in fondo le ricerche.

Parte Prima.

Sulle divisioni regolari dello spazio non-euclideo in poliedri regolari

1. — In questo lavoro mi giovo del principio dell'*ampliamento del gruppo per reflessione,* e delle due rappresentazioni dello spazio iperbolico sullo spazio ordinario, di cui ricorderò brevemente le pro prietà fondamentali.

L'elemento lineare dello spazio iperbolico S a curvatura costante $k = -1$ può essere dato dalla formula

$$ds^2 = \frac{4\,(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)}{(1-\xi^2-\eta^2-\zeta^2)^2}\ ,$$

e riguardando ξ, η, ζ quali coordinate cartesiane ortogonali di un punto nello spazio ordinario S' si ha la *rappresentazione conforme* di S sopra S'. In tale rappresentazione le rette e i piani dello spazio iperbolico S hanno per immagini i circoli e le sfere ortogonali alla sfera limite Σ

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\ ,$$

i cui punti interni rappresentano i punti a distanza finita di S e i punti alla superficie i punti all'∞. Con un'inversione per raggi vettori reciproci la sfera limite può ridursi ad un piano limite; corrispondentemente l'elemento lineare di S prende la forma:

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{\zeta^2}\ ,$$

e i punti di coordinata ζ positiva rappresentano punti a distanza finita, il piano limite essendo il piano $\zeta=0$. Su questo piano distendiamo i valori della variabile complessa $z=\xi+i\eta$. Per ogni movimento dello spazio iperbolico la corrispondente trasformazione sul piano limite è *un'affinità circolare* di Möbius rappresentata da una sostituzione lineare

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\,, \tag{1}$$

sulla variabile complessa z, o dall'altra sulla coniugata z_0

$$z'=\frac{\alpha z_0+\beta}{\gamma z_0+\delta}\,. \tag{2}$$

Le formule che legano le coordinate ξ, η, ζ di un punto P con quelle ξ', η', ζ' del punto P' in cui si trasforma P per il corrispondente movimento (1) sono date da:

$$\left\{\begin{aligned} z' &= \frac{\alpha\gamma_0\rho^2+\alpha\delta_0 z+\beta\gamma_0 z_0+\beta\delta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2+\gamma\delta_0 z+\gamma_0\delta z_0+\delta\delta_0}\,,\\ z'_0 &= \frac{\alpha_0\gamma\rho^2+\alpha_0\delta z_0+\beta_0\gamma z+\beta_0\delta}{\gamma\gamma_0\rho^2+\gamma\delta_0 z+\gamma_0\delta z_0+\delta\delta_0}\,,\\ \rho'^2 &= \frac{\alpha\alpha_0\rho^2+\alpha\beta_0 z+\alpha_0\beta z_0+\beta\beta_0}{\gamma\gamma_0\rho^2+\gamma\delta_0 z+\gamma_0\delta z_0+\delta\delta_0}\,. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

ove si è posto

$$\rho^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2\quad,\quad\rho'^2=\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2.$$

Se nella (1) si suppone poi $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, si ha ancora la formula

$$\zeta'=\frac{\zeta}{\gamma\gamma_0\rho^2+\gamma\delta_0 z+\gamma_0\delta z_0+\delta\delta_0}\,. \tag{4}$$

Al movimento (2) corrispondono le stesse formule (3) e (4) cambiandovi z in z_0.

La seconda rappresentazione dello spazio iperbolico S nello spazio ordinario S' si ottiene dalla formula

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2+dt^2}{t^2}\,,$$

ove

$$t = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}\,,$$

che da ancora l'elemento lineare di S riguardando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali di un punto nello spazio ordinario S'. Si ha così la rappresentazione di Beltrami-Klein di S sopra S'. In essa tutto lo spazio non euclideo S è rappresentato entro la sfera limite di S'

$$x^2+y^2+z^2=1$$

i punti alla cui superficie rappresentano i punti all'infinito di S. Le rette e i piani di S hanno per immagine le rette e i piani di S'. Questa rappresentazione conserva gli angoli solo attorno al centro di figura.

2. — Per risolvere il problema della divisione regolare dello spazio iperbolico in poliedri regolari, comincio dall'osservare che la rappresentazione di Beltrami-Klein da un modo semplice di costruire tutti i poliedri regolari in S con le considerazioni seguenti. Un poliedro regolare di S dovendo avere in questa rappresentazione per immagine un poliedro con facce piane di egual numero di lati, è chiaro che la discussione elementare ordinaria per classificare i poliedri regolari in cinque tipi, fondata sul teorema di Eulero vale immutata in questo caso. Di più dalle note ricerche del Klein sui gruppi finiti di sostituzioni lineari risulta che un poliedro regolare dello spazio iperbolico può sempre rappresentarsi nello spazio ordinario in guisa che il poliedro immagine S' sia esso stesso regolare ed abbia il suo centro nel centro della sfera limite. Viceversa se nello spazio rappresentativo S' si prende un poliedro regolare col centro nel centro della sfera limite e tutto interno a questa sfera o al massimo inscritto in essa, il poliedro obbiettivo nello spazio iperbolico sarà regolare. Come si vede esistono dunque nello spazio iperbolico poliedri regolari dei cinque tipi ed in ogni tipo si hanno infiniti poliedri differenti per l'ampiezza del diedro, che può variare in modo continuo entro certi limiti.

3. — Ora se si vuole che attorno al poliedro P di S collocando aderenti per le facce altrettanti poliedri eguali a P e così di seguito indefinitamente, ne risulti riempito, una e una sola volta lo spazio S, si deve aggiungere la condizione necessaria e sufficiente che l'angolo diedro di P abbia un'ampiezza $\frac{\pi}{n}$ essendo n un intero qualunque. Conviene distinguere due casi, secondo che i vertici di P sono all'infinito o a distanza finita. Cominciamo dal primo e servendoci della rappresentazione conforme del n. 1 dovremo inscrivere nella sfera limite Σ un ordinario poliedro regolare e per i circoli di intersezione delle facce del poliedro con Σ condurre le sfere normali a Σ; il poliedro a facce sferiche che queste sfere limitano internamente a Σ dovrà avere un angolo diedro di ampiezza eguale a $\frac{\pi}{n}$. Ora si vede subito che le sfere circoscritte hanno i loro centri nei vertici del poliedro regolare circoscritto a Σ polare del primitivo, onde l'angolo diedro in discorso è il supplemento dell'angolo rettilineo racchiuso dai raggi che dal centro di una faccia vanno a due suoi vertici adiacenti. Se ne conclude che la circostanza voluta si presenta soltanto per il tetraedro regolare, il cubo, l'ottaedro e il dodecaedro regolari. Nel secondo caso, i vertici essendo a distanza finita, si consideri l'angolo solido in un vertice del poliedro. A questo angolo solido regolare il cui diedro deve avere un'ampiezza $\frac{\pi}{n}$ potremo applicare i teoremi dell'ordinaria triedrometria che valgono per lo spazio iperbolico. Segue che l'angolo solido del poliedro in discorso non può essere nè tetraspigolo nè pentaspigolo, ma soltanto trispigolo con l'angolo solido di ampiezza $\frac{\pi}{2}$. Situando ora nella rappresentazione conforme del n. 1 il vertice dell'angolo solido nel centro della sfera limite segue subito che il nostro poliedro non può essere nè un tetraedro nè un cubo, e che perciò l'unico poliedro regolare della specie richiesta è in questo caso il dodecaedro regolare con diedri retti e della sua esistenza ce ne accerteremo al n. 6.

Si conclude: *Nello spazio non euclideo sono possibili soltanto cinque divisioni in poliedri regolari cioè quelle del tetraedro, cubo, ottaedro, dodecaedro con vertici impropri e del dodecaedro con vertici propri.*

Queste cinque divisioni sono per lo spazio non euclideo le analoghe alla divisione in cubi dello spazio ordinario, l'unica qui possibile in poliedri regolari.

4. — Mi occuperò ora di caratterizzare aritmeticamente i gruppi di sostituzioni lineari di 1.ª e 2.ª specie che nascono secondo il principio di Poincaré combinando tutte le riflessioni sulle facce dei tetraedri, ottaedri, cubi, appartenenti alle divisioni regolari con vertici impropri e quelle sulle facce del dodecaedro regolare con vertici propri.

Nella seconda delle memorie citate del prof. Bianchi si dimostra:

1.° *La porzione del semispazio* $\zeta > 0$ *interna al prisma formato dai tre piani*

$$\eta = 0 \ , \quad \eta = \xi\sqrt{3} \ , \quad \xi\sqrt{3} + \eta = \sqrt{3} \, ,$$

ed esterna alla sfera

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3} \, ,$$

forma un tetraedro Π *regolare ad angoli piani nulli ed angoli diedri di ampiezza* $\frac{\pi}{3}$. *Il tetraedro* Π *è il poliedro fondamentale del gruppo di sostituzioni unimodulari costante delle sostituzioni di* 1.ª *e* 2.ª *specie,*

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \ , \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \ , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \, ,$$

i cui coefficienti α, β, γ, δ *sono interi del campo* $(1, \varepsilon)$ *essendo* ε *la radice cubica dell'unità, e per i quali siano inoltre soddisfatte le congruenze:*

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{1 - \varepsilon}.$$

2.° *La porzione del semispazio* $\zeta > 0$ *interna al prisma racchiuso dai quattro piani*

$$\eta = 0 \ , \ \xi = 0 \ , \ \eta = 1 \ , \ \xi = 1 \, ,$$

esterna alle quattro sfere

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} \, ,$$

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} \, ,$$

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} \, ,$$

$$(\xi - 1)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right) + \zeta^2 = \frac{1}{4} \, ,$$

forma un ottaedro Π *regolare con angoli piani nulli e diedri retti. L'ottaedro* Π *è il poliedro fondamentale del gruppo di sostituzioni unimodulari costante delle sostituzioni di* 1.ª e 2.ª *specie*

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \, , \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \, , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \, ,$$

i cui coefficienti α, β, γ, δ *sono interi di Gauss per i quali riescano soddisfatte le congruenze:*

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2) \, .$$

5. — In questo numero mi occuperò di caratterizzare aritmeticamente il gruppo corrispondente alla divisione dello spazio iperbolico in cubi.

Ponendo $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ consideriamo quel gruppo G di sostituzioni unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \, , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \, ,$$

i cui cofficienti α, β, γ, δ sono interi nel campo $(1, \varepsilon)$ e per i quali siano soddisfatte le congruenze

$$\beta \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ 1-\varepsilon)\,,$$
$$\gamma \equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ 2\,(1-\varepsilon))\,.$$

Ampliamo il gruppo G con la riflessione $z' = z_0$ ed avremo il gruppo G_0 formato dalle sostituzioni di 1.ª e 2.ª specie

$$\left.\begin{array}{ll} a) & z' = \dfrac{\alpha\, z+\beta}{\gamma\, z+\delta}\,, \\[2ex] b) & z' = \dfrac{\alpha z_0+\beta}{\gamma z_0+\delta}\,, \end{array}\right\} \quad \alpha\delta-\beta\gamma=1,\ \beta\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\,1-\varepsilon),\ \gamma\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\,2\,(1-\varepsilon)).$$

Osserviamo il periodo delle sostituzioni di 1.ª specie contenute in G. La *a)* sarà ellittica quando $\alpha+\delta$ sia reale e minore in valore assoluto di 2; sarà perciò

$$\alpha+\delta = 0\ , \qquad \text{ovvero} \quad \alpha+\delta = \pm 1\,.$$

Ma non può aversi insieme

$$\alpha+\delta = 0\ , \qquad \alpha\delta \equiv 1 \quad (\mathrm{mod.}\ 6)\,,$$

resta dunque possibile solo il caso $\alpha+\delta = \pm 1$, e le corrispondenti sostituzioni ellittiche hanno il periodo 3. Segue che: *Se due sfere di riflessione del gruppo* G_0 *si attraversano, esse si tagliano secondo l'angolo* $\dfrac{\pi}{3}$ o $\dfrac{2\pi}{3}$.

Troviamo ora tutte le sfere di riflessioni del gruppo G_0. Esse sono date da quelle sostituzioni *b)* in cui α e δ sono coniugati immaginari, e β e γ puramente immaginari, hanno quindi la forma:

$$z' = \frac{(a_1+a_2\,\varepsilon)\,z_0+ib_1\sqrt{3}}{2\,i\,c_1\sqrt{3}\,z_0+(a_1+a_2\,\varepsilon^2)}\,. \tag{5}$$

con a_1, a_2, b_1, c_1, interi razionali tali che sia

$$a_1^2+a_0^2-a_1\,a_2+6\,b_1\,c_1 = 1\,,$$

ovvero

$$(a_2-2a_1)^2+3a_2^2+24b_1c_1=4\,. \tag{6}$$

I piani di riflessione si ottengono quando $c_1=0$ e poichè la (6) ha allora le sole soluzioni

$$a_2-2a_1=\pm 2\,,\qquad a_2=0\,,$$
$$a_2-2a_1=\pm 1\,,\qquad a_2=\pm 1\,,$$

si ottengono tutti i piani di riflessioni di G_0 dalle equazioni:

$$\eta=\frac{b\sqrt{3}}{2}\,,\qquad \eta\sqrt{3}\pm\eta=b\sqrt{3}\,,$$

percorrendo b tutti gli interi razionali. Questi piani dividono il semispazio $\zeta>0$ in prismi retti triangolari a base equilatera, fra i quali sceglieremo quello limitato dai tre piani

I) $\eta=0$, II) $\eta=\xi\sqrt{3}$, III) $\xi\sqrt{3}+\eta=\sqrt{3}$,

nell'interno del quale non penetra alcun piano di riflessione. La base di questo prisma è il triangolo equilatero nel piano complesso con i tre vertici nei punti

$$0\,,\ 1\,,\ \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\,.$$

Consideriamo ora le sfere di riflessione di G_0 con l'equazione:

$$\left(\xi-\frac{a_2}{4c_1}\right)^2+\left(\eta-\frac{a_2-2a_1}{4c_1\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\left(\frac{1}{2c_1\sqrt{3}}\right)^2, \tag{7}$$

i numeri interi a_1, a_2, c_1 soddisfacendo alla congruenza:

$$(a_2-2a_1)^2+3a_2^2\equiv 4 \qquad (\mathrm{mod.}\ 12\,c_1). \tag{8}$$

Il massimo raggio delle sfere di riflessione è $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ e fra queste consideriamo le tre

$$\text{IV)}\qquad \left(\xi-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$\text{V)}\qquad \left(\xi-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2,$$

$$\text{VI)}\qquad \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{4}{4\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2.$$

corrispondenti alle riflessioni:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & , 0 \\ 2\varepsilon(1-\varepsilon), & \varepsilon^2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1+3\varepsilon\ , & -\varepsilon(1-\varepsilon) \\ 2\varepsilon(1-\varepsilon)\ , & 1+3\varepsilon^2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -1+2\varepsilon\ , & -\varepsilon(1-\varepsilon) \\ 2\varepsilon(1-\varepsilon)\ , & -1+2\varepsilon^2 \end{pmatrix}$$

La porzione del semispazio $\zeta > 0$ interna al prisma I), II), III) ed esterna alle tre sfere IV), V), VI) racchiude un cubo regolare Π con angoli piani nulli e diedri $=\frac{\pi}{3}$ e con gli otto vertici

$$V_1\equiv(0\,,0\,,0)\,;\quad V_2\equiv\left(\frac{1}{2}\,,0\,,0\right);\quad V_3\equiv(1,0,0);\quad V_4\equiv\left(\frac{3}{4}\,,\frac{\sqrt{3}}{4}\,,0\right)$$

$$V_5\equiv\left(\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,0\right);\quad V_6\equiv\left(\frac{1}{4}\,,\frac{\sqrt{3}}{6}\,,0\right);\quad V_7\equiv\left(\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{6}\,,0\right);\quad V_8\equiv(0,0,\infty)$$

Proveremo che Π è il poliedro fondamentale di G_0 dimostrando:

1. Nessuna sfera di riflessione di G_0 attraversa Π;
2. Nessuna sostituzione di G_0 diversa dall'identità trasforma Π in se medesimo.

