ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CESARE RIMINI

Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo a quattro parametri di movimenti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 9 (1904), exp. nº 6, p. 1-57

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1904_1_9__A6_0>

CESARE RIMINI

SUGLI SPAZI A TRE DIMENSIONI

CHE AMMETTONO UN GRUPPO

A QUATTRO PARAMETRI DI MOVIMENTI

Nel presente lavoro, che la R. Scuola Normale Superiore di Pisa mi concesse l'onore di accogliere nei suoi Annali, mi occupo più specialmente di una particolare classe di spazi a tre dimensioni, caratterizzati da ciò, che la forma differenziale quadratica che ne misura il quadrato dell'elemento lineare (forma, dalla quale, secondo le teorie di RIEMANN, si fa dipendere tutta quanta la geometria dello spazio) ammette una continuità quattro e non più volte infinita di trasformazioni in sè stessa. Geometricamente ciò equivale a dire che le figure poste nello spazio corrispondente sono suscettibili, entro lo spazio stesso, di *movimenti* continui dipendenti da quattro parametri (indipendenti).

La Memoria che segue contiene precisamente i principî di uno studio di tali spazi. All'uopo, richiamate in un primo § introduttivo le principali formole ed i più noti teoremi relativi alla teorica degli spazi comunque curvi e dotati di un numero qualunque n di dimensioni, con speciale riguardo al caso di $n = 3$, passo nel § 2 a classificare in tipi gli spazi che mi sono proposto di studiare, servendomi per ciò dei risultati ritrovati dal sig. prof. BIANCHI ed enuncio alcune proprietà generali comuni a tutti gli spazi, nonchè ai *gruppi* dei loro movimenti. Il § 3, che è destinato alla ricerca delle equazioni in termini finiti delle geodetiche, è tutto basato sopra un elegante teorema, già noto nel suo significato meccanico, del quale dò una dimostrazione diretta mettendone in luce una notevole interpretazione geometrica (generalizzazione del teorema di Clairaut). Da questo teorema deduco una serie di importanti proposizioni relative all'integrazione delle equazioni delle geodetiche in uno spazio qualunque che ammette un *noto* gruppo di movimenti. Nel § seguente mi occupo delle varietà totalmente geodetiche, cioè di quelle varietà di cui ogni geodetica è geodetica dello spazio ambiente; le caratterizzo mediante un teorema, per quanto so, nuovo, e, a mio avviso, interessante in quanto che permette di riavvicinare le dette varietà ai piani dell'ordinario spazio euclideo. Enuncio pure molte altre proprietà di cui godono le varietà nominate e procedo alla determinazione completa di tutte le superficie totalmente geodetiche esistenti negli spazi che formano l'oggetto del lavoro. I risultati contenuti nel § 5 sono un'estensione di quelli del § precedente e riguardano le ipersuperficie a linee di curvatura indeterminate. Infine il § 6 è dedicato a studiare alcune rappresentazioni dei nostri spazi. Sono notevoli le rappresentazioni delle due classi più interessanti di questi sugli elementi lineari di una superficie a curvatura costante, perchè, in un certo senso, *conservano i movimenti*. Le ho utilizzate per scrivere le equazioni in termini finiti dei movimenti degli spazi stessi. Da ultimo mi propongo e risolvo completamente la questione della rappresentabilità conforme dei detti spazi sull'ordinario spazio euclideo.

Mantova, ottobre 1903.

CESARE RIMINI.

§. 1.

Generalità.

1. — Intendiamo definita la metrica di uno spazio ad n dimensioni S_n mediante la forma differenziale quadratica

$$(1) \qquad ds^2 = \sum_{1}^{n} {}_{i,k}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

che dà il quadrato del suo elemento lineare, cioè della lunghezza dell'arco infinitesimo compreso tra i due punti di coordinate

$$(x_1\, x_2 \ldots x_n) \text{ e } (x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2 \ldots x_n + dx_n).$$

Supporremo sempre che le a_{ik} siano funzioni regolari delle x e che la (1) sia una forma definita positiva almeno in quel campo entro cui intendiamo di far variare le x. In particolare nello stesso campo sarà costantemente diverso da zero il suo discriminante:

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

È noto come dalla forma fondamentale (1) si possono dedurre tutte le proprietà metriche di S_n. Accenneremo qui rapidamente alle principali.

L' angolo ω di due elementi lineari ds e ∂s spiccati da uno stesso punto (x_i) ai punti $(x_i + dx_i)$, $(x_i + \partial x_i)$ si definisce mediante la formola:

$$\cos \omega = \sum_{1}^{n}{}_{i,k} a_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{\partial x_i}{\partial s} . \tag{2}$$

Ne segue, in particolare, che l'angolo ω_{ik} compreso tra le direzioni delle linee (x_i) e (x_k) [1] è dato da

$$\cos \omega_{ik} = \frac{a_{ik}}{\sqrt{a_{ii}\ a_{kk}}} \tag{2*}$$

e che quindi la condizione d' ortogonalità delle stesse linee è espressa da:

$$a_{ik} = 0. \tag{2**}$$

Una direzione qualunque uscente da un punto (x_i) di S_n si intende fissata dai valori dei rapporti dei differenziali dx_i presi lungo la direzione stessa, in particolare dai rapporti delle n costanti

$$\xi_i = \frac{dx_i}{ds} \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

(dove ds rappresenta l'elemento d'arco lungo la direzione considerata), che si dicono le *costanti della direzione* stessa e sono legate dall'unica relazione:

$$\sum_{1}^{n}{}_{i,k} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k = 1 . \tag{3}$$

2. — Posto *(simboli di* CHRISTOFFEL *di prima specie):*

$$2 \begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} = \frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}$$

e *(simboli di* CHRISTOFFEL *di seconda specie):*

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix} = \sum_{1}^{n}{}_{m} A_{lm} \begin{bmatrix} i\,k \\ m \end{bmatrix}$$

---

[1] Così indichiamo le linee lungo le quali varia la sola coordinata x_i, o x_k rispettivamente.

dove A_{lm} rappresenta il complemento algebrico di a_{lm} nel discriminante a della (1) diviso per a stesso, le equazioni differenziali:

$$(4)\qquad \frac{d^2x_i}{ds^2}+\sum_{1}^{n}{}_{l,m}\begin{Bmatrix} l\ m \\ i \end{Bmatrix}\frac{dx_l}{ds}\frac{dx_m}{ds}=0\ (i=1,2\ldots n)$$

definiscono le *geodetiche* dello spazio S_n, cioè le linee di minima lunghezza (più esattamente: che soddisfano alla condizione principale di massimo e minimo rispetto alla lunghezza dell'arco compreso tra due loro punti). La variabile s in funzione della quale le (4) determinano le coordinate x_i di un punto mobile sulla geodetica, è precisamente l'*arco* della curva contato a partire da un punto fisso.

Una geodetica è individuata datone un punto e la direzione con cui esce dal punto stesso.

Le ipersuperficie di una famiglia ∞^1 si dicono *geodeticamente parallele* quando le loro traiettorie ortogonali sono linee geodetiche. La condizione necessaria e sufficiente affinchè le ipersuperficie $x_n =$ costante siano geodeticamente parallele e le linee (x_n) ne siano le traiettorie ortogonali è che nella forma (1) si abbia:

$$a_{nl}=0\ (l=1,2,\ldots n-1)$$

e a_{nn} funzione della sola x_n, allora $\int\sqrt{a_{nn}}\,dx_n$ rappresenta l'arco delle linee x_n.

3. — Le geodetiche uscenti da un punto nelle varie direzioni di un *fascio* (così indichiamo le direzioni le cui costanti si esprimono linearmente con quelle di due qualunque di esse) riempiono una superficie, che si dice la *superficie geodetica relativa al dato punto ed alla data orientazione* (determinata da due direzioni del suddetto fascio).

Ciò premesso, per *curvatura riemanniana* dello spazio S_n in un punto P e secondo l'orientazione determinata dalle due direzioni $(\xi_i^{(1)})$, $(\xi_i^{(2)})$, s'intende la curvatura assoluta che in P ha la superficie geodetica relativa a P e alla orientazione considerata (cioè la curvatura che compete al ds^2 della superficie calcolato in S_n). La sua espressione è la seguente:

$$(5) \qquad K = \frac{\sum'_{rkih} (rk, ih) \begin{vmatrix} \xi_r^{(1)} & \xi_r^{(2)} \\ \xi_k^{(1)} & \xi_k^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_i^{(1)} & \xi_i^{(2)} \\ \xi_h^{(1)} & \xi_h^{(2)} \end{vmatrix}}{\sum'_{rkih} \begin{vmatrix} a_{ri} & a_{rk} \\ a_{ik} & a_{hk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_r^{(1)} & \xi_r^{(2)} \\ \xi_k^{(1)} & \xi_k^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_i^{(1)} & \xi_i^{(2)} \\ \xi_h^{(1)} & \xi_h^{(2)} \end{vmatrix}}$$

dove le

$$(rk, ih) = \frac{\partial}{\partial x_h} \begin{bmatrix} r\,i \\ h \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{bmatrix} r\,h \\ k \end{bmatrix} + \sum_{lm} A_{lm} \left\{ \begin{bmatrix} rh \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k\,i \\ m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ri \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kh \\ m \end{bmatrix} \right\}$$

sono i *simboli di Riemann a quattro indici*, e l'accento alle somme indica che esse sono estese a quelle combinazioni degli indici r, k, i, h per le quali $r > k$, $i > h$.