Per dimostrare la prima asserzione osserviamo che Π avendo i suoi diedri $=\frac{\pi}{3}$ nessuna sfera di riflessione di G_0 può penetrare in Π attraverso uno spigolo, poichè taglierebbe allora le facce concorrenti in quello spigolo sotto un angolo minore di $\frac{\pi}{3}$. Dunque una tale sfera dovrebbe contenere nel suo interno uno dei vertici

$V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7$ per la qual cosa è necessario e sufficiente che si verifichino rispettivamente le diseguaglianze

$$\begin{array}{lrll}
 & (a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 < 4 & \text{per} & V_1 \\
 & 3(2c_1 - a_2)^2 + (a_2 - 2a_1)^2 < 4 & \text{per} & V_2 \\
 & 3(4c_1 - a_2)^2 + (a_2 - 2a_1)^2 < 4 & \text{per} & V_3 \\
 & 3(3c_1 - a_2)^2 + [3c_1 - (a_2 - 2a_1)]^2 < 4 & \text{per} & V_4 \\
 & 3(2c_1 - a_2)^2 + [6c_1 - (a_2 - 2a_1)]^2 < 4 & \text{per} & V_5 \\
 & 3(c_1 - a_2)^2 + [3c_1 - (a_2 - 2a_1)]^2 < 4 & \text{per} & V_6 \\
\alpha) & 3(2c_1 - a_2)^2 + [2c_1 - (a_2 - 2a_1)]^2 < 4 & \text{per} & V_7
\end{array}$$

Ma poichè a causa della (8) (a_2-2a_1), $3c_1-(a_2-2a_1)$, $6c_1-(a_2-2a_1)$, non possono essere nulli e sono quindi $=\pm 1$ ne segue, che per verificarsi le prime sei diseguaglianze, occorre rispettivamente

$$a_2 = 0\,; \quad 2c_1 = a_2\,; \quad 4c_1 = a_2\,; \quad 3c_1 = a_2\,; \quad 2c_1 = a_2\,; \quad c_1 = a_2\,;$$

cioè rispettivamente

$$\begin{array}{rrr}
-2a_1 = \pm 1\,; & 2c_1 + 2a_1 = \pm 1\,; & 4c_1 + 2a_1 = \pm 1\,; \\
2a_1 = \pm 1\,; & 4c_1 + 2a_1 = \pm 1\,; & 2c_1 + 2a_1 = \pm 1\,;
\end{array}$$

ma queste eguaglianze sono manifestamente assurde.

La α) può verificarsi solo per $a_1 = 0$ e $a_2 = 2c_1$, ma allora la (6) diviene

$$16c_1^2 + 24b_1 c_1 = 4$$

manifestamente assurda [1].

Dimostriamo ora che nessuna sostituzione di G_0 diversa dall'identità trasforma Π in sè stesso. Essendo Π un cubo, esso ammette un gruppo ampliato di 48 movimenti in se, e cioè 24 di 1.ª specie e 24 di 2.ª specie.

---

[1]) Escludo le ipotesi $a_2 = 2c_1$; $2c_1 - a_2 + 2a_1 = \pm 1$ (ovvero le altre $2c_1 = a_2 \pm 1$; $2c_1 - a_2 + 2a_1 = 0$) perchè le due eguaglianze soprascritte si escludono a vicenda.

Per le sostituzioni $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ corrispondenti ai 24 movimenti del gruppo ottoedrale di Π, scrivendole sotto forma unimodulare troviamo [1]:

$$\begin{pmatrix} 1 , & 0 \\ 0 , & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \varepsilon^2\sqrt{2} , & \dfrac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} \\ \varepsilon^2\sqrt{2} , & \varepsilon\sqrt{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1+2\varepsilon , & -\varepsilon \\ -2\varepsilon^2 , & 1+2\varepsilon^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\varepsilon\sqrt{2} , & \dfrac{\varepsilon\sqrt{2}}{2} \\ \varepsilon^2\sqrt{2} , & -\varepsilon^2\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 , & -\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ \varepsilon^2\sqrt{2} , & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 , & -1 \\ 2 , & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\sqrt{2} , & \dfrac{2+\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ -(1-\varepsilon)\sqrt{2} , & \sqrt{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 , & \varepsilon^2 \\ -2\varepsilon , & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^2 , & \varepsilon \\ 0 , & \varepsilon \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{2} , & \dfrac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}} \\ \varepsilon\sqrt{2} , & -\varepsilon\sqrt{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1-\varepsilon , & -1 \\ -2\varepsilon , & \varepsilon \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\sqrt{2} , & \dfrac{\varepsilon^2\sqrt{2}}{2} \\ \varepsilon\sqrt{2} , & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 , & -\dfrac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}} \\ \varepsilon\sqrt{2} , & \sqrt{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \varepsilon^2 , & 0 \\ 2\varepsilon^2 , & \varepsilon \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\varepsilon^2\sqrt{2} , & \dfrac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}} \\ (1-\varepsilon^2)\sqrt{2} , & \varepsilon^2\sqrt{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \varepsilon^2 , & -\varepsilon^2 \\ -2 , & 1-\varepsilon^2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon , & -\varepsilon \\ 0 , & \varepsilon^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sqrt{2} , & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} , & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1-\varepsilon^2 , & \varepsilon^2 \\ 2 , & \varepsilon^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\varepsilon^2\sqrt{2} , & \dfrac{1+2\varepsilon^2}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2} , & \varepsilon^2\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 , & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} , & \sqrt{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \varepsilon , & 1 \\ 2\varepsilon , & 1-\varepsilon \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{2} , & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -(1+2\varepsilon^2)\sqrt{2} , & -\varepsilon\sqrt{2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\varepsilon , & 0 \\ 2\varepsilon^2 , & -\varepsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Nessuna di esse esclusa l'identità appartiene a G. Combinando queste 24 sostituzioni con la riflessione corrispondente al piano $\xi = \dfrac{1}{2}$

$$z' = -z_0 + 1$$

---

[1]) Nelle prime due linee scriviamo quelle di un sottogruppo diedrale G_8.

che trasforma Π in se, otteniamo le altre 24 sostituzioni di 2.ª specie che avendo il determinante eguale a -1 non possono appartenere a G_0.

Da quanto si è detto segue:

Il cubo regolare con angoli piani nulli e diedri eguale a $\frac{\pi}{3}$ *è il poliedro fondamentale del gruppo* G_0 *che ha per riflessioni generatrici:*

$$\begin{pmatrix} 1 , & 0 \\ 0 , & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \varepsilon^2 , & 0 \\ 0 , & \varepsilon \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \varepsilon , & -\varepsilon(1-\varepsilon) \\ 0 , & \varepsilon^2 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & , 0 \\ 2\varepsilon(1-\varepsilon) , & \varepsilon^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1+3\varepsilon & , -\varepsilon(1-\varepsilon) \\ 2\varepsilon(1-\varepsilon) , & 1+3\varepsilon^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1+2\varepsilon , & -\varepsilon(1-\varepsilon) \\ 2\varepsilon(1-\varepsilon) , & -1+2\varepsilon^2 \end{pmatrix} .$$

Osserviamo infine che *il gruppo del cubo è un sottogruppo del gruppo del tetraedro di indice 5.*

Infatti riflettendo il tetraedro del n. 4 successivamente sulle sfere di raggio 1 e di centro nei punti.

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right) ; \left(0 , \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) ; \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right) ; \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$$

si ottiene il cubo costruito in questo numero.

6. — Venendo ora alla divisione in dodecaedri regolari con vertici propri, cominciamo dal costruire effettivamente, nella rappresentazione conforme del n. 1, il dodecaedro a facce sferiche immagine del dodecaedro regolare a diedri retti dello spazio iperbolico. Prendiamo nello spazio rappresentativo un icosaedro regolare di spigolo $= l$, per cui il raggio R della sfera circoscritta sarà dato da:

$$R = \frac{l}{2\sqrt{2}} \sqrt{5+\sqrt{5}}$$

e coi centri nei 12 vertici dell'icosaedro descriviamo 12 sfere $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{12}$ di raggio r

$$r = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

ciascuna delle quali taglierà ortogonalmente le cinque circostanti. Il centro O dell'icosaedro, essendo $R > r$, è esterno alle $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{12}$ e descrivendo una sfera Σ di centro O e raggio

$$\rho = \sqrt{R^2 - r^2}$$

questa taglia ad angolo retto le 12 sfere σ_i, essendo $\rho^2 + r^2 = R^2$ Facciamo $\rho = 1$, per cui basta prendere

$$l = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}; \qquad R = \sqrt[4]{5}$$

e prendiamo la sfera Σ come sfera limite del nostro spazio rappresentativo. È chiaro che la sfera Σ è tutta interna all'icosaedro, perchè il raggio

$$r' = \frac{l\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$$

della sfera inscritta nell'icosaedro riesce > 1. Il dodecaedro regolare a facce sferiche racchiuso entro Σ dalle 12 sfere σ_i rappresenterà il dodecaedro a diedri retti e angoli piani retti dello spazio iperbolico.

Per trovare le sostituzioni elementari dei gruppi $\overline{\Gamma}'$ di movimenti di 1.ª e 2.ª specie e Γ' di movimenti di 1.ª specie che cambiano tale divisione dodecaedrica in se, situiamo l'icosaedro in guisa che uno dei 6 diametri coincida coll'asse 0ζ e uno dei vertici contigui al vertice $\zeta = -\sqrt[4]{5}$ si disponga nel piano $\xi\zeta$ dalla parte delle ξ positive. Con tale orientazione il gruppo delle 60 votazioni elementari dell'icosaedro in se medesimo si genera con le 2 sostituzioni elementari:

$$\text{S)}\quad z' = \frac{\varepsilon^3 z}{\varepsilon^2}\;; \qquad \text{T)}\quad z' = \frac{(\varepsilon^2-\varepsilon)\,z + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\,z + (\varepsilon-\varepsilon^4)}$$

ove

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

Combinando con S) e T) la riflessione

$$z' = z_0$$

si hanno 120 movimenti di 1.ª e 2.ª specie del gruppo ampliato dell'icosaedro che riportano in se il dodecaedro regolare costruito. Per avere le sostituzioni elementari di Γ' associamo la riflessione su una delle 12 sfere σ_i scegliamo quella che ha centro nel vertice $\zeta = \sqrt[4]{5}$ ed osserviamo che il piano radicale di una sfera σ_i con la sfera limite dista dal centro di

$$p = \frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$

L'espressione analitica di questa riflessione è;

$$z' = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{(\sqrt[4]{5}-1)\,z_0}$$

onde *il gruppo di movimenti che riporta in se la divisione regolare dodecaedrica convenientemente orientata si genera con le tre sostituzioni elementari:*

$$\text{S)}\quad z' = \frac{\varepsilon^3}{\varepsilon^2} z\;; \qquad \text{T)}\quad z' = \frac{(\varepsilon^4-\varepsilon)\,z + (\varepsilon^2-\varepsilon^3)}{(\varepsilon^2-\varepsilon^3)\,z + (\varepsilon-\varepsilon^4)}\;; \qquad \text{V)}\quad z' = \frac{\sqrt[4]{5}+1}{(\sqrt[4]{5}-1)\,z}$$

Le sue sostituzioni hanno tutte la forma

$$z' = \frac{(a\sqrt[4]{5}+b)\,z + (c\sqrt[4]{5}+d)}{(c_0\sqrt[4]{5}-d_0)\,z + (-a_0\sqrt[4]{5}+b_0)} \tag{9}$$

essendo a, b, c, d interi del campo $\sqrt[5]{\ }$ dell'unità. Infatti S, T, V hanno questa forma, e due sostituzioni (9) si compongono in una sostituzione di questa, perchè dalla formola

$$\sqrt[2]{5} = 2(\varepsilon + \varepsilon^4) + 1 \ ,$$

segue che $\sqrt[4]{5}$ è nell'anzidetto campo di numeri una irrazionalità quadratica.

Cerchiamo ora di caratterizzare aritmeticamente il gruppo G_0 che ha per poliedro fondamentale il dodecaedro Π considerato. Le riflessioni sulle 12 facce di Π, che sono poi le sostituzioni elementari di G_0 sono:

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & ; \sqrt[2]{5}(\sqrt[4]{5}+1) \\ \sqrt[2]{5}(\sqrt[4]{5}-1) ; & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & ; \sqrt[2]{5}(\sqrt[4]{5}-1) \\ \sqrt[2]{5}(\sqrt[4]{5}+1) ; & 0 \end{pmatrix} ; \\ \begin{pmatrix} 2\varepsilon^\nu \sqrt[4]{5} & ; \sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{5}+1) \\ -\sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{5}-1) ; & -2\varepsilon^{5-\nu}\sqrt[4]{5} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2\varepsilon^\nu \sqrt[4]{5} & ; -\sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{5}-1) \\ \sqrt[4]{5}(\sqrt[4]{5}+1) ; & -2\varepsilon^{5-\nu}\sqrt[4]{5} \end{pmatrix} ; \end{array}\right.$$

dove

$$\nu = 0, 1, 2, 3, 4 . \qquad (\varepsilon^5 = 1)$$

Tali sostituzioni sono tutte della forma (9) a determinante

$$-5(\sqrt[2]{5}-1) \ ,$$

e per la relazione:

$$\sqrt[4]{5} + 1 = (\sqrt[4]{5}-1)\left(-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)\sqrt[4]{5} + (1-\varepsilon^2-\varepsilon^3)\right) \ ,$$

chiamando con β e γ il 2.° e il 3.° coefficiente delle (10) si ha

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 \ , \qquad (\text{mod. } \sqrt[4]{5} + 1) \ .$$

Per l'altra relazione

$$2 = -(\sqrt[2]{5}-1)(\varepsilon^2+\varepsilon^3),$$

si osserverà che componendo due sostituzioni (10) con la ben nota regola, si ottiene una sostituzione U di 1.ª specie a determinante $5^2(\sqrt[2]{5}-1)^2$ i cui coefficienti sono divisibili per $\sqrt[2]{5}\,(\sqrt[2]{5}-1)$ onde dividendo per questo fattore la U assumerà la forma

$$z' = \frac{(a\sqrt[4]{5}-b)z + (c\sqrt[4]{5}+d)}{(c_0\sqrt[4]{5}-d_0)z + (-a_0\sqrt[4]{5}+b_0)},$$

sarà a determinante 5, e col secondo e terzo coefficiente divisibili per $\sqrt[4]{5}+1$.

Da quanto si è detto segue: *Il gruppo* G_0 *si ottiene ampliando un certo gruppo* G *di sostituzioni di 1.ª specie*

$$z' = \frac{(a\sqrt[4]{5}+b)z + (c\sqrt[4]{5}+d)}{(c_0\sqrt[4]{5}-d_0)z + (-a_0\sqrt[4]{5}+b_0)}, \tag{11}$$

a determinante

$$5^n, \qquad (n \geq 1)$$

i cui coefficienti a, b, c, d *sono interi del campo* $\sqrt[5]{\ }$ *dell'unità, c* d, c_0 *e* d_0 *tali che si verifichino le congruenze*

$$(c\sqrt[4]{5}+d) \equiv (c_0\sqrt[4]{5}-d_0) \equiv 0. \quad (\text{mod. } \sqrt[4]{5}+1)$$

con la riflessione

$$\frac{\sqrt[4]{5}-1}{(\sqrt[4]{5}-1)z_0}.$$

Sarebbe facile dimostrare che se ai coefficienti delle sostituzioni (11) si potesse assegnare un'ulteriore condizione oltre le assegnate per la quale le sostituzioni ellittiche di G avessero solo il periodo 2, si otterrebbero tutte le condizioni che caratterizzano aritmeticamente G e quindi G_0.

PARTE SECONDA.

Sulle divisioni regolari dello spazio non-euclideo in tetraedri

CAPITOLO I.

Sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in tetraedri con vertici impropri.

1. Per determinare le divisioni regolari dello spazio non-euclideo S in tetraedri con vertici impropri ci serviremo della rappresentazione conforme di S sul semispazio S'. Considerazioni semplicissime ci faranno risolvere la questione. Siano V_0, V_1, V_2, V_3 i vertici di un tetraedro Π di S' con vertici impropri. Sappiamo che la condizione necessaria e sufficiente perchè Π effettui la divisione regolare di S' è che i suoi diedri abbiano per misura $\frac{\pi}{n}$ (n intero). Supponiamo che V_0 sia il punto all' ∞ di S', allora le tre faccie di Π concorrenti in V_0 formano un prisma retto triangolare, la cui base sul piano limite è un triangolo i cui angoli sono sottomultipli di π secondo un numero intero, e perciò un triangolo con angoli

a) $$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3},$$

ovvero con angoli

b) $$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6},$$

ed infine con angoli

c) $$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}.$$

Inversamente, se noi consideriamo di un prisma retto triangolare, le cui facce siano ortogonali alla sfera limite e la cui base sia un triangolo T del tipo *a)*, o del tipo *b)*, o del tipo *c)*, la porzione esterna alla sfera ortogonale al piano limite il cui equatore passi per i vertici del triangolo T, otteniamo manifestamente un tetraedro con vertici impropri avente i suoi diedri ciascuno di ampiezza $\frac{\pi}{n}$ con n intero.

Segue: *Esistono tre sole divisioni regolari dello spazio non-euclideo in tetraedri con vertici impropri.*

Nei numeri 2, 3, 4 ci proponiamo di dare la costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti a ciascuna divisione.

2. Consideriamo il prisma racchiuso dai tre piani:

$$\text{I)}\quad \eta=0\ ,\qquad \text{II)}\quad \eta=\xi\sqrt{3}\ ,\qquad \text{III)}\quad \xi\sqrt{3}+\eta=\sqrt{3}$$

La base di questo prisma è un triangolo equilatero nel piano complesso $\xi+i\eta$, perciò un triangolo del tipo *a)*. La porzione del prisma I), II), III) esterna alla sfera:

$$\text{IV)}\qquad \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{3}$$

forma un *tetraedro regolare*. Sappiamo dal n. 4 (1.ª parte) che *il gruppo corrispondente alla divisione in tetraedri regolari, è il gruppo* G_0 *costante delle sostituzioni di* 1.ª e 2.ª *specie*

$$\begin{aligned} z'&=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\,,\\ & \qquad\qquad\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1\ ;\qquad \beta\equiv\gamma\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ (1-\varepsilon)).\\ z'&=\frac{\gamma z_0+\delta}{\alpha z_0+\delta}\,,\end{aligned}$$

con α, β, γ, δ *interi del campo* $(1,\varepsilon)$, *essendo*

$$\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

3. Consideriamo il gruppo G di sostituzioni a determinante ± 1:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1),$$

i cui coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono interi del campo $(1, \varepsilon)$, essendo

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

e per i quali si abbia

$$\gamma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2\ (1-\varepsilon)).$$

Ampliamo il gruppo G con la riflessione $z' = z_0$, ed otterremo il gruppo G_0 formato dalle sostituzioni di 1.ª e 2.ª specie

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \\ 2) & z' = \dfrac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \end{array}\right\} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1, \qquad \gamma \equiv 0\ (\text{mod. } 2\ (1-\varepsilon)).$$

Dimostreremo che il poliedro fondamentale di G_0 è un tetraedro con vertici impropri e del tipo *b)*.

Osserviamo il periodo delle sostituzioni ellittiche contenute in G. Se è $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ la 1) sarà ellittica per $\alpha + \beta = 0, \pm 1$ onde le corrispondenti sostituzioni ellittiche hanno i periodi 2 o 3. Se è invece $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ la 1) sarà ellittica se $i\ (\alpha + \delta)$ è reale e in valore assoluto minore di 2, cioè, se è $\alpha + \delta = 0$ ovvero $\alpha + \delta = \pm i\sqrt{3}$ e le corrispondenti sostituzioni ellittiche hanno il periodo 2 o 6. Considerando le sfere di riflessioni di G_0 segue: *Se due sfere di riflessione di* G_0 *si attraversano, esse si tagliano sotto gli angoli* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$. Ricerchiamo ora tutte le riflessioni contenute in G_0. Se è $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ la 2) rappresenterà una riflessione se è della forma

$$(1) \qquad z' = \frac{(a_1 + a_2\varepsilon)\, z_0 + i b_1\sqrt{3}}{2 i c_1\sqrt{3}\, z_0 + (a_1 + a_2\varepsilon^2)},$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi razionali soddisfacenti all'equazione:

$$(2)\qquad (a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 + 24 b_1 c_1 = 4 .$$

I corrispondenti piani di riflessione ($c_1 = 0$) hanno per equazione:

$$\text{A)}\qquad \eta = \frac{b\sqrt{3}}{2}\,; \qquad \xi\sqrt{3} \pm \eta = b\sqrt{3}\,,$$

b percorrendo tutti gli interi razionali, mentre le corrispondenti sfere di riflessione ($c_1 \neq 0$) hanno per equazione

$$(3)\qquad \left(\xi - \frac{a_2}{4c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 - 2a_1}{4c_1\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2c_1\sqrt{3}}\right)^2 .$$

Se è poi $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ la 2) rappresenterà una riflessione se è della forma

$$(4)\qquad z' = \frac{(a_1 + a_2\varepsilon)z_0 + b_1}{6c_1 z_0 - (a_1 + a_2\varepsilon^2)}$$

essendo a_1, a_2, b_1, c_1 interi razionali soddisfacenti all'equazione (2). I corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione:

$$\xi = \frac{b}{2}\,, \qquad \xi \pm \eta\sqrt{3} = b\,,$$

b percorrendo tutti gli interi razionali, mentre le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione

$$\left(\xi - \frac{2a_1 - a_2}{12c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{4\sqrt{3}\,c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{6c_1}\right)^2 .$$

Osserviamo che i piani di riflessione A) e B) dividono il semispazio $\zeta > 0$ in prismi retti congruenti aventi per base un triangolo con angoli $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$. Fra questi prismi consideriamo per esempio quello racchiuso dai tre piani:

$$\text{I)}\quad \eta = 0\,, \qquad \text{II)}\quad \xi = \frac{1}{2}\,, \qquad \text{III)}\quad \xi = \eta\sqrt{3}\,,$$

nell'interno del quale non penetra alcun piano di riflessione. La porzione del prisma I, II, III esterna alla sfera di riflessione

$$\text{IV)} \qquad \left(\xi-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{4\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2,$$

forma un tetraedro Π i cui vertici V_0, V_1, V_2, V_3 sono sul piano limite, avendosi

$$V_0\equiv(0\,,\,0\,,\,\infty)\;;\qquad V_1\equiv(0\,,\,0\,,\,0)\;;$$

$$V_2\equiv\left(\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,0\right)\;;\qquad V_3\equiv\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\,,\,0\right).$$

Dico che π è il poliedro fondamentale di G_0. Per questo come al solito dimostriamo:

1.° Nessuna sfera di riflessione attraversa il tetraedro Π

2.° Nessuna sostituzione di G_0 diversa dell'identità, trasforma Π in se stesso.

Essendo le sostituzioni ellittiche di G_0 a periodo 2, 3, 6 se una sfera di riflessione di G_0 attraversasse π lungo uno spigolo, il diedro di questo spigolo dovrebbe avere per misura $\frac{\pi}{2}$, o $\frac{\pi}{3}$ e conseguentemente la sfera dividerebbe l'angolo diedro di π, relativo a questo spigolo nel 1.° caso in 2 diedri aventi per misura $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ e nel secondo in due diedri aventi per misura $\frac{\pi}{6}$.

Ora le sfere che partiscono il diedro retto $V_1\,V_3$ secondo due angoli diedri aventi per misura $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$ sono, l'una

$$\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta+\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{3},$$

l'altra la sfera

$$\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{9},$$

e nessuna di esse appartiene alle sfere (3) o (5).

La sfera poi che divide il diedro $V_1 V_2$ di Π in 2 diedri aventi per misura $\frac{\pi}{6}$ ha per equazione

$$\left(\xi - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4},$$

e nemmeno essa appartiene alle sfere (3) o (5).

Segue che nessuna sfera di riflessione di G_0 può penetrare in Π lungo uno spigolo.

Sostituendo le coordinate dei vertici V_1, V_2, V_3 nelle equazioni (3) e (5) e tenendo conto della (2) facilmente si vede che nessuna sfera di riflessione di G_0 può contenere nel suo interno o V_1, o V_2, o V_3. Venendo ora ai movimenti che trasformano il tetraedro Π in se, ed osservando che i valori di z nei quattro vertici V_0, V_1, V_2, V_3 sono rispettivamente $z_0 = \infty$, $z_1 = 0$, $z_2 = \frac{1}{2}$, $z_3 = \frac{1}{1-\varepsilon}$ col birapporto $\Omega = 1 - \varepsilon \neq -1$ segue che esiste solo un *Vierergruppe* dei movimenti di 1.ª specie che trasforma Π in se.

Le sostituzioni $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, corrispondenti a detti movimenti sono:

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \varepsilon^2 (1-\varepsilon), & -\varepsilon^2 \\ 2\varepsilon^2 (1-\varepsilon), & -\varepsilon^2 (1-\varepsilon) \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2\varepsilon^2, & -\varepsilon^2 \\ 2\varepsilon^2 (1-\varepsilon), & -2\varepsilon^2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 2(1-\varepsilon), & 0 \end{pmatrix}$$

Di esse, salvo la prima (l'identità) nessuna appartiene a G. Infatti le ultime sostituzioni hanno rispettivamente per determinante

$$-(1-\varepsilon), \qquad 2, \qquad -2(1-\varepsilon)$$

e ridotte unimodulari non appartengono a G.

Segue da quanto si è detto che il tetraedro Π, che è del tipo *b)*, è il poliedro fondamentale di G_0.

4. Consideriamo il gruppo G_0 di sostituzioni a determinante 1, i

$$(1) \quad z' - \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad (2) \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1, i)$$

i cui coefficienti α, β, γ, δ sono interi del campo $(1, i)$ e per i quali si abbia:

$$\gamma \equiv 0 \pmod{2} \; ; \qquad \beta \equiv 0 \pmod{1+i}.$$

Dimostreremo che *il poliedro fondamentale di* G_0 è un tetraedro II con vertici impropri e del tipo *c)*.

Trovianmo il periodo delle sostituzioni ellittiche 1). Se è $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ la 1) sarà ellittica per $\alpha + \delta = 0$ e $\alpha + \delta = \pm 1$.
Ma il caso $\alpha + \delta \pm 1$ è incompatibile con la congruenza

$$\alpha\delta \equiv 1 \pmod{2}$$

resta solo il caso $\alpha + \delta = 0$ e le corrispondenti sostituzioni ellittiche hanno il periodo 2. Se $\alpha\delta - \beta\gamma = i$ la (1) sarà ellittica per $\alpha + \delta = 0$, $\pm(1 + i)$ e le corrispondenti sostituzioni ellittiche hanno il periodo 2 o 4. Concludiamo: Se due sfere di riflessione di G_0 si attraversano, esse si tagliano sotto gli angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

Ricerchiamo ora tutte le riflessioni contenute in G_0. Se è $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, la 2) rappresenterà una riflessione se è della forma:

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2) z_0 + 2ib_1}{2ic_1 z_0 + (a_1 - ia_2)}, \tag{6}$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1, sono interi razionali soddisfacenti all'equazione

$$a_1^2 + a_2^2 + 4 b_1 c_1 = 1. \tag{7}$$

I corrispondenti piani di riflessione $(c_1 = 0)$ hanno per equazione:

$$\text{A)} \qquad \eta = b \; ; \quad \xi = b \; ;$$

b percorrendo tutti gli interi razionali, mentre le corrispondenti sfere di riflessione $(c_1 \neq 0)$ hanno per equazione

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2 \tag{8}$$

Se è poi $\alpha\delta-\beta\gamma=i$, a 2) rappresenterà una riflessione se è della forma

$$(9) \qquad z'=\frac{(a_1+ia_2)z_0+b_1(1-i)}{2(1-i)c_1z_0+(a_3+ia_1)},$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi razionali soddisfacenti all'equazione (7). I corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione

$$\text{B)} \qquad \xi\pm\eta=b$$

b percorrendo tutti gli interi razionali, e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$(10) \qquad \left(\xi-\frac{a_1-a_2}{4c_1}\right)^2+\left(\eta-\frac{a_1+a_2}{4c_1}\right)^2+\zeta^2=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\,c_1}\right)^2.$$

osserviamo che i piani di riflessione A) e B) dividono il semispazio $\zeta>0$ in prismi retti congruenti aventi per base un triangolo con angoli $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$. Fra questi consideriamo per esempio quello racchiuso dai tre piani

$$\text{I)} \quad \eta=0, \qquad \text{II)} \quad \xi-\eta=0, \qquad \text{III)} \quad \xi+\eta=1,$$

nell'interno del quale non penetra alcun piano di riflessione. La porzione del prisma I), II), III) esterna alla sfera di riflessione

$$\text{IV)} \qquad \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{4},$$

forma un tetraedro Π del dipo *c)* con i 4 vertici

$$V_0\equiv(0,0,\infty);\ V_1\equiv(0,0,0);\ V_2\equiv(1,0,0);\ V_3\equiv\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right);$$

che sono tutti a distanza infinita.

Dico che Π *è il poliedro fondamentale di* G_0. Nessuna sfera di riflessione attraversa Π lungo uno spigolo, perchè con ragionamento analogo a quello tenuto a pag. 25 si vedrebbe che l'unica sfera che può attraversare Π lungo uno spigolo ha per equazione

$$\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2}$$

ed essa non appartiene nè alle sfere (8) nè alle (10).

Sostituendo le coordinate dei vertici V_1, V_2, V_3 nelle equazioni (8) e (10) e tenendo conto della equazione (7) si trova che nessuna sfera di riflessione di G_0 può contenere nel suo interno o V_1, o V_2, o V_3.

Osservando che i valori di z nei quattro vertici V_0, V_1, V_2, V_3 sono rispettivamente $z_0=\infty$, $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=\frac{1+i}{2}$ col birapporto $\Omega=\frac{1+i}{2}\neq-1$, segue che i movimenti di 1.ª specie che trasformano π in se formano un Vierergruppe, e le sostituzioni corrispondenti sono:

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}i, & -i\\ 1+i, & -i\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0, & -1\\ i(1+i), & 0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}-(1+i), & i\\ -(1+i), & (1+i)\end{pmatrix}.$$

Nessuna di esse, salvo la prima (l'identità), appartiene a G_0.

Combinando queste quattro sostituzioni con la riflessione sul piano $\xi=\frac{1}{2}$,

$$z'=-z_0+1,$$

che riproduce Π, abbiamo le 4 sostituzioni di 2.ª specie

$$\begin{pmatrix}-i, & i\\ 0, & i\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}i, & 0\\ i(1-i), & -1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1+i, & -1\\ 1+i, & 0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0, & 1\\ i(1+i), & -i(1+i)\end{pmatrix};$$

e nessuna di esse appartiene a G_0.

Da quanto si è detto segue che Π è il poliedro fondamentale di G.

CAPITOLO II.

Sulle divisioni regolari dello spazio non-euclideo in tetraedri con tre vertici impropri e uno proprio.

5. Per determinare tutti i possibili tetraedri con un solo vertice proprio, che effettuano la divisione regolare dello spazio iperbolico S ci serviremo della rappresentazione conforme di S entro la sfera limite Σ. Sia Π un tetraedro con un solo vertice proprio che effettui la divisione regolare di S. Chiamando con Π' il tetraedro imagine, possiamo supporre che il vertice proprio V_0 di Π coincida col centro di Σ. Indicheremo con V_1, V_2, V_3 i vertici impropri di Π' e con $\frac{\pi}{a_{i,k}}$ $(a_{i,k}=a_{k,i})$ la misura dell'angolo diedro di Π' relativo allo spigolo $V_i\,V_k$. Sappiamo che la condizione necessaria e sufficiente perchè Π' effettui una divisione regolare di Σ è che i numeri $a_{i,k}$ siano interi. Inoltre per le ipotesi fatte gli interi $a_{i,k}$ debbono soddisfare alle seguenti relazioni:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{a_{0,1}}+\frac{1}{a_{0,2}}+\frac{1}{a_{0,3}}>1\,,\\ &\frac{1}{a_{0,1}}+\frac{1}{a_{1,2}}+\frac{1}{a_{1,3}}=1\,,\\ &\frac{1}{a_{0,2}}+\frac{1}{a_{1,2}}+\frac{1}{a_{2,3}}=1\,,\\ &\frac{1}{a_{0,3}}+\frac{1}{a_{1,3}}+\frac{1}{a_{2,3}}=1\,,\end{aligned}\right.$$

È lecito supporre

$$a_{0,1}\leq a_{0,2}\leq a_{0,3}$$

Ora le soluzioni intere della prima delle relazioni (11) sono:

$$\begin{array}{ll} \alpha) & a_{0,1}=a_{0,2}=2\;;\;a_{0,3}=n\;;\\ \beta) & a_{0,1}=2\;;\;a_{0,2}=3\;;\;a_{0,3}=3\;;\\ \gamma) & a_{0,1}=2\;;\;a_{0,2}=3\;;\;a_{0,3}=4\;;\\ \delta) & a_{0,1}=2\;;\;a_{0,2}=3\;;\;a_{0,3}=5\;;\end{array}$$

Quanto alla soluzione α) osserviamo che non può avere $n > 3$ perchè in tal caso dalla terza delle eguaglianze (11) segue

$$a_{1,3} = 2\,, \qquad \text{oppure} \qquad a_{2,3} = 2\,,$$

il che per l'ipotesi fatta è incompatibile rispettivamente con la 1.ª o la 2.ª delle eguaglianze (11).