4. — Chiamiamo *movimento* di uno spazio S_n ogni *applicabilità* dello spazio in sè, cioè ogni corrispondenza dei punti di S_n tale che gli elementi lineari corrispondenti siano eguali.

Affinchè uno spazio S_n, di cui (1) è il quadrato dell'elemento lineare, possegga il gruppo a un parametro G_1 generato dalla trasformazione infinitesima [1]

$$X f = \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

come gruppo di movimenti, è necessario e sufficiente che sia identicamente nulla la forma quadratica $X\,(ds^2)$ che cioè siano verificate le $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$ condizioni (*equazioni di* KILLING):

$$(6) \qquad \sum_r \left\{ \xi_r \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_r} + a_{ir} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_k} + a_{kr} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right\} = 0$$

$$i, k = 1, 2, \ldots n.$$

La soluzione più generale del sistema (6) dipende da un numero

[1] LIE. — *Transformationsgruppen.* Bd. 1, Kap. 3.

finito di parametri

$$r \leq \frac{n(n+1)}{2};$$

il caso $r = \frac{n(n+1)}{2}$ ha luogo per gli spazi *a curvatura costante* K, caratterizzati dalle relazioni:

$$(r\,k,\, i\,h) = \mathrm{K}\,(a_{ri}\, a_{hk} - a_{rh} a_{ik})$$

cui soddisfano i coefficienti della forma fondamentale (1).

5. — Due spazi si dicono *rappresentati conformemente* l'uno sull'altro, quando i loro elementi lineari differiscono per un fattore, funzione, in generale, delle coordinate. In tal caso la corrispondenza tra i due spazi che nasce dall'associare due punti aventi le stesse coordinate *conserva gli angoli.* Se il suddetto fattore è costante, gli spazi si dicono *simili* e la geometria dell'uno si riduce a quella dell'altro, mutando l'unità di lunghezza.

6. — Una ipersuperficie V_{n-1} di S_n è definita col porre le x_i eguali ad n funzioni di $n-1$ parametri indipendenti $u_1, u_2, \ldots. u_n-1$:

$$x_i = \varphi_i\,(u_1,\, u_2 \,.\, . \, . \, . \, u_n) \quad (i = 1, 2, \, . \, . \, n). \tag{7}$$

Come per le superficie dello spazio euclideo a tre dimensioni, ad ogni ipersuperficie V_{n-1} di S_n appartengono due *forme quadratiche fondamentali:*

$$\sum_{1}^{n-1}{}_{rs}\; b_{rs}\, du_r\, du_s \quad \sum_{1}^{n-1}{}_{rs}\; \Omega_{rs}\, du_r du_s\,. \tag{8}$$

La prima misura il quadrato dell'elemento lineare della V_{n-1} ed i suoi coefficienti sono dati da:

$$b_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\; a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s}; \tag{9}$$

la seconda, a meno di un fattore costante infinitesimo, dà la variazione del ds^2 pel passaggio da V_{n-1} alla V'_{n-1} ad essa parallela ed infinitamente vicina. Definite le *costanti* X_i *della normale* a V_{n-1} colle formole:

$$(10)\quad \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} X_k = 0 \; (r = 1, 2; \cdots n-1)\,, \quad \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik}\, X_i\, X_k = 1\,,$$

le Ω_{rs} sono date dalle seguenti espressioni:

$$(11)\quad \Omega_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_{\mu\nu}\, a_{\mu\nu}\, X_\mu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_r\, \partial u_s} + \sum_{1}^{n}{}_{ik\mu} \begin{bmatrix} i\,k \\ \mu \end{bmatrix}_a \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_h}{\partial u_u} X_\mu$$

e sono legate alle b_{rs} dalle equazioni fondamentali:

$$(12)\quad \Omega_{\alpha\beta}\, \Omega_{\gamma\delta} - \Omega_{\alpha\gamma}\, \Omega_{\beta\gamma} = (\alpha\,\delta, \beta\,\gamma)_b - $$

$$- \sum_{1}^{n}{}_{rkih}\, (rk, ih)_a \frac{\partial x_r}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \frac{\partial x_h}{\partial u_\gamma} \frac{\partial x_k}{\partial u_\delta}\,.$$

$$(13)\quad \frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial \Omega_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \sum_{1}^{n-1}{}_t \begin{Bmatrix} \alpha\,\beta \\ t \end{Bmatrix}_b \Omega_{\gamma t} + \sum_{1}^{n-1}{}_t \begin{Bmatrix} \alpha\,\gamma \\ t \end{Bmatrix}_b \Omega_{\beta t} =$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{rkih}\, (rk, ih)_a \frac{\partial x_r}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \frac{\partial x_h}{\partial u_\gamma} X_k$$

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots n-1)$$

(gli indici a e b ai simboli indicando che essi sono costruiti per la forma (1) o per la prima delle (8)), che chiameremo rispettivamente di *Gauss* e di *Codazzi*, perchè sono appunto la generalizzazione delle note equazioni di Gauss e Codazzi per la teoria delle superficie dell'S_3 euclideo.

Ogni superficie geodetica di S_n passante per la geodetica normale alla V_{n-1} in un suo punto P si dirà *normale* alla stessa V_{n-1} in P. Ognuna di esse è perfettamente individuata dai rapporti $du_1 : du_2 : \ldots : du_{n-1}$ che caratterizzano quella direzione di V_{n-1} contenuta nella superficie geodetica in discorso. Questa sega V_{n-1} in una curva V_1 che, per analogia colle note denominazioni dello spazio ordinario, si dirà la *sezione normale* di V_{n-1} tangente alla direzione $du_1 : du_2 : \ldots\ldots : du_{n-1}$. La sua flessione [1] $\frac{1}{R}$ in P è misurata da

$$\frac{1}{R} = \frac{\Sigma_{rs}\, \Omega_{rs}\, du_r\, du_s}{\Sigma_{rs}\, b_{rs}\, du_r\, du_s}.$$

I massimi e minimi di R sono, per ogni punto, le radici dell'equazioni di grado $(n-1)^{mo}$:

$$(14)\quad \begin{vmatrix} b_{11} - R\,\Omega_{11} & b_{12} - R\,\Omega_{12} & \ldots\ldots & b_{1n} - R\,\Omega_{1n} \\ b_{21} - R\,\Omega_{21} & b_{22} - R\,\Omega_{22} & \ldots\ldots & b_{2n} - R\,\Omega_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1} - R\,\Omega_{n-1,1} & b_{n-1,2} - R\,\Omega_{n-2,2} & \ldots & b_{n-1,n-1} - R\,\Omega_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = 0$$

le quali, per essere definita la forma delle b, sono tutte reali; ed hanno luogo nelle $n-1$ direzioni in generale distinte, definite

---

[1] Per *flessione* di una curva V_1 in un suo punto P intendiamo il limite per $t=0$ di $\frac{2\,d}{t^2}$, dove t é la lunghezza dell'arco della curva stessa compreso tra il punto P ed un punto P' prossimo ad esso, d la distanza di P' dal punto P'' situato a distanza t da P sulla geodetica di S_n tangente in P a V_1.

Se si rappresenta la curva colle equazioni:

$$x_i = x_i\ (t) \quad (i = 1, 2, \ldots . n)$$

dando cioè le coordinate di un punto mobile su di essa in funzione dell'arco s contato a partire da un punto fisso, la flessione $\frac{1}{\rho}$ così definita è data dalla formola seguente:

$$\frac{1}{\rho^2} = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, a_{ik} \left\{ \frac{d^2x_i}{ds_2} + \sum_{1}^{n}{}_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\,\mu \\ i \end{matrix} \right\}_a \frac{dx\lambda}{ds}\, \frac{dx\,\mu}{ds} \right\} \left\{ \frac{d^2 x_k}{ds^2} + \sum_{1}^{n}{}_{\lambda\mu} \left\{ \begin{matrix} \lambda\mu \\ k \end{matrix} \right\}_a \frac{dx\lambda}{ds}\, \frac{dx\mu}{ds} \right\}.$$

È da notarsi che, come per l'ordinario spazio euclideo, la flessione di una curva non può essere costantemente nulla in un tratto se in esso la curva non è geodetica.

dagli $n-1$ sistemi lineari di cui il k^{esimo} è:

$$(15) \qquad \sum_1^{n-1}{}_s(b_{rs} - R_k\,\Omega_{rs})\,du_s = 0 \;(r = 1, 2, \ldots n-1)$$

avendo indicato con R_1, R_2, ... R_{n-1} le radici della (14), cioè le inverse delle $n-1$ *curvature principali*. Queste $n-1$ direzioni si dicono le direzioni principali della V_{n-1}, e sono due a due ortogonali. Le *linee di curvatura* sono quelle che in ogni punto toccano una direzione principale; su ogni V_{n-1} ne esistono $n-1$ sistemi, corrispondentemente ad ogni curvatura principale. Il k^{esimo} è costituito dalle linee integrali delle equazioni differenziali (15).

7. — Ritorniamo ora alla formola data al n. 3 per la curvatura riemanniana di uno spazio per aggiungere le seguenti considerazioni, relative al caso di $n = 3$, cioè di uno spazio S_3 a tre dimensioni.