Alle ipotesi $n = 3$, $n = 2$ corrispondono rispettivamente le soluzioni del sistema (11)

$$(a) \qquad a_{0.1} = a_{0,2} = 2 \quad ; \quad a_{0,3} = a_{1,3} = a_{2,3} = 3 \;\; ; \;\; a_{1,2} = 6\,;$$

$$(b) \qquad a_{0,1} = a_{0,2} = a_{0,3} = 2 \;\; ; \;\; a_{1,2} = a_{2,3} = a_{3,1} = 4\,;$$

Nell'ipotesi β), γ), δ) le tre eguaglianze di (11) formano un sistema che non ha soluzioni intere per i numeri $a_{i,k}$.

Segue che le soluzioni di (11) sono date da (*a*) e (*b*).

Inversamente se situiamo il vertice di un angolo triedro P i cui diedri abbiano rispettivamente per misura $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$, ovvero $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$; nel centro di Σ e consideriamo del triedro P la porzione interna a Σ ed esterna alla sfera normale a Σ passante per i punti di incontro degli spigolo di P con Σ, otterremo un tetraedro P per il quale restano rispettivamente verificate le (*a*) o le (*b*). Segue: *Esistono due sole divisioni regolari dello spazio iperbolico in tetraedri con un vertice proprio e 3 impropri.*

Nei numeri 6 e 7 daremo la costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti a ciascuna divisione.

6. Consideriamo il gruppo G_0 costante delle sostituzioni di 1.ª e 2.ª specie

$$(1) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,; \qquad\qquad (2) \qquad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}\,;$$

a determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1\,,$$

i cui coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono interi del campo $(1, \varepsilon)$, essendo $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ per i quali siano soddisfatte le congruenze

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 , \qquad (\text{mod. } 1 - \varepsilon) .$$

Dico che il poliedro fondamentale di G_0 è un tetraedro del tipo a).

Analogamente a quanto si è detto precedentemente risulta, che il periodo delle sostituzioni (1) ellittiche può essere o 2, o 3, o 6; onde *se due sfere di riflessione di* G_0 *si attraversano, esse si tagliano sotto, angoli* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Ricerchiamo tutte le riflessioni contenute in G_0. Se è $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ la (2) rappresenterà una riflessione se è della forma

$$z' = \frac{(a_1 + a_2\varepsilon) z_0 + i b_1 \sqrt{3}}{i c_1 \sqrt{3} z_0 + (a_1 + a_2 \varepsilon)} , \tag{12}$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi razionali soddisfacenti all'equazione

$$(a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 + 12 b_1 c_1 = 4 . \tag{13}$$

I corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione

$$\eta = \frac{b\sqrt{3}}{2} ; \qquad \xi\sqrt{3} \pm \eta = b\sqrt{3} ; \tag{A}$$

b percorrendo tutti gli interi razionali, mentre le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 - 2a_1}{2c_1\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt{3}}\right)^2 \tag{14}$$

Se è poi $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ la (2) rappresenterà una riflessione se è della forma:

$$z' = \frac{(a_1 + a_2\varepsilon) z_0 + 3 b_1}{3 c_1 z_0 - (a_1 + a_2 \varepsilon^2)} , \tag{15}$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi razionali tali che sia

$$(a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 + 36 b_1 c_1 = 4 . \tag{16}$$

I corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione

$$\text{(B)} \qquad \xi = \frac{3b}{2} \; ; \qquad \xi \pm \eta \sqrt{3} = 3b$$

b percorrendo tutti gli interi razionali, mentre le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\text{(17)} \qquad \left(\xi - \frac{2a_1 - a_2}{6c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{3}}{6c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{3c_1}\right)^2 .$$

I piani di riflessione (A) e (B) dividono il semispazio $\zeta > 0$ in prismi triangolari retti congruenti aventi per base sul piano limite un triangolo con angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$. Si consideri fra questi prismi quello racchiuso dai tre piani

$$\text{I)} \quad \eta = 0 \; ; \qquad \text{II)} \quad \xi = \eta\sqrt{3} \; ; \qquad \text{III)} \quad \xi\sqrt{3} + \eta = \sqrt{3} \; ;$$

nell'interno del quale non penetra alcun piano di riflessione. La porzione del prisma I), II), III) esterna alla sfera di riflessione

$$\text{IV)} \qquad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3}$$

forma un tetraedro Π del tipo a) con i 4 vertici

$$V_0 \equiv \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right) ; \; V_1 \equiv (0, 0, \infty) ; \; V_2 \equiv (0, 0, 0) ; \; V_3 \equiv (1, 0, 0)$$

Dico che Π è il tetraedro fondamentale di G_0.

Nessuna sfera di riflessione può attraversare Π lungo uno spigolo, perchè con ragionamento analogo a quello tenuto nei numeri precedenti si vedrebbe che le uniche sfere, che possono attraversare Π lungo uno spigolo sono:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 ,$$

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 1 ,$$

$$\left(\xi - \frac{2}{3}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{4}{9} ,$$

$$(\xi - 1)^2 + \left(\eta + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{4}{3} ,$$

e nessuna di esse appartiene alle (14) o (17). Sostituendo le coordinate dei vertici V_0, V_2, V_3 nelle equazioni (14) e (17) e tenendo conto delle (13) e (16) facilmente si trova che nessuna sfera di riflessione di G_0 può contenere nel suo interno V_0, V_2, V_3. Facilmente si trova che esiste oltre l'identità un solo movimento che trasforma Π in se la cui sostituzione corrispondente è:

$$z' = \frac{1}{z_0}$$

e non appartiene perciò a G_0.

Segue che Π è il poliedro fondamentale di G_0.

7. Consideriamo il gruppo G_0 costante delle sostituzioni

$$(1) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad\qquad (2) \qquad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta},$$

a determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, i,$$

i cui coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono interi del campo $(1, i)$ e per i quali sia inoltre soddisfatta la congruenza:

$$\gamma \equiv 0 \qquad \text{(mod. 2)}.$$

Facilmente si prova che le sostituzioni ellittiche (1) sono a periodo 2 e 4, onde *se due sfere di riflessione di* G_0 *si attraversano esse si tagliano secondo l'angolo* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

Ricerchiamo tutte le riflessioni contenute in G_0. Se è $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ la (2) rappresenterà una riflessione se è della forma:

$$(18) \qquad z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + i b_1}{2 i c_1 z_0 + (a_1 - i a_2)},$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi razionali soddisfacenti all'equazione

$$(19) \qquad a_1^2 + a_2^2 + 2 b_1 c_1 = 1.$$

I corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione

A) $$\xi = \frac{b}{2}\,; \qquad \eta = \frac{b}{2}\,;$$

b percorrendo tutti gli interi razionali, mentre le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione

(20) $$\left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2$$

Se è poi $\alpha\delta - \beta\gamma = i$ la (2) rappresenterà una riflessione se è della forma

(21) $$z' = \frac{(a_1 + ia_2)z_0 + b_1(1-i)}{2c_1(1-i)z_0 + (a_1 - ia_2)}\,,$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi razionali soddisfacenti all'equazione

(22) $$a_1^2 + a_2^2 + 4\,b_1\,e_1 = 1\,.$$

I corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione

B) $$\xi \pm \eta = b$$

b percorrendo tutti gli interi razionali, e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione

(23) $$\left(\xi - \frac{a_1 - a_2}{4c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1 - a_2}{4c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{8\,c_1^2}\,.$$

I piani di riflessione A) e B) dividono il semispazio $\zeta > 0$ in prismi triangolari retti congruenti, aventi per base sul piano limite un triangolo con angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$. Si consideri fra questi prismi quello racchiuso dai 3 piani

I) $\eta = 0\,;$ II) $\xi = \frac{1}{2}\,;$ III) $\xi - \eta = 0\,;$

e di esso consideriamo la porzione esterna alla sfera di riflessione

IV) $$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}\,,$$

la quale forma un tetraedro Π del tipo (*b*) con i quattro vertici

$$V_0 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right); \; V_1 \equiv (0, 0, 0); \; V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right); \; V_3 \equiv (0, 0, \infty).$$

Π è il tetraedro fondamentale di G_0.

Infatti nessuna sfera di riflessione attraversa Π lungo uno spigolo, perchè con considerazioni note si trova che le sfere che possono attraversare Π lungo uno spigolo sono:

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}$$

e nessuna di esse appartiene alle (20) o alle (23).

Tenendo conto delle equazioni (20) e (23) e delle (19) e (22) si trova che nessuna sfera di riflessione può contenere nel suo interno V_0, V_1, V_2.

Ai movimenti di 1.ª specie che trasformano Π in se corrispondono le sostituzioni

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}; \; \begin{pmatrix} 0, & i \\ -2, & 1+i \end{pmatrix}; \; \begin{pmatrix} -(1+i), & i \\ -2, & 0 \end{pmatrix}$$

che formano un gruppo ciclico del 3.º ordine. Nessuna di queste sostituzioni, eccettuata la prima (l'identità), appartiene a G_0. Le altre sostituzioni di 2.ª specie corrispondenti a movimenti di 2.ª specie che riportano Π in se, si ottengono combinando le tre sostituzioni precedenti con la riflessione

$$z' = \frac{z_0 + \frac{1+i}{2}}{i}$$

che trasforma Π in se e non è di G_0. Si otterranno allora tre sostituzioni di 2.ª specie che non sono di G_0.

Segue che Π è il poliedro fondamentale di G_0.

CAPITOLO III

Sulle divisioni regolari dello spazio non euclideo in tetraedri con 2 vertici propri e 2 impropri.

8. — Come nel capitolo precedente, per determinare tutti i tetraedri Π che effettuano la divisione regolare dello spazio non euclideo S, aventi 2 vertici propri e 2 impropri, ci serviremo della rappresentazione conforme di S entro la sfera limite Σ. Siano V_0 e V_1 i vertici propri del tetraedro Π' immagine di Π in Σ, e V_1, V_2 gli impropri. Indicando con $\frac{\pi}{a_{i,k}}$ ($a_{i,k} = a_{k\,i}$, $a_{i,k}$ intero) la misura del diedro $V_i V_k$ nell'ipotesi che Π' effettui la divisione regolare dl Σ_1 gli interi $a_{i,k}$ debbono soddisfare alle relazioni:

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a_{0,1}} + \dfrac{1}{a_{0,2}} + \dfrac{1}{a_{0,3}} > 1, \\[2ex] \dfrac{1}{a_{0,1}} + \dfrac{1}{a_{1,2}} + \dfrac{1}{a_{1,3}} > 1, \end{cases}$$

$$(25)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a_{0,2}} + \dfrac{1}{a_{1,2}} + \dfrac{1}{a_{2,3}} = 1, \\[2ex] \dfrac{1}{a_{0.3}} + \dfrac{1}{a_{1,3}} + \dfrac{1}{a_{2,3}} = 1. \end{cases}$$

Determiniamo ora tutte le soluzioni essenzialmente distinte delle (25), che soddisfino anche alle (24).

Dalle (25) si ha $a_{0,2} \leq 6$; $a_{0,3} \leq 6$. Dalle (24) segue tenendo conto delle (25) $a_{0,1} < 6$. Supponendo poi come è lecito $a_{0,2} < a_{0,3}$, una discussione elementare del sistema (24), (25) ci fa concludere che le soluzioni cercate sono:

(*a*) $a_{0,1} = 2$; $a_{0,2} = 2$; $a_{0,3} = 2$; $a_{1,2} = 3$; $a_{1,3} = 3$; $a_{2,3} = 6$;

(*b*) $a_{0,1} = 2$; $a_{0,2} = 2$; $a_{0,3} = 3$; $a_{1,2} = 3$; $a_{1.3} = 2$; $a_{2,3} = 6$;

(*c*) $a_{0,1} = 2$; $a_{0,2} = 2$; $a_{0,3} = 4$; $a_{1,2} = 4$; $a_{1,3} = 2$; $a_{2,3} = 4$;

(*d*) $a_{0,1} = 2$; $a_{0,2} = 2$; $a_{0,3} = 6$; $a_{1,2} = 6$; $a_{1,3} = 2$; $a_{2,3} = 3$;

(*e*) $a_{0,1}=2$; $a_{0,2}=3$; $a_{0,3}=3$; $a_{1,2}=3$; $a_{1,3}=3$; $a_{2,3}=3$;

(*f*) $a_{0,1}=3$; $a_{0,2}=2$; $a_{0,3}=3$; $a_{1,2}=3$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,3}=6$;

(*g*) $a_{0,1}=3$; $a_{0,2}=2$; $a_{0,3}=4$; $a_{1,2}=4$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,3}=4$;

(*h*) $a_{0,1}=4$; $a_{0,2}=2$; $a_{0,3}=3$; $a_{1,2}=3$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,3}=6$;

(*i*) $a_{0,1}=5$; $a_{0,2}=2$; $a_{0,3}=3$; $a_{1,2}=3$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,3}=6$.

Nei numeri seguenti troveremo che ad ognuna delle soluzioni trovate corrisponde un tetraedro Π' che risulta perfettamente determinato assegnato che sia un suo angolo triedro. Segue: *Esistono soltanto nove divisioni regolari dello spazio iperbolico in tetraedri che abbiano 2 vertici propri e 2 impropri.*

9. — Consideriamo il gruppo G_0 costante delle sostituzioni di 1.ª e 2.ª specie

$$(1) \qquad z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\,; \qquad\qquad (2) \qquad z'=\frac{\alpha z_0+\beta}{\gamma z_0+\delta}\,;$$

a determinante

$$\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1\,,$$

essendo i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, \varepsilon)$ con $\varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ per i quali sia inoltre soddisfatta la congruenza:

$$\gamma\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ 2)\,.$$

Dico che il poliedro fondamentale di G_0 è un tetraedro del tipo (*a*). Come al solito si dimostra che i periodi delle sostituzioni ellittiche (1) sono $2, 3, 6$ onde due sfere di riflessione possono tagliarsi soltanto sotto gli angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Se è $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ la (2) rappresenterà una riflessione se è della forma:

$$(26) \qquad z'=\frac{(a_1+a_2\varepsilon)\,z_0+ib_1\sqrt{3}}{2ic_1\sqrt{3}\,z_0+(a_1+a_2\varepsilon^2)}\,,$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi razionali soddisfacenti all'equazione

$$(27) \qquad (a_2 - 2a)^2 + 3a_2^2 + 24\, b_1 c_1 = 4$$

I corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione

$$\text{A)} \qquad \eta = \frac{b\sqrt{3}}{2}; \qquad \xi\sqrt{3} \pm \eta = b\sqrt{3}$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione

$$(28) \qquad \left(\xi - \frac{a_2}{4c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 - 2a_1}{4c_1\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2c_1\sqrt{3}}\right)^2.$$

Se è $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ la (2) rappresenterà una riflessione se è della forma

$$(29) \qquad z' = \frac{(a_1 + a_2\varepsilon)\, z_0 + b_1}{2c_1 z_0 - (a_1 + a_2\varepsilon^2)}$$

con a_1, a_2, b_1, c_1 interi razionali, tali che sia

$$(30) \qquad (a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 + 8\, b_1 c_1 = 4$$

I piani di riflessione corrispondenti a (29) hanno per equazione

$$\text{B)} \qquad \xi = \frac{b}{2}; \qquad \xi \pm \eta\sqrt{3} = b,$$

e le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione

$$(31) \qquad \left(\xi - \frac{2a_1 - a_2}{4c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{3}}{4c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2$$

I piani di riflessione A) e B) dividono il semispazio $\zeta > 0$ in prismi triangolari retti congruenti, fra i quali considereremo per es. quello racchiuso dai tre piani:

$$\text{I)} \quad \eta = 0; \qquad \text{II)} \quad \xi = \frac{1}{2}; \qquad \text{III)} \quad \xi = \eta\sqrt{3}.$$

La porzione del prisma I), II), III) esterna alla sfera di riflessione:

IV) $$\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{4},$$

forma un tetraedro Π del tipo (a) avente i 4 vertici

$$V_0\equiv\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right); \quad V_1\equiv\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right);$$
$$V_2\equiv(0, 0, 0); \quad V_3\equiv(0, 0, \infty).$$

Dico che Π è il poliedro fondamentale di G_0. Osservando infatti che le sfere che dividono secondo due diedri aventi per misura $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ il diedro retto $V_0 V_2$ sono

$$\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\zeta^2=1,$$
$$\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{3},$$

che quelle che effettuano un'analoga divisione per il diedro $V_0 V_1$ sono

$$\left(\xi+\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=1,$$
$$\left(\xi-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\eta^2+\zeta^2=\frac{1}{3},$$

e che infine quella che bisega in due diedri $\frac{\pi}{6}$ $V_1 V_3$ è

$$\left(\xi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\eta+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\frac{3}{4},$$

e che nessuna di esse appartiene alle (28) o (31) si conclude che nessuna sfera di riflessione può attraversare Π lungo uno spigolo.