Se riguardando come identici due indici congrui rispetto al modulo 3, poniamo:

$$\begin{vmatrix} \xi^{(1)}_{r+1} & \xi^{(1)}_{r+2} \\ \xi^{(2)}_{r+1} & \xi^{(2)}_{r+2} \end{vmatrix} = \eta_r\,,$$

$$(r+1 \quad r+2, \quad s+1 \quad s+2) = ab_{rs}$$

ed osserviamo che:

$$a_{r+1,\,s+1}\;a_{r+2,\,s+2} - a_{r+1,\,s+2}a_{r+2,\,s+1} = a\,A_{rs}\,,$$

la (5) si scrive, in questo caso, semplicemente così:

$$(16) \qquad K = \frac{\sum_1^3 b_{rs}\,\eta_r\,\eta_s}{\sum_1^3 A_{rs}\,\eta_r\,\eta_s}\,.$$

In ogni punto dello spazio, i valori massimi e minimi di K hanno luogo in tre orientazioni, in generale distinte. Essi sono le radici K_1, K_2, K_3 dell'equazione cubica in K:

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} K\,A_{11} - b_{11} & K\,A_{12} - b_{12} & K\,A_{13} - b_{13} \\ K\,A_{21} - b_{21} & K\,A_{22} - b_{22} & K\,A_{23} - b_{23} \\ K\,A_{31} - b_{31} & K\,A_{32} - b_{32} & K\,A_{33} - b_{33} \end{vmatrix} = 0\,.$$

e sono tutti reali; si chiamano le *curvature principali* dell' S_3 nel punto considerato. Corrispondentemente si hanno in ogni punto tre *direzioni principali*, esse sono le direzioni ortogonali alle orientazioni principali, a quelle cioè nelle quali la curvatura riemanniana assume uno dei valori principali. È facile calcolare le costanti di una direzione principale. Infatti le costanti ξ_1, ξ_2, ξ_3 di una direzione sono legate alle η della orientazione ortogonale dalle formole:

$$(18) \qquad \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \Sigma_i \, A_{1i} \, \eta_i : \Sigma_i \, A_{2i} \, \eta_i : \Sigma_i \, A_{3i} \, \eta_i \,,$$

le η della orientazione principale corrispondente alla curvatura principale K_s sono poi definite dalle formole:

$$(19) \qquad \Sigma_k \, (K_s \, A_{ik} - b_{ik}) \, \eta_k = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Linee principali dello spazio si chiamano quelle che in ogni punto toccano una direzione principale. In ogni S_3 ne esistono tre congruenze, le quali sono due a due ortogonali. Questo se le radici della (17) sono distinte; se per tutti i punti dello spazio due delle dette radici coincidono, p. es. $K_1 = K_2$, vi è una sola congruenza principale perfettamente determinata, quella corrispondente alla curvatura K_3; si hanno poi infinite altre congruenze principali costituite da linee, che in ogni loro punto sono ortogonali a quella linea della congruenza suddetta che passa per esso. Se le radici della (17) coincidono tutte, e ciò per ogni punto dello spazio, in ordine a un teorema di SCHUR [1], esse sono tutte eguali ad una stessa costante e lo spazio è a curvatura costante.

Prima di lasciare queste considerazioni generali, vogliamo infine notare che la diseguaglianza:

$$(20) \qquad (K_1 - K) \; (K_2 - K) \; (K_3 - K) > 0$$

è necessaria affinchè l' S_3 le cui curvature principali sono K_1, K_2, K_3 possa esistere in un S_4 di curvatura costante K.

---

[1] Il teorema è il seguente: *Se in uno spazio* S_n *la curvatura riemanniana non varia, per ogni singolo punto, col variare della orientazione cui essa si riferisce, essa non può nemmeno variare da punto a punto, ossia è assolutamente costante.*

§. 2.

Classificazione degli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo a quattro parametri di movimenti.

8. — Dal punto di vista dello studio della loro geometria, offrono uno speciale interesse quegli spazi S_n i cui movimenti formano una totalità continua, dipendente cioè da parametri arbitrari. Tale totalità forma in ogni caso un *gruppo*, ed in questo sarà contenuto un gruppo *continuo finito di Lie*. Si presenta quindi la questione di determinare tutti gli spazi che ammettono gruppi continui di movimenti (v. § 1, n. 5).

Per $n = 2$ il risultato è ben noto, si sa cioè che l'elemento lineare di una superficie che ammette un gruppo continuo di applicabilità in sè stessa appartiene ad una superficie di rotazione generale, se il gruppo supposto è ad un parametro, ad una superficie a curvatura costante se il gruppo è più ampio. È noto inoltre che il gruppo *completo* delle applicabilità di una superficie in sè, se non è un G_1, è necessariamente un G_3 [1].

Il caso $n = 3$ fu risoluto completamente dal prof. Bianchi in una sua memoria [2] dove si trovano classificati tutti i tipi di spazi a tre dimensioni che ammettono gruppi continui di movimenti. Egli, esaurita la ricerca degli spazi che ammettono un gruppo intransitivo (come gruppo completo oppure no), si rivolge alla trattazione degli spazi il cui G_r è transitivo (e quindi $r \geq 3$). Tale trattazione è basata sul teorema fondamentale, stabilito al § 12 della citata Memoria, che cioè *dato ad arbitrio un gruppo semplicemente transitivo, esiste sempre uno spazio che lo ammette come gruppo di movimenti,* e per la determinazione effettiva degli spazi in questione, l'A. prende le mosse dalla classificazione data da Lie

---

[1] Con G_r indichiamo un gruppo continuo ad r parametri.

[2] *Sugli spazi a tre dimensioni ecc.* Memorie della Società italiana delle Scienze; Serie 3.ª tomo XI, 1897.

delle composizioni dei gruppi a tre parametri, costruendo volta per volta coll'aiuto di considerazioni geometriche e delle equazioni di KILLING (§ 1, n. 4), una forma tipica dell'elemento lineare corrispondentemente ad ogni tipo di gruppo transitivo G_3. Non sempre accade che il gruppo da cui si parte sia il gruppo *completo* di movimenti dello spazio, anzi certe composizioni di G_3 portano come necessaria conseguenza l'esistenza di un gruppo più ampio ammesso dallo spazio corrispondente. In ogni caso a tale questione si risponde perfettamente integrando le equazioni di KILLING, che sono le *equazioni di definizione* [1] del gruppo di movimenti dello spazio considerato. A questo punto, il problema è oramai risoluto completamente, perchè, come l'A. dimostra nei §§ 36-37 della citata Memoria, se uno spazio a tre dimensioni ammette un G_r di movimenti con $r > 3$, esiste certo in G_r un sottogruppo G_3 per cui lo spazio deve rientrare in uno di quelli studiati precedentemente. Egli dimostra inoltre che nessun S_3 può possedere un G_5 reale di movimenti, neppure come sottogruppo del gruppo completo.

9. — Ne segue che dopo gli spazi a curvatura costante (che ammettono un G_6), la massima mobilità delle figure di un S_3 ha luogo in quelli il cui gruppo di movimenti è a quattro parametri, ed è di questi appunto che ci occuperemo più specialmente nel seguito. I loro elementi lineari (come si rileva dai calcoli eseguiti dal prof. BIANCHI) sono riducibili, a meno di un fattore costante, ad uno dei tre tipi seguenti:

$$\text{(I)}\quad ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + 2\,x_1\,dx_2\,dx_3 + (x_1^2 + 1)\,dx_3^2$$

$$\text{(II)}\quad ds^2 = dx_1^2 + e^{2x1}\,dx_2^2 + 2n\,e^{x1}\,dx_2\,dx_3 + dx_3^2,\ (n^2 < 1$$

$$\text{(III)}\quad ds^2 = dx_1^2 + (\sin^2 x_1 + n^2\cos^2 x_1)\,dx_2^2 + 2n\cos x_1\,dx_2\,dx_3 + dx_3^2\ (n^2 \mp 1).$$

I gruppi corrispondenti sonò i G_4 generati dalle trasformazioni infinitesime:

---

[1] LIE. — *Transgr.* Bd. 1, Kap. 11.

per (I):

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \; X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_3}, \; X_3 f = -\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$X_4 f = x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_3^2)\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3} =$$

$$= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_3^2) X_1 f - x_1 X_2 f - x_3 X_3 f$$

con la composizione:

$$(X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_2 X_4) = 0 \, , \; (X_2 X_3) = X_1 f,$$

$$(X_2 X_4) = - X_3 f, \; (X_3 X_4) = X_2 f;$$

per (II):

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \; X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_3}, \; X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$X_4 f = x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2x1}}{1-n^2} - x_2^2\right)\frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{n\, e^{-x1}}{1-n^2}\frac{\partial f}{\partial x_3} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2x1}}{1-n^2} + n_2^2\right) X_1 f - \frac{n\, e^{-x1}}{1-n^2} X_2 f + x_2 X_3 f$$

colla composizione:

$$(X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_2 X_4) = 0 \, , \; (X_1 X_3) = - X_1 f$$

$$(X_1 X_4) = X_3 f, \; (X_3 X_4) = - X_4;$$

per (III):

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \; X_2 f = \cos x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} -$$

$$- \cot x_1 \sin x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{n \sin x_2}{\sin x_1}\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$X_3 f = -\sin x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \cot x_1 \cos x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{n \cos x_2}{\sin x_1}\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

$$X_4 f = \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{1}{n}(\cos x_1 X_1 f + \sin x_2 \sin x_1 X_2 f + \cos x_2 \sin x_1 X_3 f)$$

con la composizione:

$$(X_2 X_3) = X_1 f, \quad (X_3 X_1) = X_2 f, \quad (X_1 X_2) = X_3 f,$$
$$(X_1 X_4) = (X_2 X_4) = (X_3 X_4) = 0.$$

I tre tipi sono essenzialmente distinti, come si rileva dall'osservare che il gruppo derivato del rispettivo gruppo di movimenti è integrabile per il tipo (I), semplice per gli altri due, contiene dei G_2 reali per il tipo (II), il che non avviene per il tipo (III).

Quanto alla costante n che compare negli elementi lineari (II) e (III), essa è *essenziale* (in valore assoluto), cioè due spazi corrispondenti a due valori della costante diversi in valore assoluto non sono nè applicabili nè simili, come ha dimostrato il prof. BIANCHI (v. nota pag. 17).

I gruppi superiori sono tutti *sistatici* [1]. Questo si riconosce applicando i criteri generali di LIE. Basta infatti osservare che i coefficienti di $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$, nell'espressione della trasformazione infinitesima $X_4 f$, come funzione lineare omogenea delle precedenti, dipendono da due sole delle variabili x_1, x_2, x_3. Le varietà sistatiche sono dunque rispettivamente le linee (x_2), (x_3), (x_3); in ogni caso geodetiche dello spazio. I gruppi stessi sono tutti transitivi ed il movimento più generale dello spazio si compone di una *traslazione* che permette di portare a coincidere un punto con qualunque altro, e di una *rotazione* attorno ad una delle geodetiche sistatiche.

10. — La definizione di curvatura riemanniana mostra che, per gli spazi considerati, essa non può variare da punto a punto; di più per ogni punto essa deve essere la stessa per tutte le orientazioni contenenti la direzione della geodetica sistatica passante per esso.

Possiamo confermare e precisare questi risultati, calcolando per ognuno dei tipi (I), (II), (III) le corrispondenti curvature principali. Dando ai simboli il significato spiegato al §. 1 (n. 7); abbiamo per

[1] LIE. — *Transgr.* Bd. 1, Kap. 24.

il tipo (I):

$$a_{11} = a_{22} = 1 \ , \ a_{12} = a_{13} = 0 \ , \ a_{23} = x_1 \ , \ a_{33} = x_1^2 + 1 \ ;$$

$$a = 1 \ ; \ A_{11} = A_{33} = 1 \ , \ A_{12} = A_{13} = 0 \ , \ A_{22} = x_1^2 + 1 \ , \ A_{23} = - x_1 \ ,$$

i simboli di CHRISTOFFEL di prima specie sono tutti nulli salvo:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 23 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \ , \ \begin{bmatrix} 13 \\ 3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 33 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 \ ,$$

per i valori delle b_{rs} troviamo quindi:

$$b_{11} = \frac{1}{4} \ , \ b_{22} = -1 + \frac{1}{4}(x_1^2 + 1) \ , \ b_{33} = \frac{1}{4} \ , \ b_{23} = - \frac{1}{4} x_1 \ ,$$

$$b_{31} = b_{12} = 0 \ ,$$

e l'equazione (17) del n. 7 (§. 1) diviene:

$$\left(K - \frac{1}{4}\right)^2 \left(K + \frac{3}{4}\right) = 0,$$

da cui:

$$K_1 = K_2 = \frac{1}{4} \ , \ K_3 = - \frac{3}{4} \ . \tag{1}$$

Per il tipo (II) abbiamo poi:

$$a_{11} = a_{33} = 1 \ , \ a_{22} = n \, e^{x1} \ , \ a_{13} = a_{12} = 0 \ ;$$

$$a = e^{2x1}(1 - n^2) ; \ A_{11} = 1 \ , \ A_{22} = \frac{e^{-2x1}}{1 - n^2} \ , \ A_{33} = \frac{1}{1 - n^2} \ ,$$

$$A_{23} = \frac{-n}{e^{x1}(1 - n^2)} \ , \ A_{13} = A_{23} = 0 \ ;$$

i simboli di CHRISTOFFEL di prima specie sono tutti nulli tranne:

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ 2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 23 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{n}{2} e^{x1} \ , \ \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 22 \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2x1} \ ;$$

si ha poi:

$$b_{11} = \frac{n^2}{4(1 - n^2)} \ , \ b_{22} = \frac{n^2}{4 \, e^{2x1}(1 - n^2)^2} \ , \ b_{33} = \frac{5 \, n^2 - 4}{4 \, (1 - n^2)^2} \ ,$$

$$b_{23} = \frac{-n^3}{4 \, e \, x^1 (1 - n^2)^2} \ , \ b_{31} = b_{12} = 0 \ ;$$

la (17) del n. 7, dopo facili riduzioni si scrive:

$$\left(K - \frac{n^2}{4(1-n^2)}\right)^2 \left(K(n^3-1) - \frac{n^4 - 5n^2 + 4}{4(4-n^2)}\right) = 0$$

e dà:

$$(2) \qquad K_1 = K_2 = \frac{n^2}{4(1-n^2)}, \quad K_3 = \frac{n^2-4}{4(1-n^2)}.$$

Infine per il tipo (III) abbiamo:

$$a_{11} = a_{33} = 1, \quad a_{22} = \sin^2 x_1 + n^2 \cos^2 x_1, \quad a_{23} = n \cos x_1,$$

$$a_{13} = a_{12} = 0; \quad a = \sin^2 x_1; \quad A_{11} = 1, \quad A_{22} = \frac{1}{\sin^2 x_1},$$

$$A_{33} = 1 + n^2 \cot^2 x_1, \quad A_{23} = -\frac{n \cos x_1}{\sin^2 x_1}, \quad A_{13} = A_{12} = 0;$$

i simboli di CHRISTOFFEL non nulli sono i seguenti:

$$-\begin{bmatrix}23\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}31\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix} = -\frac{1}{2} n \sin x_1, \quad \begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}22\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \sin x_1 \cos x_1 (n^2 - 1),$$

allora si ha:

$$b_{11} = \frac{n^2}{4}, \quad b_{22} = \frac{n^2}{4 \sin^2 x_1}, \quad b_{33} = \frac{1}{4}(n^4 \cos^2 x_1 + 4 - 3n^2),$$

$$b_{23} = -\frac{n^3}{4} \frac{\cos x_1}{\sin^2 x_1}, \quad b_{31} = b_{12} = 0,$$

con che la (17) del n. 7 si riduce a:

$$\left(K - \frac{n^2}{4}\right)^2 \left(K - \frac{4-3n^2}{4}\right) = 0$$

da cui

$$(3) \qquad K_1 = K_2 = \frac{n^2}{4}, \quad K_3 = \frac{4-3n^2}{4}. \text{ [1]}$$

---

[1] Le formole (2) e (3) mostrano chiaramente che due spazî corrispondenti a diversi valori di n^2, non sono nè applicabili nè simili.

Come si vede il caso escluso di $n^2 = 1$, darebbe uno spazio a curvatura costante $\frac{1}{4}$.

Se, secondo i procedimenti indicati al n. 7 del §. 1, si calcolano le costanti della direzione principale corrispondente alla curvatura ora indicata con K_3, si trova $\xi_1 = \xi_3 = 0$ per il tipo (I), $\xi_1 = \xi_2 = 0$ per i tipi (II) e (III). Unendo questo coi risultati precedenti e colle formole (1), (2), (3), possiamo formulare le seguenti proprietà geometriche degli spazi considerati:

Se uno spazio a tre dimensioni ammette un gruppo a quattro parametri come gruppo completo di movimenti, questo è necessariamente transitivo e sistatico. Lo spazio ha costanti le tre curvature principali [1]; *due di esse sono inoltre sempre eguali e positive; quanto alla terza, essa è sempre negativa per gli spazî dei tipi (I) e (II), e in valore assoluto eguale al triplo delle altre due per il tipo (I), e superiore al triplo delle altre due per il tipo (II). Per il tipo (III) la terza curvatura può esser negativa o positiva; se è negativa, il suo valore assoluto è inferiore al triplo delle altre due.*

Le linee principali corrispondenti alla terza curvatura sono geodetiche dello spazio [1] *e sono le varietà sistatiche del gruppo di movimenti.*

Così, dato l'elemento lineare di uno spazio, che ammette un G_4 di movimenti (cosa che si decide con sole operazioni algebriche e di derivazione), basterà calcolarne le curvature principali per sapere a quali delle tre forme (I), (II), (III) esso è riducibile (a meno di un fattore costante, ben inteso).

Relativamente ai gruppi di movimenti degli spazi considerati, facciamo ancora le osservazioni seguenti:

I G_4 in questione hanno un solo sottogruppo G_3, il loro gruppo derivato. Questo è generalmente transitivo; è intransitivo solo per quegli elementi lineari, appartenenti ai tipi (II) e (III) e corrispon-

---

[1] Cfr. Ricci. — *Sui gruppi continui ecc.* Memorie della Società italiana delle Scienze, serie 3.ª, tomo XII.

denti al valore 0 della costante n, cioè per gli elementi lineari:

$$(4) \qquad \begin{cases} ds^2 = dx_1^2 + e^{2x_1} dx_2^2 + dx_3^2 \\ ds^2 = dx_1^2 + \sin^2 x_1 \, dx_2^2 + dx_3^2 . \end{cases}$$

11. — Possiamo facilmente dimostrare che solo questi, tra gli spazi considerati, possono esistere in uno spazio euclideo a quattro dimensioni [1].