Tenendo conto delle (27) e (30) facilmente si verifica che nessuna sfera (28) o (31) può contenere nel suo interno V_0, V_1, V_2.

L'unico movimento oltre l'identità che trasforma Π in se stesso ò di 2.ª specie e ad esso corrisponde la sostituzione

$$z' = \frac{1}{2 z_0}$$

che non è di G_0. Segue che Π è il poliedro fondamentale di G_0.

10. — Consideriamo il gruppo G_0 costante delle sostituzioni di 1.ª e 2.ª specie

$$(1) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,; \qquad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}\,;$$

a determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

essendo i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, \varepsilon)$ con $\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ per i quali sia inoltre soddisfatta la congruenza

$$\gamma \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ 1 - \varepsilon)\,.$$

Dico che il poliedro fondamentale di G_0 è un tetraedro del tipo *b*).

Essendo i periodi delle sostituzioni ellittiche (1) 2, 3, 6 due sfere di riflessione di G_0 possono soltanto attraversarsi sotto gli angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Se è $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ la (2) rappresenterà una riflessione se è della forma

$$(32) \qquad z' = \frac{(a_1 + a_2\varepsilon) z_0 + i b_1 \sqrt{3}}{i c_1 \sqrt{3} z_0 + (a_1 + a_2 \varepsilon^2)}\,,$$

con a_1, a_2, b_1, c_1 interi razionali tali che sia

$$(33) \qquad (x_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 + 12 b_1 c_1 = 4\,.$$

Le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione

$$\left(\xi-\frac{a_2}{2c_1}\right)^2+\left(\eta-\frac{a_2-2a_1}{2c_1\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\left(\frac{1}{c_1\sqrt{3}}\right)^2 \tag{34}$$

e i corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione

$$\eta=\frac{b\sqrt{3}}{2}\ ; \qquad \xi\sqrt{3}\pm\eta=b\sqrt{3}\,. \tag{A}$$

Se è poi $\alpha\delta-\beta\gamma=-1$ la (2) rappresenterà una riflessione se è della forma

$$z'=\frac{(a_1+a_2\varepsilon)\,z_0+b_1}{3\,c_1 z_0-(a_1+a_2\varepsilon^2)}\ , \tag{35}$$

con a_1, a_2, b_1, c_1 interi razionali soddisfacenti alla (33).

I piani di riflessioni hanno per equazione

$$\xi=\frac{b}{2}\ ; \qquad \xi\pm\eta\sqrt{3}=b\ ; \tag{B}$$

e le sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi-\frac{2a_1-a_2}{6c_1}\right)^2+\left(\eta-\frac{a_2\sqrt{3}}{6c_1}\right)^2+\zeta^2=\left(\frac{1}{3c_1}\right)^2. \tag{36}$$

Fra i prismi triangolari retti congruenti in cui i piani di riflessione (A) e (B) dividono il semispazio $\zeta>0$ scegliamo quello racchiuso dai tre piani

I) $\eta=0$; II) $\xi=\frac{1}{2}$; III) $\xi=\eta\sqrt{3}$.

La porzione del prisma I), II), III) esterna alla sfera di riflessione

$$\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{3}, \tag{IV}$$

forma un tetraedro Π del tipo *b)* con i vertici

$$V_0\equiv\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ ;\quad V_1\equiv\left(\frac{1}{2},\ 0\ ,\ \frac{1}{2}\right);$$

$$V_2\equiv(0\ ,\ 0\ ,\ 0)\ ;\quad V_3\equiv(0\ ,\ 0\ ,\ \infty)\,.$$

Π è il poliedro fondamentale di G_0. Infatti nessuna sfera di riflessione (34) o (36) può contenere nel suo interno un vertice di Π o attraversare Π lungo uno spigolo.

Esiste un solo movimento oltre l'identità, corrispondente alla sostituzione

$$z' = \frac{2}{(1+2\varepsilon)z}$$

che trasforma Π in se e non appartiene a G_0. Segue allora che Π è il poliedro fondamentale di G_0.

11. — Consideriamo tutte le sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

i cui coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono interi del campo $(1, i)$, essendo

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, i, 2, 2i,$$

e per i quali, se $\alpha\delta - \beta\gamma = 1, i$ sia soddisfatta la congruenza

$$\gamma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2),$$

e se $\alpha\delta - \beta\gamma = 2, 2i$ siano soddisfatte le altre

$$\alpha \equiv \gamma \equiv \delta \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Queste sostituzioni formano un gruppo G, come facilmente si verifica osservando che componendo 2 sostituzioni a determinante 2 o $2i$ si ottiene una sostituzione avente il 1.°, 2.°, 4.° coefficiente divisibile per 2 e il terzo per 4. Ampliamo il gruppo G con la riflessione $z' = z_0$ ed avremo il gruppo ampliato G_0 costante delle sostituzioni di 1.ª e 2.ª specie

$$(1) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \begin{cases} \alpha\delta - \beta\gamma = 1, i & \gamma \equiv 0 \ (\text{mod. } 2), \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 2, 2i & \alpha \equiv \gamma \equiv \delta \equiv 0 \ (\text{mod. } 2). \end{cases}$$

$$(2) \qquad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \quad \begin{cases} \alpha\delta - \beta\gamma = 1, i & \gamma \equiv 0 \ (\text{mod. } 2), \\ \alpha\delta - \beta\gamma = 2, 2i & \alpha \equiv \gamma \equiv \delta \equiv 0 \ (\text{mod. } 2). \end{cases}$$

Dimostreremo che il poliedro fondamentale di G_0 è un tetraedro del tipo c).

Le sostituzioni ellittiche (1) di G non possono avere che il periodo 2 o 4, conseguentemente se due sfere di riflessione di G_0 si attraversano, esse si tagliano sotto l'angolo $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

I piani di riflessione di G_0 hanno per equazione

$$\text{A)} \qquad \xi = \frac{b}{2}\,; \qquad \eta = \frac{b}{2}\,; \qquad \xi \pm \eta = b\,.$$

Il gruppo G_0 ha 3 tipi di sfere di riflessione secondo che sia $\alpha\delta - \beta\gamma = 1, i, 2$ che hanno rispettivamente per equazione

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4c_1^2}\,, \tag{37}$$

$$\left(\xi - \frac{a_1 - a_2}{4c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1 + a_2}{4c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{8c_1^2}\,, \tag{38}$$

$$\left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2c_1^2}\,, \tag{39}$$

soddisfacendo i numeri interi razionali a_1, a_2, c_1 rispettivamente alle congruenze

$$a_1^2 + a_2^2 \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod.}\ 2c_1)\,,$$
$$a_1^2 + a_2^2 \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod.}\ 4c_1)\,,$$
$$2(a_1^2 + a_2^2) \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod.}\ c_1)\,.$$

Facilmente si verifica che G_0 non contiene riflessioni a determinante $2i$.

Fra i prismi triangolari retti congruenti in cui i piani di riflessione A) dividono il semispazio $\zeta > 0$ scegliamo quello racchiuso dai tre piani

$$\text{I)} \quad \eta = 0\,; \qquad \text{II)} \quad \xi = \frac{1}{2}\,; \qquad \text{III)} \quad \xi - \eta = 0\,.$$

La porzione del prisma I), II), III) esterna alla sfera di riflessione

$$\text{IV)} \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2}$$

forma un tetraedro Π del tipo (*c*) con i vertici

$$V_0 \equiv \left(0\,,\,0\,,\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\,;\quad V_1 \equiv \left(\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,\frac{1}{2}\right)\,;\quad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,,\,0\right)\,;$$

$$V_3 \equiv (0\,,\,0\,,\,\infty)\,.$$

Dico che Π è il poliedro fondamentale di G_0. Osservando che le sfere di riflessione che penetrano in Π bisegando il diedro $V_0 V_1$ o $V_0 V_3$ sono

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \zeta^2 = 1$$

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 1$$

e nessuna di esse appartiene alle (37), (38), (39), segue che nessuna sfera di riflessione può penetrare in Π lungo uno spigolo. Sostituendo nelle (37), (38), (39) per ξ, η, ζ le coordinate di V_0, V_1, V_2 si ricava che nessuna sfera di riflessione di G_0 può contenere nel suo interno un vertice di Π.

Esiste un solo movimento di 1.ª specie, oltre l'identità, corrispondente alla sostituzione

$$z' = \frac{(1-i)\,z - 1}{2z - (1+i)}\,,$$

che trasforma Π in sè stesso e non appartiene a G_0.

Segue, che Π è il poliedro fondamentale di G_0.

12. — Consideriamo il gruppo G di sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

a determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ essendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1\,,\varepsilon)$ con $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ per i quali siano soddisfatte le congruenze

$$\alpha \equiv \delta \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 1 - \varepsilon),$$

ovvero le altre

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 1 - \varepsilon).$$

Ampliando G con la riflessione $z' = z_0$, avremo il gruppo G_0 costante delle sostituzioni:

$$\left. \begin{array}{l} z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \\ z' = \dfrac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \end{array} \right\} \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \,, \text{ e } \left\{ \begin{array}{l} \alpha \equiv \delta \equiv 0 \quad (\text{mod. } 1 - \varepsilon), \\ \text{ovvero} \\ \beta \equiv \gamma \equiv 0 \quad (\text{mod. } 1 - \varepsilon). \end{array} \right.$$

Dimostreremo che il poliedro fondamentale di G_0 è un tetraedro del tipo (d).

Poichè le sostituzioni ellittiche di G non possono avere che i periodi 2, 3, 6 se due sfere di riflessione di G_0 si attraversano, esse si tagliano sotto uno degli angoli $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$.

Se $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ la (2) rappresenterà una riflessione se è della forma:

$$z' = \frac{(a_1 + a_2\varepsilon)\, z_0 + i b_1 \sqrt{3}}{i c_1 \sqrt{3}\, z_0 + (a_1 + a_2 \varepsilon)}, \tag{40}$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi razionali soddisfacenti all' equazione

$$(a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 + 12 b_1 c_2 = 4. \tag{41}$$

I corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione

$$\text{A)} \qquad \eta = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \qquad \xi\sqrt{3} \pm \eta = b\sqrt{3},$$

e le corrispondenti sfere di riflessione

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 - 2a_1}{2c_1\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}\,c_1}\right)^2. \tag{42}$$

Se è $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ la (2) rappresenterà una riflessione se è della forma

$$z' = \frac{(a_1 + a_3 \varepsilon) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 + a_2 \varepsilon^2)}, \tag{43}$$

con a_1, a_2, b_1, c_1 interi razionali tali che sia

$$(a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 + 4b_1 c_1 = 4; \tag{44}$$

con la condizione che se è

$$c_1 \equiv\!\!\!\!\!\!\diagup\; 0 \quad (\text{mod. } 3) \qquad \text{e quindi} \qquad b \equiv\!\!\!\!\!\!\diagup\; 0 \quad \text{mod. } 3)$$

sia

$$a_1 + a_2 \varepsilon \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 1 - \varepsilon).$$

I corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione

$$\text{B)} \qquad \xi = \frac{3b}{2}; \qquad \xi \pm \sqrt{3}\,\eta = b$$

e le corrispondenti sfere di riflessione

$$\left(\xi - \frac{2a_1 - a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{3}}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1}\right)^2. \tag{45}$$

Fra i prismi retti congruenti a base triangolare in cui i piani A) e B) dividono il semispazio $\zeta > 0$ consideriamo quello racchiuso dai tre piani:

$$\text{I)} \quad \eta = 0; \qquad \text{II)} \quad \xi = \eta\sqrt{3}; \qquad \text{III)} \quad \xi\sqrt{3} + \eta = \sqrt{3}.$$

La porzione del prisma I), II), III) esterna alla sfera di riflessione

$$\text{IV)} \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

forma un tetraedro Π del tipo (d) con i quattro vertici

$$V_0 \equiv (0, 0, 1); \quad V_1 \equiv \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right); \quad V_2 \equiv (1, 0, 0);$$

$$V_3 \equiv (0, 0, \infty).$$

Dico che Π è il poliedro fondamentale di G_0.

Osservando che le sfere che penetrano in Π lungo lo spigolo $V_0 V_2$ dividendolo in 2 diedri aventi per misura rispettivamente $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ sono

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{5}{4},$$

$$\xi^2 + (\eta - \sqrt{3})^2 + \zeta^2 = 2,$$

e le analoghe per lo spigolo $V_0 V_1$ sono

$$\left(\xi - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{5}{4},$$

$$\left(\xi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\eta + \frac{3}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 2,$$

e che nessuna di esse appartiene alle (42), (45) si conclude che nessuna sfera di riflessione penetra in Π lungo uno spigolo. Si verifica pure che nessuna sfera (42) o (45) può contenere nel suo interno un vertice di Π. Esiste, oltre l'identità un solo movimento di 1.ª specie cui corrisponde la sostituzione

$$z' = \frac{\varepsilon z + 1}{\varepsilon z - \varepsilon}$$

che trasforma Π in sè e non appartiene a G. Segue che Π è il poliedro fondamentale di G_0.

13. — Se noi associamo al tetraedro fondamentale del gruppo G_0 (v. numero 9) costante delle sostituzioni

$$\left.\begin{aligned} z' &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \\ z' &= \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \end{aligned}\right\} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \,, \qquad \gamma \equiv 0 \pmod{2},$$

il simmetrico rispetto al piano

$$\eta = 0$$

otteniamo il poliedro fondamentale Π' del gruppo G costante delle sostituzioni di 1.ª specie

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

a determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

essendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, \varepsilon)$ $\left(\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ per i quali sia soddisfatta la congruenza

$$\gamma \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Infatti all'unico movimento di 1.ª specie, oltre l'identità che trasforma Π' in se corrisponde la sostituzione

$$z' = \frac{1}{2z}$$

che non è di G_0. Il tetraedro Π' è del tipo (*e*). Esso è la porzione del semispazio $\zeta > 0$ interna al prisma

I) $\xi = \eta\sqrt{3}$; II) $\xi = -\eta\sqrt{3}$; III) $\xi = \frac{1}{2}$;

ed esterna alla sfera

IV) $$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4},$$

avente i quattro vertici

$$V_0 \equiv \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right); \quad V_1 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right);$$
$$V_3 \equiv (0, 0, 0); \quad V_3 \equiv (0, 0, 0).$$

14. — Dalle costruzioni date per i tetraedri corrispondenti ai tipi (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*e*) risulta l'univocità di essi fissato che sia un triedro del tetraedro. Nei numeri seguenti dimostrerò l'effettiva esistenza e l'univocità nel senso anzidetto dei tetraedri corrispondenti

ai tipi *f)*, *g)*, *h)*, *i)* e darò i gruppi corrispondenti mediante le quattro riflessioni generatrici.

15. — Sia il prisma retto triangolare

$$\text{I)}\quad \eta = 0\ ; \qquad \text{II)}\quad \xi = 1\ ; \qquad \text{III)}\quad \xi = \eta\sqrt{3}$$

uno degli angoli triedri di un tetraedro Π del tipo *f)*.

È chiaro che ad ogni sfera che abbia il suo centro sulla retta $\xi = \eta\sqrt{3}$, che passi per il punto $(0, 0, 0)$ e tagli il piano $\xi = 1$ dalla parte interna al prisma I), II), III) sotto un angolo $\frac{\pi}{3}$ corrisponde un tetraedro Π del tipo *f)*.

Chiamando con $(y_0\sqrt{3}, y_0, 0)$ le coordinate del centro di tale sfera, si ha per y_0 l'equazione

$$\pm\left(1 - y_0\sqrt{3}\right) = y_0\,,$$

valendo il segno $+$ o $-$ secondo che sia $1 - y_0\sqrt{3}$ positivo o negativo. Ma escludiamo l'ipotesi $1 < y_0\sqrt{3}$ perchè allora la sfera corrispondente forma col prisma I), II), III) un tetraedro con un angolo dietro $= \frac{2\pi}{3}$ si ha perciò

$$x_0 = y_0\sqrt{3} = \sqrt{3}\,.\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}\ ;\ y_0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\ ;$$

Esiste quindi un solo poliedro Π del tipo *f)* che si ottiene considerando la porzione del prisma I), II), III) esterna alla sfera

$$\text{IV)}\quad \left(\xi - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \zeta^2 = (\sqrt{3}-1)^2.$$

Il gruppo G_0 che ha per poliedro fondamentale Π ha per sostituzioni generatrici le 4 riflessioni

$$z' = z_0\ ; \qquad z' = -z_0 + 2\ ; \qquad z' = \frac{\varepsilon z_0}{-\varepsilon^2}\ ; \qquad z' = \frac{\varepsilon z_0}{\dfrac{i z_0}{\sqrt{3}-1} + \varepsilon^2}\,.$$

16. — Analogamente al n. 15 si prova l'esistenza e l'univocità dei tetraedri corrispondenti ai tipi *g)*, *h)*, *i)*.

La porzione del prisma

$$\text{I)}\quad \eta = 0\,, \qquad \text{II)}\quad \xi = 1\,; \qquad \text{III)}\quad \xi = \eta\,,$$

esterna alla sfera

$$\text{IV)}\quad (\xi - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1))^2 + (\eta - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1))^2 + \zeta^2 = 4(\sqrt{2}-1)^2$$

forma un tetraedro del tipo *g)*. Il gruppo G_0 corrispondente ha per riflessioni generatrici

$$z' = z_3\,; \qquad z' = -z_0 + 2\,; \qquad z' = i z_0\,; \qquad z' = \frac{z_0}{\dfrac{1-i}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} z_0 + i}\,.$$

Così pure la porzione dal prisma

$$\text{I)}\quad \eta = 0\,; \qquad \text{II)}\quad \xi = 1\,; \qquad \text{III)}\quad \xi = \eta\sqrt{3}\,,$$

esterna alla sfera

$$\text{IV)}\quad (\xi - \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2}))^2 + (\eta - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 + \zeta^2 = 4(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2\,,$$

forma un tetraedro del tipo *h)*. Il gruppo G_0 corrispondente ha per riflessioni generatrici

$$z' = z_0\,; \qquad z' = -z_4 + 2\,; \qquad z' = \frac{\varepsilon z_0}{-\varepsilon^2}\,; \qquad z' = \frac{\varepsilon z_0}{\dfrac{i z_0}{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \varepsilon^2}\,.$$

Infine la porzione del prisma

$$\text{I)}\quad \eta = 0\,; \qquad \text{II)}\quad \xi = 1\,; \qquad \text{III)}\quad \xi = \sqrt{3}\,,$$

esterna alla sfera

$$\left(\xi - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{16}{(\sqrt{5}+2\sqrt{3}+1)^2}\,.$$

forma un tetraedro del tipo *i)*. Il gruppo G_0 corrispondente ha per riflessioni generatrici

$$z'=z_0\ ;\qquad z'=-z_0+2\ ;\qquad z'=\frac{\varepsilon z_0}{-\varepsilon^2}\ ;\qquad z'=\frac{\varepsilon z_0}{i\,\dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{3}}+1}{4}\,z_0+\varepsilon^2}\ .$$

Capitolo IV.

Sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in tetraedri con un solo vertice improprio.

17. — Come nei 2 capitoli precedenti, per determinare tutti i tetraedri Π con un solo vertice improprio, che effettuano la divisione dello spazio iperbolico S, ci serviremo della rappresentazione conforme di S entro la sfera limite di Σ.

Sia V_0 il vertice improprio di Π' imagine di Π in Σ, e V_1, V_2, V_3 i vertici propri di Π'. Usando le solite notazioni si ha che la condizione necessaria e sufficiente perchè Π' effettui la divisione regolare di Σ è che i numeri $a_{i,k}$ siano interi e soddisfino alle relazioni:

$$\frac{1}{a_{0,1}}+\frac{1}{a_{0,2}}+\frac{1}{a_{0,3}}=1,\tag{46}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{a_{9,1}}+\frac{1}{a_{1,2}}+\frac{1}{a_{1,3}}>1,\\&\frac{1}{a_{0,2}}+\frac{1}{a_{1,2}}+\frac{1}{a_{2,3}}>1,\\&\frac{1}{a_{0,3}}+\frac{1}{a_{1,3}}+\frac{1}{a_{2,3}}>1.\end{aligned}\right.\tag{47}$$

È lecito supporre $a_{0,1}\leq a_{0,2}\leq a_{0,2}$. Dalla (46) segue allora $a_{0,1}=2\,,3$. Se è $a_{0,1}=2$ si avrà

$$a_{0,2}=3\ ;\qquad a_{0,3}=6\ ;\tag{α}$$

oppure

$$a_{0,2}=4\ ;\qquad a_{0,3}=4\,.\tag{β}$$

Nell'ipotesi (α) le soluzioni intere del sistema (46), (47) sono:

$\gamma)$ $a_{0,1}=2$; $a_{0,2}=3$; $a_{0,3}=6$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,8}=2$; $a_{1,2}=2$,

$a)$ $a_{0,1}=2$; $a_{0,2}=3$; $a_{0,3}=6$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,3}=2$; $a_{1,2}=3$,

$b)$ $a_{0,1}=2$; $a_{0\,2}=3$; $a_{0,3}=6$; $a_{1,3}=6$; $a_{2\text{I}3}=2$; $a_{1,2}=4$,

$c)$ $a_{0,1}=2$; $a_{012}=3$; $a_{0,3}=6$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,3}=2$; $a_{1,2}=5$.

Nell'ipotesi (β) supponendo come è lecito $a_{1,2}\leq a_{1,3}$ le soluzioni del sistema (46), (47) sono:

$\delta)$ $a_{0,1}=2$; $x_{0,2}=4$; $a_{0,2}=4$; $a_{1,2}=2$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,3}=2$,

$d)$ $a_{0,1}=2$; $a_{0,2}=4$; $a_{0,3}=4$; $a_{1,2}=2$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,3}=3$,

$e)$ $a_{0,1}=2$; $a_{0,2}=4$; $a_{0,3}=4$; $a_{1,2}=2$; $a_{1,3}=3$; $a_{2,3}=2$,

$f)$ $a_{0,1}=2$; $a_{0,2}=4$; $a_{0,3}=4$; $a_{1,2}=3$; $a_{1,3}=3$; $a_{2,3}=2$.

Supposto infine $a_{0,1}=3$ segue $a_{0,2}=a_{0,3}=3$ e supponendo come è lecito $a_{1,2}\leq a_{1,3}\leq a_{2\,3}$, le soluzioni del sistema (46), (47) sono:

$\varepsilon)$ $a_{0,1}=3$; $a_{0,2}=3$; $a_{0,3}=3$; $a_{1,2}=2$; $a_{1,2}=2$; $a_{2,3}=2$,

$g)$ $a_{0,1}=3$; $a_{0,2}=3$; $a_{0,3}=3$; $a_{1,2}=2$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,3}=3$,

$h)$ $a_{0,1}=3$; $a_{0,2}=3$; $a_{0,3}=3$; $a_{1,2}=2$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,3}=4$,

$i)$ $a_{0,1}=3$; $a_{0,2}=3$; $a_{0,2}=3$; $a_{1,2}=2$; $a_{1,3}=2$; $a_{2,3}=5$.

Ma facilmente si vede che non esiste nessun tetraedro Π' soddisfacente alle condizioni (γ), (δ), (ε); però nei numeri seguenti dimostreremo che a ciascuna delle nove soluzioni *a)*, *b)*, *c)*, *d)*, *e)*, *f)*, *g)*, *h)*, *i)* corrisponde un tetraedro Π' dello spazio iperbolico univocamente determinato assegnato che sia un angolo triedro e daremo la definizione aritmetica dei gruppi propriamente discontinui corrispondenti.

Segue: *Esistono soltanto 9 divisioni regolari dello spazio iperbolico in tetraedri aventi un solo vertice improprio e 3 propri.*

18. — Consideiiamo il gruppo G_0 costante delle sostituzioni di 1.ª e 2.ª specie

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \; ; \qquad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}$$

a determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \, ,$$

essendo i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, \varepsilon)$ $\left(\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$.

In una memoria del professor Luigi Bianchi, (vedi — *Mathematischen Annalen* XL. — Sui gruppi di sostituzioni lineare con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari, pag. 364, 365) è dimostrato che la porzione del prisma

$$\text{I)} \quad \eta = 0 \; ; \qquad \text{II)} \quad \xi = \frac{1}{2} \; ; \qquad \text{III)} \quad \xi = \eta\sqrt{3} \; ,$$

esterna alla sfera

$$\text{IV)} \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \, ,$$

forma un tetraedro Π del tipo *a)*, che è il poliedro fondamentale di G_0. Ciò si dimostra come al solito, osservando che Π non è attraversato da nessuna sfera di riflessione, ed è trasformato in se dalla sostituzione identica di G_0. Le quattro riflessioni generatrici del gruppo sono:

$$z' = z_0 \; ; \quad z' = -z_0 + 1 \; ; \quad z' = \frac{\varepsilon z_0}{-\varepsilon^2} \; ; \quad z' = \frac{1}{z_0} \, .$$

19. — Consideriamo il gruppo G costante delle sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \, ,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $\left(1, \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$ per i quali si ha:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1\,, \ \pm 2\,,$$

con la condizione che se è $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ si abbia

$$\beta \equiv 0 \qquad \text{(mod. 2)}$$

se è invece $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 2$,

$$\alpha \equiv \beta \equiv \delta \equiv 0 \qquad \text{(mod. 2)}\,.$$

Che le sostituzioni di G formano gruppo segue subito dall'osservare che componendo due sostituzioni di G a determinante ± 2 si ottiene una sostituzione a determinante ± 1 che appartiene ancora a G.

Ampliamo il gruppo G in G_0 con la riflessione $z' = z_0$.

Dimostrerò che il poliedro fondamentale di G_0 è un tetraedro del tipo *b)*.

Le sostituzioni ellittiche di G sono a periodo $2, 3, 4, 6$ onde se due sfere di riflessione di G_0 si attraversano, esse si tagliano sotto l'angolo $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Le equazioni dei piani di riflessione di G_0 corrispondenti alle riflessioni a determinante ± 1 sono

A) $\eta = b\sqrt{3}\,; \quad \xi\sqrt{3} \pm \eta = b\sqrt{3}\,; \quad \xi = b\,; \quad \xi \pm \eta\sqrt{3} = 2b\,,$

Se è poi $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 2$, essendo per ipotesi $\alpha\delta \equiv 0$ (mod. 2) non può aversi $\gamma = 0$, onde le riflessioni di G_0 a determinante ± 2 ammettono solo sfere di riflessioni.

Secondo che sia $\alpha\delta - \beta\gamma = 1, -1, 2, -2$ le sfere di riflessione di G_0 hanno rispettivamente per equazione:

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 - 2a_1}{2c_1\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt{3}}\right)^2 \tag{48}$$

con i numeri interi a_1, a_2, c_1 soddisfacenti alla congruenza

$$(a_2 - 2_1)^2 + 3a_2^2 \equiv 4 \qquad \text{(mod. } 24\,c_1), \tag{49}$$

oppure

$$(50)\qquad \left(\xi - \frac{2a_1 - a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{3}}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},$$

con

$$(51)\qquad (a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 \equiv 4 \qquad (\mathrm{mod.}\ 8c_1),$$

ovvero

$$(52)\qquad \left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 - 2a_1}{c_1\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{c_1\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

con

$$(53)\qquad 2(a_1^2 + a_2^2 - a_1 a_2) \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod.}\ 3c_1),$$

ed infine

$$(54)\qquad \left(\xi - \frac{2a_1 - a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{3}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{c_1}\right)^2$$

con

$$(55)\qquad 2(a_1^2 + a_2^2 - a_1 a_2) \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod.}\ c_1).$$

I piani di riflessione A) dividono il semispazio $\zeta > 0$ in prismi triangolari retti congruenti. Fra essi consideriamo per es. quello racchiuso dai tre piani

$$\mathrm{I})\quad \eta = 0\,; \qquad \mathrm{II})\quad \xi = 1\,; \qquad \mathrm{III})\quad \xi = \eta\sqrt{3}\,;$$

La porzione del prisma I), II), III) esterna alla sfera

$$\mathrm{IV})\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2,$$

forma un tetraedro Π del tipo (*b*) avente per vertici i punti

$$V_0 \equiv (0, 0, \infty)\,; \quad V_1 \equiv (1, 0, 1)\,;$$

$$V_2 \equiv \left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right); \quad V_3 \equiv \left(0, 0, \frac{2}{\sqrt{2}}\right).$$

Π è il poliedro fondamentale di G_0.

Infatti nessuna sfera di riflessione attraversa Π lungo uno spigolo, perchè le sfere che penetrano in Π dividendo il diedro $V_1 V_3$ o $V_2 V_3$ in due diedri $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ hanno il raggio $=2$ e quelli che dividono gli stessi diedri secondo due angoli $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ hanno il raggio $=2\sqrt{2}$ ovvero $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ e nessuna di esse può perciò appartenere a G_0.

Nessuna sfera di riflessione può contenere nel suo interno un vertice di Π, nè esiste alcun movimento oltre l'identità che trasforma Π in sè. Π è perciò il poliedro fondamentale di G_0.

20. — Consideriamo del prisma retto triangolare

$$\text{I)} \quad \eta = 0 \,; \qquad \text{II)} \quad \xi = 1 \,; \qquad \text{III)} \quad \xi = \eta\sqrt{3}\,,$$

la porzione esterna alla sfera

$$\text{IV)} \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 2\left(3 - \sqrt{5}\right).$$

Si ottiene un tetraedro Π del tipo (c). Il gruppo G_0 corrispondente ha per riflessioni generatrici

$$z' = z_0 \,; \qquad z' = -z_0 + 2 \,; \qquad z' = \frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon z_0} \,; \qquad z' = \frac{2\left(3 - \sqrt{5}\right)}{z_0}\,.$$

21. — In questo numero ci proporremo di caratterizzare aritmeticamente i gruppi corrispondenti alle divisioni dello spazio iperbolico in tetraedri dei tipi *d)*, *e)*, *f)*. Daremo prima il gruppo corrispondente alla divisione del semispazio in tetraedri del tipo *e)*, semplici considerazioni ci faranno poi ottenere i gruppi corrispondenti alle divisioni *d)*, *f)*. Nella memoria citata del professor L. Bianchi al n. 18 è dimostrato che il gruppo G di sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1\,, i\,,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$, ampliato con la riflessione

$z' = z_0$, da un gruppo G_0 avente per poliedro fondamentale la porzione del prisma retto triangolare

$$\text{I)} \quad \xi = \frac{1}{2}\,; \qquad \text{II)} \quad \eta = 0\,; \qquad \text{III)} \quad \xi = \eta\,;$$

esterna alla sfera

$$\text{IV)} \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1\,.$$

Tale poliedro è un tetraedro Π del tipo *e*). Se a Π associamo il simmetrico, per rispetto al piano $\eta = 0$, otteniamo un tetraedro Π' del tipo *d)*, che è il poliedro fondamentale di G. Se infine al tetraedro Π' associamo il simmetrico per la faccia $\xi + \eta = 0$, otteniamo un tetraedro Π'' del tipo *f)*. Osservando che la sostituzione corrispondente alla riflessione sul piano $\xi + \eta = 0$ è

$$z' = \frac{z_0}{i}\,,$$

a determinante i, e che nessun movimento, eccettuato l'identico, trasforma Π'' in se, segue che Π'' è il tetraedro fondamentale del gruppo di sostituzioni unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1\,,$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, i)$.