A tal uopo notiamo dapprima il teorema seguente:

Se uno spazio S_3 *esiste in un* S_4 *a curvatura costante* K_0 *e vi è deformabile, due delle curvature principali dell'* S_3 *sono eguali a* K_0.

Per dimostrare la cosa, ricordiamo che se una ipersuperficie S_3 esistente in un S_4 vi è deformabile, deve esser nullo il discriminante della sua seconda forma fondamentale [2]. Se supponiamo che S_4 sia a curvatura costante K_0 le equazioni di Gauss ((12) del n. 6, § 1) danno le seguenti relazioni:

$$\Omega_{r+1,\,s+1}\,\Omega_{r+2,\,s+2} - \Omega_{r+1,\,s+2}\,\Omega_{r+2,\,s+1} = a\,(b_{rs} - K_0\,A_{rs})$$
$$(r, s = 1, 2, 3)$$

dove i simboli del 2.° membro hanno il significato loro attribuito al §. 1, n. 7 e sono costruiti rispetto all'elemento lineare di S_3. Ora, l'ipotesi che il determinante:

$$\Omega = \begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{vmatrix}$$

sia eguale a zero porta di conseguenza, per note proprietà dei determinanti, che nel reciproco di Ω sono nulli tutti i minori del 2.° ordine; e ciò, per le relazioni superiori, significa che $K = K_0$ è radice doppia dell'equazione (17) del n. 7 (§. 1) c. d. d.

---

[1] Che ciò avvenga effettivamente, si vedrà in seguito (§. 4).

[2] Bianchi. — *Lezioni di Geometria Differenziale.* Vol. I, pag. 465. Pisa, 1902.

Dal teorema dimostrato segue intanto che, se escludiamo gli spazi (4), nessuno degli spazi considerati ai numeri precedenti può essere deformabile in un S_4 euclideo. Le formole (1), (2), (3) del presente numero insieme alla (20) del §. 1 (n. 7) ci mostrano poi di più che in un S_4 euclideo possono esistere soltanto quegli S_3 del tipo (III) per i quali

$$3\,n^2 < 5\,.$$

Ma anche questa ipotesi è da escludere, perchè, possedendo ognuno di questi spazi un G_4 di movimenti e non potendo esser deformabile in S_4, dovrebbe esistere nel G_{10} dei movimenti di S_4 un Γ_4 intransitivo isomorfo a G_4 che trasforma in se stesso il nostro S_3. Ora, dall'esame dei sottogruppi di G_{10} [1] si riconosce che in questo gruppo esiste il solo:

$$\Gamma_4 \equiv \left(x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial f}{\partial x_3}\,,\ x_1\frac{\partial f}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial f}{\partial x_1}\,,\ x_2\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}\,\cdot\ \frac{\partial f}{\partial x_4}\right) \text{[2]}$$

isomorfo col nostro G_4; ma le varietà invarianti rispetto ad esso sono le

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \text{cost.}$$

i cui elementi lineari sono proporzionali (per un fattore costante) al secondo degli elementi lineari (4).

È così giustificato completamente il nostro asserto.

§. 3.

Determinazione delle geodetiche.

12. — Classificati così gli spazi a tre dimensioni con un gruppo a quattro parametri di movimenti, ci proponiamo ora di determinarne le linee geodetiche.

---

[1] V. ad es. Bemporad. — *Sui gruppi di movimenti e similitudini ecc.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. VIII.

[2] x_1, x_2, x_3, x_4 sono coordinate cartesiane ortogonali in S_4.

Prima di procedere alla effettiva integrazione delle relative equazioni differenziali, stabiliamo brevemente il noto teorema: [1]

Se

$$Xf = \sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{1}$$

è una trasformazione infinitesima ammessa dall' elemento lineare:

$$ds^2 = \sum_1^n a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{2}$$

di uno spazio S_n *(movimento infinitesimo di* S_n*), l'equazione delle geodetiche possiede l'integrale primo*

$$\sum_1^n a_{ik}\, \xi_i \frac{dx_k}{ds} = \text{cost} . \tag{3}$$

Questo teorema è suscettibile di una notevole interpretazione geometrica. Osserviamo a tal uopo che, detta δt una costante infinitesima,

$$\delta x_i = \xi_i\, \delta t$$

è l'incremento che in virtù della trasformazione infinitesima (1) subisce la coordinata x_i, per modo che, detta δs la grandezza dello spostamento subìto dal punto generico $(x_1, x_2 , \ldots x_n)$, cioè posto:

$$\delta s^2 = \delta t^2 \sum a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k ,$$

le

$$\frac{\delta x_i}{\delta s} \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

saranno le costanti di direzione dello spostamento stesso. Ciò posto, se poniamo la (3) sotto la forma equivalente:

$$\delta s \sum_1^n a_{ik} \frac{\delta x_i}{\delta s} \frac{dx_k}{ds} = \text{cost} .$$

---

[1] Cfr. ad es. T. Levi-Civita. — *Sul moto di un corpo rigido ecc.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1896.

e teniamo presente la formola (2) del §. 1, n. 1, vediamo che il teorema superiore si può enunciare così:

Se S_n *ammette un movimento infinitesimo, lungo ogni sua geodetica è costante il prodotto del coseno dell'angolo che questa forma in ogni punto colla direzione dello spostamento infinitesimo che lo stesso punto subisce per il supposto movimento, moltiplicato per la grandezza dello spostamento medesimo.*

Per dimostrarlo, cominciamo coll'osservare che per $n = 2$, esso coincide col noto teorema di Clairaut sulle superficie applicabili sulle superficie di rotazione (superficie che ammettono una flessione infinitesima in sè). Poi, supposto n qualunque, si consideri una geodetica g a piacere del nostro S_n, e per ognuno dei suoi punti si costruisca quella delle traiettorie del gruppo G_1, generato dalla trasformazione infinitesima Xf, che passa per esso. Queste ∞^1 traiettorie t riempiranno manifestamente una superficie applicabile su una superficie di rotazione, il cui gruppo di flessioni ha precisamente per traiettorie le linee t e sulla quale g è una geodetica. Allora, pel teorema di Clairaut, sarà lungo g:

$$\delta s \cos \omega = \text{cost} .$$

essendo δs, ω lo spostamento e l'angolo di cui si parla nell'enunciato superiore; e con ciò è dimostrato quanto si voleva. [1]

---

[1] *Osservazione.* — Dal teorema dimostrato si può dedurre una dimostrazione semplice del teorema osservato dal prof. BIANCHI (mem. cit. §. 2) e che dice: *Due movimenti infinitesimi di un* S_n *non possono aver in comune le traiettorie senza coincidere.* — Se il nostro S_n ammette le due trasformazioni infinitesime:

$$Xf = \sum \xi_s \frac{\partial f}{\partial x_s} , \quad Yf = \sum \eta_s \frac{\partial f}{\partial x_s} ,$$

le equazioni delle geodetiche ammetteranno gli integrali primi:

$$\sum a_{rs} \xi_r \frac{dx_s}{ds} = c , \quad \sum a_{rs} \eta_r \frac{dx_s}{ds} = c' ,$$

13. — Supponiamo che l'elemento lineare (2) ammetta le r trasformazioni infinitesime indipendenti

$$X_1 f \ , \ X_2 f \ , \ . \ . \ . \ X_r f$$

di cui le prime s non soddisfino ad alcuna identità lineare della forma:

$$\chi_1 (x_1, x_2, \dots x_n) X_1 f + \dots\dots + \chi_s (x_1, x_2, \dots x_n) X_s f = 0$$

mentre le ultime $r - s$ si esprimano per le prime s mediante le formole:

$$X_{s+i} f = \varphi_{i1} X_1 f + \varphi_{i2} X_2 f + \dots + \varphi_{is} X_s f \ (i = 1, 2 \dots r - s) \ ,$$

dove le φ sono funzioni delle x.

Potremo allora scrivere subito, corrispondentemente alle s trasformazioni infinitesime $X_1 f$, $X_2 f$, . . . $X_s f$, s integrali primi indipendenti delle equazioni delle geodetiche, indichiamoli con

$$\Phi_1 = c_1 \ , \quad \Phi_2 = c_2 \ . \ . \ . \ , \quad \Phi_s = c_s$$

dove le c_i sono costanti arbitrarie. Gli integrali forniti, secondo il teorema precedente, dalle trasformazioni infinitesime $X_{s+1} f \dots X_r f$ saranno, come subito si vede, dati dalle formole:

$$\varphi_{i1} \Phi_1 + \varphi_{i2} \Phi_2 + \dots + \varphi_{is} \Phi_s = c_{s+i} \quad (i = 1, 2 \dots r - s)$$

dove le c_{s+i} rappresentano $r - s$ nuove costanti arbitrarie; e poichè, in forza delle equazioni superiori, queste equazioni si possono scrivere:

$$\varphi_{i1} c_1 + \varphi_{i2} c_2 + \dots + \varphi_{is} c_s = c_{s+i} \quad (i = 1, 2, \dots r - s) \ ,$$

esse ci danno senz'altro delle relazioni in termini finiti tra le x, ossia degli effettivi integrali delle equazioni delle geodetiche.

(c e c' costanti); i quali sono certo distinti, se le trasformazioni infinitesime $X f$ e $Y f$ sono indipendenti. Se fosse:

$$\xi_r = \lambda \eta_r \ (r = 1, 2 \ . \ . \ . \ n) \ ,$$

si dedurrebbe dalle formole superiori $\lambda =$ cost., onde il teorema enunciato.