22. — Al poliedro Π fondamentale del gruppo G_0 del n. 18 associamo il simmetrico rispetto al piano $\eta = 0$. Otteniamo un tetraedro Π' del tipo *g)* che è il poliedro fondamentale del gruppo G di sostituzioni di 1.ª specie

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,,$$

con $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, essendo i numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $\left(1\,.\,\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ma orientando convenientemente Π' possiamo anche trovare la costituzione aritmetica del gruppo che si ottiene combinando le 4 riflessioni sulle facce di Π'.

Per questo consideriamo il gruppo Γ di sostituzioni di 1.ª specie costante delle sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\delta},$$

con

$$\alpha\delta = 1 \ ; \quad \beta \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 1 - \varepsilon) \ ;$$

essendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $(1, \varepsilon), \left(\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$, e delle sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

con

$$\alpha\delta - \beta\gamma = -3 \ ; \quad \alpha \equiv \delta \equiv 0 \quad (\text{mod. } 1 - \varepsilon) \ ; \quad \beta \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3) \ ,$$

essendo ancora $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $\left(1, \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Componendo le sostituzioni di Γ con la nota regola, facilmente si verifica che esse formano gruppo. Ampliamo il gruppo Γ in Γ_0 associandovi la riflessione $z' = z_0$. Dico che il poliedro fondamentale di Γ_0 è un tetraedro del tipo *g)*.

Osserviamo che le sostituzioni ellittiche di G hanno il periodo 2 o 3, onde se due sfere di riflessione di Γ_0 si attraversano, si tagliano sotto angolo $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.

I piani di riflessione di Γ_0 hanno per equazione

$$\text{A)} \qquad \eta = \frac{b\sqrt{3}}{2} \ ; \qquad \xi\sqrt{3} \pm \eta = b\sqrt{3} \ ,$$

e le sfere di riflessione

$$(56) \qquad \left(\xi + \frac{3a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{3(a_2 - 2a_1)}{2c_1\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{c_1}\right)^2,$$

con a_1, a_2, c_1 interi tali che sia

(57) $$(a_2 - 2a_0)^2 + 3a_2^2 \equiv 4 \qquad (\text{mod. } 4c_1)\,.$$

I piani di riflessione A) dividono il semispazio in prismi triangolari retti congruenti. Fra essi consideriamo quello racchiuso dai tre piani

I) $\eta = 0$; II) $\xi\sqrt{3} - \eta = 0$; III) $\xi\sqrt{3} + \eta = \sqrt{3}$.

La porzione del prisma I, II, III esterna alla sfera di riflessione

IV) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 3\,.$$

forma un tetraedro Π'' del tipo *g)* avente i vertici:

$$V_0 \equiv (0\,,\ 0\,,\ \infty)\ ;\quad V_1 \equiv (0\,,\ 0\,,\ \sqrt{3})$$
$$V_2 \equiv (1\,,\ 0\,,\ \sqrt{2})\ ;\quad V_0 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}\right).$$

Essendo le sostituzioni ellittiche di Γ a periodo $2, 3$ nessuna sfera di riflessione attraversa Π'' lungo uno spigolo. Come al solito si verifica che nessuna sfera (56) può contenere nel suo interno V_1, V_2, V_3. Non esiste alcun movimento di 1.ª specie oltre l'identità che trasforma Π'' in se, mentre ne esiste uno di 2.ª specie cui corrisponde la sostituztone

$$z' = \frac{2z_0}{-\varepsilon^2}\,,$$

che essendo a determinante -1 non appartiene a Γ_0. Segue che Π'' è il poliedro fondamentale di Γ_0.

23. — Come nel numero precedente, associamo al tetraedro Π fondamentale del gruppo G_0 del numero 19 il simmetrico per rispetto al piano $\eta = 0$. Otteniamo un tetraedro Π' del tipo *h)* che è il poliedro fondamentale del gruppo costante delle sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\,,$$

con

$$\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1 \qquad \beta\equiv 0 \pmod{2},$$

e delle sostituzioni

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta};$$

con

$$\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1\ , \qquad \alpha\equiv\beta\equiv\delta\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ 2),$$

essendo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi del campo $\left(1, \varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ma orientando anche in questo caso opportunamente Π' troveremo la costituzione aritmetica del gruppo che nasce combinando le 4 riflessioni sulle facce di Π'.

Consideriamo il gruppo Γ di sostituzioni di 1.ª specie, costante delle sostituzioni

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\delta},$$

con

$$\alpha\delta=1; \qquad \beta\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ 1-\varepsilon),$$

delle sostituzioni

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta};$$

con

$$\alpha\delta-\beta\gamma=-3; \qquad \alpha\equiv\delta\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 1-\varepsilon); \qquad \beta\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 3),$$

ed infine delle sostituzioni

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},$$

con

$$\alpha\delta-\beta\gamma=-6\ ; \quad \alpha\equiv\delta\equiv 0 \quad (\mathrm{mod.}\ 2\,(1-\varepsilon))\ ;$$
$$\beta\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 3)\ ; \quad \gamma\equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2).$$

Ampliamo il gruppo Γ in Γ_0 associandovi la riflessione $z' = z_0$.

Proverò che il poliedro fondamentale di Γ_0 è un tetraedro del tipo *h)*.

Le sostituzioni ellittiche di Γ hanno il periodo $2, 3, 4$ onde se due sfere di riflessione di Γ_0 si attraversano, esse si tagliano sotto l'angolo $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

I piani di riflessione di Γ_0 hanno per equazione

$$\text{A)} \qquad \eta = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \qquad \xi\sqrt{3} \pm \eta = b\sqrt{3},$$

e secondo che sia $\alpha\delta - \beta\gamma = -3, \ -6$ le sfere di riflessione hanno rispettivamente per equazione

$$\left(\xi + \frac{3a_2}{4c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}a_1 - 2a_2}{4c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2c_1}\right)^2, \tag{58}$$

$$\left(\xi + \frac{3a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}a_1 - 2a_2}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}c_1}\right)^2. \tag{59}$$

i numeri interi a_1, a_2, c_1 soddisfacendo rispettivamente alle congruenze

$$a_1^2 + a_2^2 - a_1 a_2 \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2c_1),$$

$$2(a_1^2 + a_2^2 - a_1 a_2) \equiv 1 \qquad (\text{mod. } c_1).$$

I piani di riflessione A) dividono il semispazio $\zeta > 0$ in prismi triangolari retti congruenti, fra cui considereremo quello racchiuso dai tre piani

$$\text{I)} \quad \eta = 0; \qquad \text{II)} \quad \xi\sqrt{3} - \eta = 0; \qquad \text{III)} \quad \xi\sqrt{3} + \eta = \sqrt{3};$$

La porzione del prisma I), II), III) esterna alla sfera di riflessione

$$\text{IV)} \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{3}{2},$$

forma un tetraedro Π'' del tipo *h)* avente i vertici

$$V_0 \equiv (0\,,0\,,\infty)\,; \quad V_1 \equiv \left(0\,,0\,,\sqrt{\frac{3}{2}}\right);$$

$$V_2 \equiv \left(1\,,0\,,\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad V_0 \equiv \left(\frac{1}{2}\,,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

Π'' è il poliedro fondamentale di Γ_0. Infatti le sfere che bisegano i diedri $V_1\,V_2$ e $V_1\,V_3$ hanno il raggio $=\sqrt{3}$, onde nessuna sfera di riflessione attraversa Π'' lungo uno spigolo. Si verifica che nessuna sfera (58), (59) può contenere V_1, V_2, V_3 nel suo interno. Osservando infine che all'unico movimento oltre l'identità, che trasforma Π'' in se corrisponde la sostituzione

$$z' = \frac{\varepsilon z_0}{-\varepsilon^2}$$

che non è di Γ_0, segue che Π'' è il poliedro fondamentale di Γ_0.

24. — Associamo al poliedro Π del numero 20 il simmetrico per rispetto al piano $\eta = 0$. Otteniamo un tetraedro Π' del tipo *i)* corrispondente al gruppo G di sostituzioni di 1.ª specie, che si ottengono combinando le 4 riflessioni:

$$z' = z_0\,; \quad z' = -z_0 + 2\,; \quad z' = \frac{\varepsilon z_0}{-\varepsilon^2}\,; \quad z' = \frac{2(3-\sqrt{5})}{z_0}\,.$$

Capitolo V.

Sulle divisioni regolari dello spazio non-euclideo in tetraedri con vertici propri.

25. — Come nei capitoli precedenti, per determinare tutti i tetraedri Π con vertici propri che effettuano la divisione regolare dello spazio iperbolico S, ci serviremo della rappresentazione conforme di S entro la sfera limite Σ di raggio 1. Siano V_0, V_1, V_2, V_3 i vertici di Π' immagine di Π. Usando le notazioni dei capi-

toli precedenti si ha che condizione necessaria e sufficiente perchè Π' effettui la divisione regolare di Σ è che i numeri $a_{i,k}$ siano interi, e verifichino le diseguaglianze:

$$(60)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a_{0,1}}+\dfrac{1}{a_{0,2}}+\dfrac{1}{a_{0,3}}>1\,, & a) \\ \dfrac{1}{a_{0,1}}+\dfrac{1}{a_{1,2}}+\dfrac{1}{a_{1,3}}>1\,, & b) \\ \dfrac{1}{a_{0,2}}+\dfrac{1}{a_{1,2}}+\dfrac{1}{a_{2,2}}>1\,, & c) \\ \dfrac{1}{a_{0,3}}+\dfrac{1}{a_{1,3}}+\dfrac{1}{a_{2,3}}>1\,. & d) \end{cases}$$

Ora solo ad alcune delle soluzioni delle (60) corrisponde un effettivo tetraedro Π' di S. Indicherò brevemente il procedimento con cui ho trovato tutte le soluzioni delle diseguaglianze (60) cui corrisponde un tetraedro Π' di S, e darò le riflessioni generatrici dei gruppi corrispondenti a due particolari divisioni.

Senza alterare le generalità posso supporre V_0 sia il centro di Σ, ed inoltre

$$a_{0,1} \leq a_{0,2} \leq a_{0,3}\,.$$

Allora le soluzioni della (a) sono.

$$\begin{array}{llll} (\alpha) & a_{0,1}=2\,;\ a_{0,2}=2\,;\ a_{0,3}=n\,, & (n \text{ intero}) \\ & a_{0,1}=2\,;\ a_{0,2}=3\,;\ a_{0,3}=3\,, \\ & a_{0,1}=2\,;\ a_{0,2}=3\,;\ a_{0,3}=4\,, \\ & a_{0,1}=2\,;\ a_{0,2}=3\,;\ a_{0,3}=5\,. \end{array}$$

Nell'ipotesi (α) deve aversi

$$n \leq 5$$

perchè se fosse $n \geq 6$ dalla $d)$ seguirebbe

$$a_{1,3}=a_{2,3}=2\,,$$

ma non esiste un tetraedro che verifichi le condizioni

$$a_{0,1}=2\,;\quad a_{0,2}=2\,;\quad a_{0,3}=n\,;\quad a_{1,3}=2\,;\quad a_{2,3}=2\,;\quad a_{1,2}=n\,,$$

quindi fra le soluzioni della (a) sono solo da considerare le seguenti

α_1) $\quad a_{0,1}=2\,;\ a_{0,2}=2\,;\ a_{0,3}=2\,,$

α_2) $\quad a_{0,1}=2\,;\ a_{0,2}=2\,;\ a_{0,3}=3\,,$

α_3) $\quad a_{0,1}=2\,;\ a_{0,2}=2\,;\ a_{0,3}=4\,,$

α_4) $\quad a_{0,1}=2\,;\ a_{0,2}=2\,;\ a_{0,3}=5\,,$

α_5) $\quad a_{0,1}=2\,;\ a_{0,2}=3\,;\ a_{0,3}=3\,,$

α_6) $\quad a_{0,1}=2\,;\ a_{0,2}=3\,;\ a_{0,3}=4\,,$

α_7) $\quad a_{0,1}=2\,;\ a_{0,2}=3\,;\ a_{0,3}=5\,.$

Sostituiamo le soluzioni $\alpha_1)$, $\alpha_2)$, $\alpha_3)$, $\alpha_4)$ nelle *b)*, *c)*, *d)* di (60) e troviamo i valori che si debbono assegnare ogni volta ad $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, $a_{2,3}$ per avere un effettivo tetraedro Π' di Σ, il quale per le condizioni poste effettuerà una divisione regolare di Σ.

Le (b), (c), (d) sostituendo in esse per $a_{0,1}$, $a_{0,2}$, $a_{0,3}$ i valori dati da α_1) diventano rispettivamente

$$(61)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a_{1,2}}+\dfrac{1}{a_{1,2}}>\dfrac{1}{2}\,, \\[2ex] \dfrac{1}{a_{1,2}}+\dfrac{1}{a_{2,3}}>\dfrac{1}{2}\,, \\[2ex] \dfrac{1}{a_{1,3}}+\dfrac{1}{a_{2,3}}>\dfrac{1}{2}\,. \end{cases}$$

È lecito supporre in questo caso

$$a_{1,3}\leq a_{2,3}\leq a_{1,3}\,.$$

Bisogna poi sia $a_{1,2}>2$ perchè se fosse $a_{1,2}=2$ la faccia $V_1\,V_2\,V_3$ del tetraedro Π' sarebbe ortogonale alla faccia $V_0\,V_1\,V_2$ e non incontrerebbe perciò lo spigolo $V_0\,V_3$ di Π' anch'esso ortogonale a

$V_0 V_1 V_2$. Segue che sono da esaminare della (61) solo le soluzioni:

$$\beta_1) \qquad a_{1,2} = 3\,; \quad a_{2,3} = 3\,; \quad a_{1,3} = 3\,,$$

$$\beta_2) \qquad a_{1,2} = 3\,; \quad a_{2,3} = 3\,; \quad a_{1,3} = 4\,,$$

$$\beta_3) \qquad a_{1,3} = 3\,; \quad a_{2,3} = 3\,; \quad a_{1,3} = 5\,.$$

È facile vedere che delle tre soluzioni $\sigma_1), \beta_1)$; $\alpha_1), \beta_2)$; $\sigma_1), \beta_3)$, del sistema (60) solo all'ultima corrisponde un effettivo tetraedro Π' di Σ.

Per questo assumiamo una terna di assi coordinati ortogonali x, y, z avente l'origine in V_0 in guisa però che le direzioni positive di x, y, z coincidono rispettivamente con le direzioni $V_0 V_1$, $V_0 V_2$; $V_0 V_3$. Se indichiamo con x_0, y_0, z_0 il centro della sfera appartenente alla faccia $V_1 V_2 V_3$ di Π' e con r il suo raggio, si debbono verificare con i numeri $a_{i,k}$ le eguaglianze:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 + r^2 \tag{62}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos\frac{\pi}{a_{1,2}} &= \frac{z_0}{r}\,, \\ \cos\frac{\pi}{a_{1,3}} &= \frac{y_0}{r}\,, \\ \cos\frac{\pi}{a_{2,3}} &= \frac{x_0}{r}\,. \end{aligned} \right. \tag{63}$$

Non ho messo nei secondi membri delle (63) il segno $\pm$ perchè dovendo la sfera $V_1 V_2 V_3$ incontrare gli spigoli $V_0 V_1$; $V_0 V_2$, $V_0 V_3$ ciascuno in due punti è necessario supporre x_0, y_0, z_0 positivi.

Dalla (62) e (63) si ha:

$$r^2 \left(\cos^2\frac{\pi}{a_{1,2}} + \cos^2\frac{\pi}{a_{1,3}} + \cos^2\frac{\pi}{a_{2,3}} - 1 \right) = 1\,. \tag{64}$$

Ponendo nella (64) per $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, $a_{2,3}$ i valori $\beta_1), \beta_2), \beta_3)$ si conclude che le soluzioni $\beta_1), \beta_2)$ sono da escludere rendendo esse il primo membro della (64) rispettivamente negativo o nullo, mentre per la soluzione $\beta_3)$ si ricava che il raggio r della sfera $V_1 V_2 V_3$

deve essere dato dalla formula

$$\nu = \sqrt{2(\sqrt{5}+1)} \tag{65}$$

e conseguentemente per le (63)

$$\left\{\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}+1)} \\ y_0 &= \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\sqrt{2(\sqrt{5}+1)} \\ z_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}+1)} \end{aligned}\right. \tag{66}$$

Per mostrare infine che la porzione del triedro avente per facce i piani

I) $z = 0$; II) $x = 0$; III) $y = 0$;

esterna alla sfera

IV) $(x - x_0)^2 + (y - y_0) + (z - z_0)^2 - r^2 = 0$,

con x_0, y_0, z_0 r dati rispettivamente dalle (65) e (66) forma un tetraedro Π' dello spazio iperbolico Σ ci resta da verificare che i punti $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$ sono interni alla sfera IV). Ora le coordinate del punto $(1, 0, 0)$ rendono il primo membro della IV) $= 2(1 - x_0)$ cioè negativo essendo $x_0 > 1$, onde $(1, 0, 0)$ è interno alla IV). Lo stesso dicasi per gli altri due punti.

Da quanto si è visto segue:

Esiste uno e un solo tetraedro Π *con vertici propri avente un triedro* P *trirettangolo che effettua una divisione regolare dello spazio iperbolico* S. Facendo un'opportuna rappresentazione conforme di S entro la sfera limite Σ di raggio uno in guisa che P abbia per immagine un triedro P' avente il vertice nel centro di Σ, la faccia di Π' immagine di Π opposta a P' ha il centro e il raggio dati rispettivamente dalle (66) e (65).

Il tetraedro Π' corrisponde alla soluzione

$$a_{0,1}=a_{0,2}=a_{0,3}=2\,;\quad a_{1,2}=a_{2,3}=3\,;\quad a_{1,3}=5$$

delle diseguaglianze (60).

Il gruppo G_0 *che ha per poliedro fondamentale* Π' *ha per riflessioni generatrici*

$$z'=z_0\,;\quad z'=-z_0\,;\quad z'=\frac{1}{z_0}\,;$$

$$z'=\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}\left(1+\frac{i}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}\right)z_0+\left(\frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}+1\right)}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}-1\right)z_0+\frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}\left(1-\frac{i}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}\right)}\,.$$

26. — Passiamo ora ad esaminare la soluzione σ_2) della prima diseguaglianza σ) delle (60). Ponendo perciò

$$a_{0,2}=2\,;\quad a_{0,2}=2\,;\quad a_{0,3}=3\,;$$

le $b), c), d)$ diventano rispettivamente

$$(67)\qquad \frac{1}{a_{1,2}}+\frac{1}{a_{1,3}}>\frac{1}{2}\,;\quad \frac{1}{a_{1,2}}+\frac{1}{a_{2,3}}>\frac{1}{2}\,;\quad \frac{1}{a_{1,3}}+\frac{1}{a_{2,3}}>\frac{2}{3}\,.$$

È lecito supporre in questo caso $a_{1,3}\leq a_{2,3}$. Segue allora dell'ultima diseguaglianza (67) $a_{1,3}=2$. Bisogna ancora supporre $a_{1,2}>2$, $a_{2,3}>2$ perchè se fosse $a_{1,2}=2$ la faccia $V_1\,V_2\,V_3$ non incontrerebbe lo spigolo $V_0\,V_3$, e se fosse poi $a_{2,3}=2$ la faccia $V_1\,V_2\,V_3$ avendo allora il suo centro sullo spigolo $V_0\,V_3$ non incontrerebbe il piano $V_1\,V_0\,V_2$. Segue che le soluzioni del sistema (67) da esaminare sono:

γ_1) $\quad a_{1,3}=2\,;\ a_{2,3}=3\,;\ a_{1,2}=3\,;$

γ_2) $\quad a_{1,3}=2\,;\ a_{2,3}=3\,;\ a_{1,2}=4\,;$

γ_3) $\quad a_{1,3}=2\,;\ a_{2,3}=3\,;\ a_{1,2}=5\,;$

γ_4) $\quad a_{1,3}=2\,;\ a_{2,0}=4\,;\ a_{1,2}=3\,;$

γ_5) $\quad a_{1,3}=2\,;\ a_{2,3}=5\,;\ a_{1,2}=3\,.$

Ora delle soluzioni $\alpha_2), \gamma_1)$; $\alpha_2), \gamma_2)$; $\alpha_2), \gamma_3)$; $\alpha_2), \gamma_4$; $\alpha_2), \gamma_5)$ di (60) solo all' ultima corrisponde come ora vedremo un effettivo tetraedro Π' di Σ .

Assumiamo come nel numero precedente una terna di assi coordinati x, y, z avente l'origine in V_0 in guisa che le direzioni positive degli assi x, y, z coincidono rispettivamente con le direzioni $V_0 V_1$, $V_0 V_2$, $V_0 V_3$. Chiamiamo ancora con (x_0, y_0, z_0) le coordinate del centro e con r il raggio della sfera appartenente alla faccia $V_1 V_2 V_3$ di Π', si avrà allora;

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \sqrt{2}\, x_0 y_0 = 1 + r^2 , \tag{68}$$

$$x_0 = \frac{r \cos \dfrac{\pi}{a_{2,3}}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}} , \quad y_0 = \frac{r \cos \dfrac{\pi}{a_{1,3}}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}} = 0 ; \quad z_0 = r \cos \frac{\pi}{a_{1,2}} . \tag{69}$$

Dalle (68) e (69) si ha:

$$r^2 \left(\frac{4}{3} \cos^2 \frac{\pi}{a_{2,3}} + \cos^2 \frac{\pi}{a_{1,2}} - 1 \right) = 1 . \tag{70}$$

Ora le soluzioni $\gamma_1), \gamma_2), \gamma_3), \gamma_4)$ rendono il primo membro della (70) negativo e sono quindi da escludere, mentre per la soluzione $\gamma_5)$ si ricava che il raggio della sfera $V_1 V_2 V_3$ deve esser dato dalla formula

$$r = \sqrt{\frac{12}{2\sqrt{5} - 3}} \tag{71}$$

essendo poi

$$x_0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{3}}\, r ; \quad y_0 = 0 ; \quad z_0 = \frac{1}{2}\, r . \tag{72}$$

La sfera appartenente alla faccia $V_1 V_2 V_3$ ha per equazione

$$(x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2 + y\,(x - x_0) = r^2$$

ed i punti (1 , 0 , 0); (0 , 1 , 0); (0 , 0 , 1) sono interni ad essa.

Da quanto si è visto segue: *Esiste un solo tetraedro* Π' *con vertici propri avente un triedro* P *con diedri* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ *che effettua una divisione regolare dello spazio iperbolico.* Stabilendo il sistema di assi coordinati anzidetto, *esso è la porzione del triedro*

$$\text{I)} \quad z = 0\,; \qquad \text{II)} \quad x = 0\,; \qquad \text{III)} \quad y = 0\,,$$

esterna alla sfera

$$\text{IV)} \qquad (x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2 + y\,(x - x_0) = r^2\,,$$

essendo x_0, y_0, z_0, r *dati dalle* (71) e (72). Tale tetraedro Π' corrisponde alla soluzione

$$a_{0,1} = a_{0,2} = a_{1,3} = 2\,; \quad a_{0,3} = a_{1,2} = 3\,; \quad a_{2,3} = 5\,,$$

delle diseguaglianze (60).

27. — Con ragionamenti analoghi ai precedenti si dimostra:

Esiste un solo tetraedro Π' *con vertici propri avente un triedro* P *con diedri* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ *che effettua una divisione regolare dello spazio iperbolico.* Usando le notazioni dei numeri precedenti Π' corrisponde alla soluzione

$$a_{0,1} = 2\,; \quad a_{0,2} = 2\,; \quad a_{0,3} = 4\,; \quad a_{1,2} = 5\,; \quad a_{1,3} = 2\,; \quad a_{2,3} = 3$$

delle diseguaglianze (60). Scegliendo come triedro coordinato un triedro birettangolo avente l'origine nel centro di Σ, il cui diedro non retto abbia per misura $\frac{\pi}{4}$, e chiamando con x, y, z li spigoli corrispondenti ai diedri retti, *si può orientare* Π' *in guisa che esso sia la porzione del triedro*

$$\text{I)} \quad x = 0\,; \qquad \text{II)} \quad y = 0\,; \qquad \text{III)} \quad z = 0\,,$$

esterna alla sfera

$$\text{IV)} \qquad (x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2 + \sqrt{2}\,y\,(x - x_0) = r^2$$

essendo

$$r = \sqrt{2(\sqrt{5}+1)}\,,$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} r\,; \qquad y_0 = 0\,; \qquad z_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} r\,.$$

28. — *Oltre al tetraedro del n. 27 che ha un triedro con diedri* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}$ *esiste un altro tetraedro* Π' *avente un triedro con angoli diedri* $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{5}$ *che effettua una divisione regolare dello spazio iperbolico.* Π' corrisponde alla soluzione

$$a_{0,1} = 2\,; \quad a_{0,2} = 2\,; \quad a_{0,3} = 5\,; \quad a_{1,2} = 5\,; \quad a_{1,3} = 2\,; \quad a_{2,3} = 3\,;$$

delle diseguaglianze (60). Scegliendo come triedro coordinato un triedro birettangolo simile a quello del n. precedente, *si può orientare* Π' *in guisa che esso sia la porzione del triedro*

$$\text{I)} \quad x = 0\,; \qquad \text{II)} \quad y = 0\,; \qquad \text{III)} \quad z = 0\,,$$

esterna alla sfera

$$\text{IV)} \quad (x - x_0)^2 + y^2 + (z - z_0)^2 + 2y(x - x_0)\cos\frac{\pi}{5} = r^2\,,$$

essendo

$$r^2 = \frac{10 + 18\sqrt{5}}{19}\,,$$

$$x_0 = \frac{2}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} r\,; \quad y_0 = 0\,; \quad z_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} r\,.$$

29. — I tetraedri trovati ai numeri 25, 26, 27, 28 sono stati ottenuti studiando le soluzioni σ_1), σ_2), σ_3), σ_4) della prima delle diseguaglianze (60). Esaminando le altre soluzioni delle (60) si determinano altri quattro tipi di tetraedri oltre i precedenti che effettuano la divisione regolare dello spazio iperbolico. Darò senza

altro questi tetraedri mediante l'equazione delle 4 facce che lo determinano, stabilendo come assi di riferimento una terna di assi ortogonali avente l'origine nel centro della sfera limite. Si trova

La porzione del triedro

I) $y = 0$; II) $z = 0$; III) $x\sqrt{2} - y - z = 0$,

esterna alla sfera

IV) $(x - x_0) + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$,

con

$$r^2 = \frac{8}{2\sqrt{2} + 1}$$

$$x_0 = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} r ; \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} r ; \quad z_0 = \frac{1}{2} r ,$$

forma un tetraedro Π_1 *che effettua una divisione regolare di* Σ Π_1 *corrisponde alla soluzione*

$$a_{0,1} = 2 ; \quad a_{0,2} = 3 ; \quad a_{0,3} = 3 ; \quad a_{1,2} = 3 ; \quad a_{1,3} = 4 ; \quad a_{2,3} = 2 ,$$

delle diseguaglianze (60).

Ponendo invece nella IV)

$$r^2 = \frac{16}{5\sqrt{5}+1}$$

e

$$x_0 = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} r ; \quad y_0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4} r ; \quad z_0 = \frac{1}{2} r ,$$

la porzione del triedro I), II), III) *esterna alla sfera* IV) *forma un tetraedro* Π_2 *che effettua una divisione regolare di* Σ. Π_2 *corrisponde alla soluzione*

$$a_{0,1} = 2 ; \quad a_{0,2} = 3 ; \quad a_{0,3} = 3 ; \quad a_{1,2} = 3 ; \quad a_{1,3} = 5 ; \quad a_{2,3} = 2$$

delle diseguaglianze (60).

Si trova pure che *la porzione del triedro*

$$\mathrm{I})' \quad x - y = 0\,; \qquad \mathrm{II})' \quad y - z = 0\,; \qquad \mathrm{III})' \quad z - x = 0\,,$$

esterna alla sfera

$$\mathrm{IV})' \qquad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\,,$$

con

$$r = \frac{2}{\sqrt{7}}\,,$$

$$x_0 = \frac{3}{\sqrt{7}}\,; \qquad y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{7}}\,,$$

forma un tetraedro Π_3 *che effettua una divisione regolare di* Σ, Π_3 *corrisponde alla soluzione*

$$a_{0,1} = 2\,;\ a_{0,2} = 3\,;\ a_{0,3} = 4\,;\ a_{1,2} = 4\,;\ a_{1,3} = 3\,;\ a_{2,3} = 2\,;$$

delle (60). Π_3 è il poliedro fondamentale del gruppo avente per sostituzioni generatrici le 4 riflessioni:

$$z' = \frac{1}{z_0}\,; \qquad z' = i z_0\,; \qquad z' = \frac{i z_0 + 1}{z_0 + i}\,; \qquad z' = \frac{(3+i) z_0 - \left(\sqrt{7}+1\right)}{\left(\sqrt{7}-1\right) z_0 - (3-i)}\,.$$

Ponendo infine nella IV)'

$$r^2 = \frac{4}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10}}\,,$$

ed

$$x_0 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}\right) r\,; \qquad y_0 = z_0 = \frac{1}{2}\, r\,.$$

la porzione del triedro I)', II)', III)' *esterna alla sfera* IV)' *forma un tetraedro* Π_4 *che effettua una divisione regolare di* Σ. Π_4 *corrisponde alla soluzione*

$$a_{0,1} = 2\,;\ a_{0,2} = 3\,;\ a_{0,3} = 4\,;\ a_{1,2} = 5\,;\ a_{1,3} = 3\,;\ a_{2,3} = 2\,,$$

delle diseguaglianze (60).

Da quanto si è visto risulta: *Sono possibili soltanto otto divisioni regolari dello spazio iperbolico in tetraedri con vertici propri.*

Palermo, 2 novembre 1910.

INDICE

Prefazione . . . . pag. 3

PARTE PRIMA.

Sulle divisioni regolari dello spazio iperbolico in poliedri regolari.

1. — Generalità sulla metrica iperbolica. Formule di Poincarè . . . . pag. 5
2, 3. — Le cinque divisioni regolari dello spazio iperbolico S in poliedri regolari . . . . » 7
4. — Costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti alle divisioni di S in tetraedri ed ottaedri regolari . . » 9
5. — Costituzione aritmetica del gruppo corrispondente alla divisione di S in cubi . . . . » 10
6. — Studio sulla costituzione del gruppo corrispondente alla divisione di S in dodecaedri regolari con vertici propri » 16

PARTE SECONDA.

Sulle divisioni regolari di S in tetraedri.

Capitolo I.

1. — Le 3 divisioni regolari di S in tetraedri con vertici impropri . . . . » 21
2-4. — Costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti alle tre divisioni di S del n. 1 . . . . » 22

Capitolo II.

5. — Le due divisioni regolari di S in tetraedri con 3 vertici impropri e uno proprio . . . . » 30
6, 7. — Costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti alle due divisioni di S del n. 5 . . . . » 31

CAPITOLO III.

8. — Le nove divisioni regolari di S in tetraedri con 2 vertici impropri e due propri . . . . pag. 37
9-13. — Costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti a cinque fra le divisioni del n. 8 . . . . . » 38
14-16. — Riflessioni generatrici dei gruppi corrispondenti alle rimanenti quattro divisioni di S del n. 8 . . » 49

CAPITOLO IV.

17. — Le nove divisioni regolari di S in tetraedri con un vertice improprio e 3 propri . . . . . . » 52
18, 19. — Costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti a due fra le divisioni di S del n. 17. . . . . » 54
20. — Riflessioni generatrici del gruppo corrispondente ad una delle divisioni di S del n. 17 . . . . . » 57
21-23. — Costituzione aritmetica dei gruppi corrispondenti a cinque divisioni di S del n. 17 . . . . . » 57
24. — Riflessioni generatrici del gruppo corrispondente ad un'altra delle divisioni di S del n. 17 . . . . » 63

CAPITOLO V.

25-29. — Le otto divisioni regolari di S in tetraedri con vertici propri . . . . » 63