Se si suppone $s = n$ e

$$X_k f = \sum_i \xi_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (k = 1, 2 \ldots n),$$

dalle n equazioni:

$$(4) \qquad \Sigma_{lm}\, a_{lm}\, \xi_{lk} \frac{dx_m}{ds} = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$

si potranno ricavare i valori delle derivate prime $\frac{dx_i}{ds}$, perchè il determinante dei loro coefficienti nel sistema (4) ha per elemento generale

$$\Sigma_l\, \xi_{lk}\, a_{lm},$$

è quindi eguale al prodotto del determinante delle ξ_{lk} per il discriminante di (2) e perciò diverso da zero. [1]

È da notarsi che nei secondi membri delle equazioni ottenute non figura esplicitamente l'arco s, per cui quel sistema si può porre sotto la forma:

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots\ldots = \frac{dx_n}{f_n} = ds$$

dove le f sono funzioni delle sole $x_1, x_2, \ldots x_n$. Lasciando l'ultimo

---

[1] Si noti che delle c_k delle formole (4) non possono darsi ad arbitrio che i rapporti, inquantochè le $\frac{dx_i}{ds}$ devono soddisfare alla relazione:

$$(\alpha) \qquad \sum a_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds} = 1.$$

Se si pone:

$$b_{mk} = \sum_l a_{lm}\, \xi_{lk}$$

e si indica con B_{mk} il complemento algebrico di b_{mk} nel determinante $b = | b_{mk} |$ diviso per b stesso, si ha facilmente, risolvendo le (4):

$$\frac{dx_r}{ds} = \sum_k c_k\, B_{rk},$$

e sostituendo questi valori in (α) si ottiene:

$$(\beta) \qquad \Sigma_{rsik}\, a_{rs}\, B_{si}\, B_{rk}\, c_i\, c_k = 1$$

che è l'*unica* relazione a cui debbono soddisfare le c.

membro, rimane un sistema normale di primo ordine, per la cui integrazione è necessaria e sufficiente la conoscenza di $n - 1$ integrali indipendenti della forma:

$$\theta\,(x_1, x_2, \ldots x_n) = \text{cost.} \tag{5}$$

Noti questi, s si avrà con una quadratura e con ciò si avranno le coordinate di un punto mobile lungo una geodetica espresso per l'arco e per le debite costanti arbitrarie, cioè l'integrale generale del sistema (4) del §. 1 (n. 2). In particolare gli integrali (5) potranno esser forniti da altrettante trasformazioni infinitesime ammesse dalla forma (2). Possiamo dunque dire che:

Se uno spazio S_n *ammette un gruppo transitivo di movimenti,* [1] *l'integrazione delle equazioni delle geodetiche in esso dipende da quella di un sistema normale di* $n - 1$ *equazioni differenziali di primo ordine e da una quadratura* (se si vuol conoscere l'arco delle geodetiche).

Se il gruppo transitivo supposto contiene più di n parametri quel sistema di prim' ordine può certamente ridursi a contenere un minor numero di equazioni.

14. — Coll'uso di precedenti teoremi possiamo facilmente ora dimostrare che: *l'integrazione delle equazioni delle geodetiche di un* S_3 *dotato di un* G_4 *di movimenti richiede soltanto operazioni algebriche e quadrature, purchè si conoscano le trasformazioni infinitesime generatrici del* G_4.

A tal uopo richiamiamo i risultati del n. 10 (§. 2), dai quali appare che il supposto G_4 è necessariamente sistatico. Di più osserviamo che, come risulta dalle tabelle al n. 9 (§. 2), il detto gruppo contiene sempre una trasformazione infinitesima avente per traiettorie le varietà (linee) sistatiche del gruppo [2] e che è *ecce-*

---

[1] In tal caso si ha appunto $s = n$.

[2] La $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ per gli spazi (II) e (III) e la $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ per l'(I). Si noti che le particolarità osservate nel testo sono affatto indipendenti dalla scelta delle variabili.

zionale nel gruppo stesso. È facile vedere, che con operazioni della specie indicata, si può eseguire una trasformazione di coordinate nello spazio supposto, in guisa che le nuove linee (x_3) siano le traiettorie della trasformazione infinitesima eccezionale e questa abbia la forma semplice $\frac{\partial f}{\partial x_3}$. Dette infatti y_1, y_2, y_3 le antiche coordinate, x_1, x_2, x_3 le nuove, tra le quattro trasformazioni infinitesime generatrici del G_4 sussisterà necessariamente una relazione della forma:

$$X_4 = \varphi_1 (y_1, y_2, y_3) X_1 + \varphi_2 (y_1, y_2, y_3) X_2 + \varphi_3 (y_1, y_2, y_3) X_3 ,$$

essendo X_1, X_2, X_3, X_4 trasformazioni infinitesime indipendenti del nostro G_4. E delle tre funzioni φ_1, φ_2, φ_3 due sole saranno indipendenti [1], siano φ_1 e φ_2. Detta allora f una qualunque funzione di y_1, y_2, y_3, indipendente da quelle, basterà eseguire sull'elemento lineare dato la trasformazione:

$$x_1 = \varphi_1 (y_1, y_2, y_3) , \quad x_2 = \varphi_2 (y_1, y_2, y_3) , \quad x_3 = f (y_1, y_2, y_3)$$

per ottenere che le linee (x_3) siano le linee sistatiche del gruppo. La espressione della trasformazione infinitesima eccezionale di cui sopra sarà allora della forma:

$$\xi (x_1, x_2, x_3) \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

e mutando $\int \frac{dx_3}{\xi}$ in x_3, la si ridurrà alla forma normale voluta $\frac{\partial f}{\partial x_3}$.

Fatto ciò, i coefficienti dell'elemento lineare dello spazio e quelli delle altre trasformazioni infinitesime del gruppo saranno indipendenti da x_3; la prima cosa risulta subito dalle formole (6) del §. 1 (n. 4) applicate alla $\frac{\partial f}{\partial x_3}$, la seconda dall'essere questa trasformazione infinitesima eccezionale, cioè permutabile con ogni altra del gruppo.

---

[1] Lie. — *Transgr.* Bd. I, Kap. 24.

Per la prima parte del teorema del n. prec., essendo necessariamente transitivo il gruppo di movimenti del nostro spazio, si potrà far dipendere l'integrazione delle geodetiche in esso da quella di un sistema normale della forma:

$$(6) \qquad \frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \frac{dx_3}{f_3} ,$$

ma ora le funzioni f, in virtù del modo con cui sono formate e della proprietà sopra osservata, saranno indipendenti da x_3. Essendo poi un G_4 $(4 > n)$ il gruppo completo di movimenti del nostro S_3, si conoscerà, in forza della seconda parte del teorema del n. prec., un integrale di (6), il quale, per la solita ragione, sarà indipendente da x_3, cioè della forma:

$$(7) \qquad F\,(x_1, x_2) = \text{cost} .$$

Per mezzo di esso si eliminerà dalle (6) una delle due variabili x_1, x_2, p. es. x_1; allora nel sistema risultante fra x_2 ed x_3 le variabili sono subito separate e una quadratura dà x_3 in funzione di x_2. Invertendo, si avrà x_2 in funzione di x_3 e dalla (7), risolvendo, anche x_1 in funzione di x_3. Un'ulteriore quadratura farà conoscere finalmente l'arco s delle geodetiche e quindi x_1, x_2, x_3 in funzione di esso, cioè le equazioni generali delle geodetiche del nostro spazio.

Notiamo che tali equazioni conterranno *quattro* costanti arbitrarie *essenziali*, per le quali potremo prendere le *due* effettive che entrano in (6) (v. nota a pag. 24), quella della (7) e quella che nasce dall'esprimere x_3 in funzione di x_2; fissate le quali resta perfettamente individuata una geodetica.

15. — Come esempio eseguiremo l'integrazione dell'equazione delle geodetiche per lo spazio (I):

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + 2\,x_1\,dx_2\,dx_3 + (x_1^2 + 1)\,dx_3^2 .$$

La prima parte del procedimento indicato al n. precedente non è qui necessaria, perchè le linee sistatiche sono già linee coordinate. Seguendo il metodo dato, considereremo dapprima il $G_3 \equiv (X_1, X_2, X_3)$

(v. §. 2, n. 9), il quale, secondo la (3), fornisce i tre integrali primi:

$$(\alpha) \qquad \frac{dx_2}{ds} + x_1 \frac{dx_3}{ds} = a_1 \; , \quad x_1 \frac{dx_2}{ds} + (x_1^2 + 1) \frac{dx_3}{ds} = a_2 ,$$

$$-\frac{dx_1}{ds} + x_3 \frac{dx_2}{ds} + x_1 \, x_3 \frac{dx_3}{ds} = a_3 \; (a_1, a_2, a_3 \text{ cost. arb.}) \, .$$

In virtù della prima, la 2.ª e la 3.ª delle (α) si scrivono:

$$(\beta) \qquad \frac{dx_3}{ds} = - a_1 x_1 + a_2 \; , \quad \frac{dx_1}{ds} = a_1 x_3 - a_3$$

dopodichè la prima delle (α) stesse diviene:

$$(\gamma) \qquad \frac{dx_2}{ds} = a_1 (x_1^2 + 1) - a_2 x_1 \; .$$

Il sistema (6) è qui rappresentato da:

$$\frac{dx_1}{a_1 x_3 - a_3} = \frac{dx_2}{a_1 (x_1^2 + 1) - a_2 x_1} = \frac{dx_3}{- a_1 x_1 + a_2} \, .$$

Di questo sistema si può subito scrivere un integrale servendoci della trasformazione infinitesima X_4 (§, 2, n. 8); cioè:

$$\frac{a_1}{2} (x_1^2 + x_3^2) - a_2 x_1 - a_3 x_3 = \text{cost.}$$

Del resto quest'integrale si può dedurre subito anche per via diretta. Mediante esso potremo ora eliminare dalle (β) una delle variabili x_1, x_2 e ridurre a quadrature l'integrazione delle (β) stesse. Ma questa del resto si può in questo caso eseguire facilmente e ci dà:

$$x_1 = a_4 \sin a_1 s - a_5 \cos a_1 s + \frac{a_2}{a_1}$$

$$x_3 = a_5 \sin a_1 s + a_4 \cos a_1 s + \frac{a_3}{a_1}$$

essendo a_4, a_5 le due costanti di integrazione.

Sostituendo ad x_1, nella (γ), il suo valore, il secondo membro risulta funzione quadratica di sin a_1 s cos $a_1 s$ e la quadratura:

$$x_3 = \int_0^s \left\{ a_1 (x_1^2 + 1) - a_2 x_1 \right\} d\,s + a_6$$

che si può eseguire per seni e coseni, porgerà x_3 con una nuova costante arbitraria a_6.

La formola (β) della nota a pag. 26 applicata al caso nostro dà la seguente relazione tra le costanti:

$$a_1^2 = \frac{1}{1 + a_4^2 + a_5^2}.$$

La costante a_1 è dunque determinata dalle a_4, a_5. Senza alterare la generalità potremo sempre supporre $a_6 = 0$, convenendo di assegnare ad ogni geodetica per punto iniziale ($s = 0$) il punto in cui incontra la superficie $x_3 = 0$ [1]; dimodochè infine le costanti essenziali da cui dipende la posizione di una geodetica sono le

$$a_2\,,\ a_3\,,\ a_4\,,\ a_5\,,$$

di cui le due prime fissano la direzione, le ultime il punto iniziale della geodetica stessa.

§. 4.

Delle ipersuperficie totalmente geodetiche.

16. — Integrate le equazioni delle geodetiche si possono senza difficoltà scrivere le equazioni delle superficie geodetiche (v. §. 1, n. 3), come luoghi (evidentemente per gli S_3 vale questa definizione) delle geodetiche uscenti da un punto perpendicolarmente ad una direzione.

Per un S_3 qualunque le superficie geodetiche formano una totalità ∞^5, cioè una superficie geodetica rispetto ad un punto non lo è, in generale, rispetto a qualunque altro suo punto. La condizione

[1] Veniamo con ciò a supporre tacitamente che le geodetiche incontrino tutte questa superficie; cosa che non si può asserire a priori. Ma a noi interessa solo mostrare che la costante a_6 non è essenziale.

necessaria e sufficiente affinchè ciò avvenga per ogni punto di una tale superficie, e per tutte le superficie considerate è che lo spazio sia a curvatura riemanniana costante, nel qual caso ogni superficie geodetica è *totalmente geodetica.* Il loro numero è allora ∞^3.

Una superficie è totalmente geodetica allora e allora soltanto che tutte le sue geodetiche sono geodetiche dello spazio ambiente. Nel presente § vogliamo ricercare se negli spazi considerati ai §§ precedenti esistono superficie totalmente geodetiche e nel caso affermativo determinarle tutte. A tale scopo premettiamo alcuni teoremi generali che ci faciliteranno la accennata ricerca.

17. — Definita *ipersuperficie totalmente geodetica* di un S_n una ipersuperficie di cui ogni geodetica è geodetica di S_n, dimostriamo che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una ipersuperficie sia totalmente geodetica è che sia identicamente nulla la sua seconda forma fondamentale.

Assumiamo la supposta ipersuperficie come ipersuperficie coordinata $x_n = 0$ e prendiamo le linee (x_n) in modo che le siano ortogonali, dimodochè, indicando con $f^{(0)}$ il risultato della sostituzione $x_n = 0$ in $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, se:

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

è l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di S_n, sarà:

$$a_{in}^{(0)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n-1),$$

e quindi anche:

$$A_{in}^{(0)} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n-1).$$

Le formole (10) del n. 6 (§. 1) applicate al caso nostro, supponendo:

$$u_i = x_i \quad (i = 1, 2 \ldots n-1)$$

danno per le costanti di direzione X_i della normale alla $x_n = 0$

le formole:

$$X_k = 0 \ (k = 1, 2 \ldots, n-1) \ , \ X_n = \frac{1}{\sqrt{a_{nn}^{(0)}}}$$

dopodichè dalle (11) dello stesso § deduciamo per i coefficienti Ω_{rs} della seconda forma fondamentale della nostra ipersuperficie $x_n = 0$ le espressioni:

$$(1) \quad \Omega_{rs} = \frac{1}{\sqrt{a_{nn}^{(0)}}} \begin{bmatrix} rs \\ n \end{bmatrix}^{(0)} = -\frac{1}{2\sqrt{a_{nn}^{(0)}}} \left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_n}\right)^{(0)} \quad (r, s = 1, 2 \ldots n-1).$$

Supponiamo ora che la stessa $x_n = 0$ sia totalmente geodetica. Posto per maggiore chiarezza:

$$b_{ik} = a_{ik}^{(0)} \ (i, k = 1, 2 \ldots n-1),$$

il quadrato dell'elemento lineare della $x_n = 0$ sarà:

$$ds^2 = \sum_1^{n-1} b_{ik} \, dx_i \, dx_k ,$$

ed è facile vedere che, detto B_{ik} il complemento algebrico di b_{ik} nel determinante $b = |b_{ik}|$ diviso per b stesso, si ha pure:

$$B_{ik} = A_{ik}^{(0)} \ (i, k = 1, 2 \ldots n-1).$$

Se coll'apposizione degli indici a o b ai simboli distinguiamo quelli calcolati per la forma delle a o delle b rispettivamente, avremo, per tutti i valori di i, k, l da 1 ad $n-1$:

$$\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}_b = \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}_a^{(0)}$$

e:

$$\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_b = \sum_1^{n-1}{}_m \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}_b B_{lm} = \sum_1^{n-1} \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}_a^{(0)} A_{lm}^{(0)} = \sum_1^{n} \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}_a^{(0)} A_{lm}^{(0)} - \begin{bmatrix} ik \\ n \end{bmatrix}_a^{(0)} A_{lm}^{(0)},$$

ma per essere $l < n$, è $A_{ln}^{(0)} = 0$, onde:

$$\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_b = \sum_1^{n} \begin{bmatrix} ik \\ m \end{bmatrix}^{(0)} A_{lm}^{(0)} = \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_a^{(0)}.$$

Ciò premesso, le equazioni differenziali delle geodetiche della $x_n = 0$:

$$(2) \qquad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_1^{n-1}{}_{rs} \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}_b \frac{dx_r}{ds}\frac{dx_s}{ds} = 0 \; (i = 1, 2 \ldots n-1)$$

si possono scrivere:

$$(2^*) \qquad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_1^{n-1} \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}_a^{(0)} \frac{d\,x_r}{ds}\frac{dx_s}{ds} = 0 \; (i = 1, 2 \ldots n-1).$$

Scriviamo ora le equazioni differenziali delle geodetiche di S_n:

$$(3) \qquad \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_1^{n} \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix}_a \frac{d\,x_r}{ds}\frac{dx_s}{ds} = 0 \; (i = 1, 2 \ldots n).$$

L'ipotesi che la ipersuperficie $x_n = 0$ sia totalmente geodetica esige che le (3) siano identicamente verificate quando vi si introducano le (2*) unitamente alle:

$$x_n = 0\,, \quad \frac{d\,x_n}{ds} = 0\,, \quad \frac{d^2 x_n}{ds^2} = 0\,.$$

Facendo le indicate sostituzioni, le prime $n-1$ delle (3) divengono altrettante identità, mentre l'ultima dà la relazione:

$$\sum_1^{n-1}{}_{rs} \begin{Bmatrix} r\,s \\ n \end{Bmatrix}_a^{(0)} \frac{dx_r}{ds}\frac{d\,x_s}{ds} = 0\,,$$

che, essendo omogenea nelle derivate $\frac{dx_i}{ds}$, non può esser verificata identicamente se non quando sia:

$$(4) \qquad \begin{Bmatrix} r\,s \\ n \end{Bmatrix}_a^{(0)} = 0 \; (r\,, s = 1, 2 \ldots n-1)\,.$$

Le condizioni (4) sono evidentemente necessarie e sufficienti affinchè la $x_n = 0$ sia totalmente geodetica. Se le sviluppiamo, tenendo presente che:

$$a_{ln}^{(0)} = A_{ln}^{(0)} = 0 \text{ per } l < n\,,$$

troviamo che esse equivalgono alle:

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_n}\right)^{(0)} = 0 \; (r\,, s = 1\,, 2 \ldots n-1)$$

e quindi, per la (1), coincidono colle condizioni necessarie e sufficienti per l'identico annullarsi della seconda forma fondamentale della ipersuperficie considerata, c. d. d.

Si noti l'analogia che da questo punto di vista le ipersuperficie totalmente geodetiche presentano cogli iperpiani di uno spazio S_n euclideo.

18. — Prima di passare a considerare le proprietà delle famiglie ∞^1 di ipersuperficie totalmente geodetiche, notiamo anche il seguente teorema, che ci sarà utile in seguito:

L'intersezione di due varietà totalmente geodetiche è pure una varietà totalmente geodetica [1].

La dimostrazione è molto semplice: Diciamo V e V′ le due varietà e V″ la varietà ad esse comune. Sia P un punto di V″ e d una direzione uscente da esso e giacente in V″. P e d apparterranno tanto a V che a V′; anzi essi determinano in queste due varietà due geodetiche (§. 1, n. 2) g e g', che, per essere V e V′ totalmente geodetiche, coincideranno colla geodetica γ dello spazio ambiente determinata da P e d. La geodetica γ appartenendo allora tanto a V che a V′, appartiene a V″ e coincide quindi colla geodetica determinata in questa varietà dal punto P e dalla direzione d. Basta ora far variare P e d su V″ per concludere che tutte le geodetiche di V″ sono geodetiche dello spazio ambiente, con che è provato quanto s'era asserito.

19. — Supponiamo ora che nel nostro S_n esista una famiglia ∞^1 di ipersuperficie totalmente geodetiche. Assumiamole a ipersuperficie coordinate $x_n = \text{cost.}$, prendendo per linee (x_n) le loro traiettorie ortogonali. Osservando che sarà allora $a_{in} = 0$ $(i < n)$, potremo ripetere i ragionamenti del n. 17 e ne concluderemo che hanno luogo le:

$$(6) \qquad \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_n} = 0 \; (r, s = 1, 2 \; . \; . \; . \; n-1)$$

---

[1] Per *varietà totalmente geodetica* intendiamo, naturalmente, una varietà di cui ogni geodetica è pure geodetica dello spazio ambiente.

per *tutti* i valori di x_n. Viceversa soddisfatte le (6), le $x_n =$ cost. saranno ipersuperficie totalmente geodetiche.

Queste equazioni ci mostrano che le a_{rs} $(r, s = 1, 2 \ldots n - 1)$ non dipendono da x_n, e che quindi gli elementi lineari delle $x_n =$ cost. sono tutti eguali fra loro ed a:

$$ds^2 = \sum_1^{n-1} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

cioè che le ipersuperficie della famiglia considerata sono tra loro applicabili essendo corrispondenti due punti situati sulla medesima linea (x_n).

Viceversa, se le $x_n =$ cost. godono di questa proprietà, assumendo per linee (x_n) le loro traiettorie ortogonali sarà:

$$a_{in} = 0 \quad \text{per } i < n$$

e le a_{ik} con indici i, k inferiori ad n non dipenderanno da x_n, cioè saranno verificate le (6).

Abbiamo dunque il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una famiglia di ipersuperficie di un S_n *qualunque risulti tutta di ipersuperficie totalmente geodetiche è che la corrispondenza segnata su di esse dalle traiettorie ortogonali sia un' applicabilità.*

Le equazioni (13) (di Codazzi) del §. 1 (n. 6), o il calcolo diretto, mostrano che nelle condizioni del presente n.°, sono nulli tutti i simboli a quattro indici:

$$(r\,n,\; i\,k) \quad (r, i, k = 1, 2, \ldots n - 1)$$

di cui un solo indice è uguale ad n.

Se supponiamo $n = 3$, e introduciamo i simboli b definiti al n. 7 del §. 1 troviamo che si ha, nell' ipotesi che le superficie $x_3 =$ cost. siano totalmente geodetiche e le linee (x_3) ne siano le traiettorie ortogonali,

$$b_{13} = b_{23} = 0\,.$$

Essendo inoltre

$$A_{13} = A_{23} = 0 ,$$

le (19) del n. 7 sono soddisfatte da $\eta_1 = \eta_2 = 0$, per cui, per le (18) dello stesso numero, le equazioni:

$$\xi_1 = \xi_2 = 0$$

definiscono le costanti di una direzione principale. Ma queste costanti caratterizzano le linee coordinate (x_3), dunque:

Se uno spazio S_3 *contiene una famiglia di superficie totalmente geodetiche, essa risulta costituita dalle superficie ortogonali ad una congruenza principale* [1]. *La curvatura principale dello spazio relativa a questa conguenza principale in ogni punto eguaglia la curvatura assoluta di quella delle superficie suddette che passa per esso ed è quindi costante lungo ogni linea della congruenza* [2].

La seconda parte del teorema risulta dalla definizione stessa di curvatura riemanniana di uno spazio in una data orientazione e dal teorema alla pag. prec., o più semplicemente dall'interpretazione della radice:

$$K = \frac{b_{33}}{A_{33}}$$

che la (17) del § 1 (n. 7) ammette corrispondentemente alla congruenza principale (x_3).

Il teorema del n. 17 mostrando che una ipersuperficie totalmente geodetica ha indeterminate le linee di curvatura (v. la formola (14) del § 1, n. 6); ne segue, secondo il teorema di Dupin, generalizzato agli S_3 curvi, [3] che le attuali superficie $x_3 =$ cost.

---

[1] Per gentile comunicazione del prof. Bianchi, mi consta che questa prima parte del teorema fu dimostrato dal prof. Ricci.

[2] Notiamo anche che il medesimo procedimento applicato al caso di una sola superficie totalmente geodetica mostra che in ogni suo punto una delle direzioni principali dello spazio coincide con quella della normale alla superficie.

[3] Bianchi. — *Lezioni di Geometria Differenziale.* Vol. I, pag. 383. Pisa, 1902.

appartengono ad infiniti sistemi tripli ortogonali. Ciò è reso evidente anche dall'espressione:

$$ds^2 = a_{11}\, dx_1^2 + 2\, a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2 + a_{33}\, dx_3^2$$

del quadrato dell'elemento lineare del nostro S_3, nella quale le a_{11}, a_{12}, a_{22} non dipendono da x_3. Basta infatti ridurre (il che è possibile in infiniti modi) la forma quadratica binaria:

$$a_{11}\, dx_1^2 + 2\, a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2$$

a forma ortogonale:

$$H_1\, dy_1^2 + H_2\, dy_2^2$$

perchè il ds^2 dello spazio assuma la forma ortogonale:

$$ds^2 = H_1\, dy_1^2 + H_2\, dy_2^2 + H_3\, dx_3^2$$

senza aver mutato le superficie coordinate $x_3 = \text{cost}$.

Possiamo anche notare che, se uno spazio S_3 contiene ∞^3 superficie totalmente geodetiche, esso è, *in generale*, necessariamente a curvatura costante; perchè, esistendo in tal caso una superficie geodetica che passa per qualunque dato punto normalmente ad una direzione assegnata comunque, se ne conclude che ogni direzione uscente dal punto è principale (v. nota a pag. prec.), e quindi (§. 1, n. 7) lo spazio è a curvatura costante. Abbiamo detto *in generale* perchè il ragionamento precedente può cadere in difetto, e ciò nel caso che il sistema ∞^3 supposto sia composto con una congruenza.

20. — Le ricerche dei numeri precedenti ci pongono in grado di esaminare se e quali degli spazi considerati nei precedenti §§ contengono superficie totalmente geodetiche. In primo luogo poniamo la questione della determinazione delle *famiglie* ∞^1 di tali superficie.

Secondo il teorema della pag. 35 una tale famiglia deve risultare dalle superficie ortogonali a una congruenza principale. Ora negli spazî in questione, per ogni punto si ha una direzione principale ben determinata, e tutte le altre sono le direzioni ortogonali ad essa (§. 1 n. 7). La prima individua la congruenza delle geodetiche sistatiche (n. 10, §. 2); e noi, prima di tutto, esamineremo se questa ammette superficie ortogonali. Rammentando che le linee principali di cui si tratta sono le (x_3) per gli spazi (II) e (III), e le (x_2) per lo spazio (I), e tenendo presente la condizione di ortogonalità di due direzioni (v. formola (2) del §. 1, n. 1) vediamo che le eventuali superficie ortogonali devono essere determinate dalle rispettive equazioni ai differenziali totali:

$$\text{(I)}\ dx_2 + x_1\, dx_3 = 0\,,$$

$$\text{(II)}\ ne^{x_1}\, dx_2 + dx_3 = 0\,,$$

$$\text{(III)}\ n \cos x_1\, dx_2 + dx_3 = 0\,,$$

delle quali sono integrabili solo la (II) e la (III) quando $n = 0$, cioè per gli spazi considerati alla fine del n. 10. In questi casi le superficie ortogonali sono le $x_3 = \text{cost.}$, esse poi sono effettivamente totalmente geodetiche, come risulta applicando il teorema della pag. 34.

Dobbiamo ora costruire l'equazione della più generale famiglia di superficie avente per traiettorie ortogonali una congruenza principale degli spazi che consideriamo.

Per lo spazio (I) le costanti ξ_i $(i=1, 2, 3)$ di una direzione principale (diversa da (x_3)) devono soddisfare all' unica condizione:

$$\xi_2 + x_1\, \xi_3 = 0$$

che esprime l'ortogonalità della direzione (ξ_i) colla $(0, 0, 1)$; quindi le equazioni differenziali della più generale congruenza principale diversa da (x_3) sono:

$$\frac{dx_1}{\varphi} = \frac{dx_2}{-x_1} = dx_3$$

essendo φ una funzione arbitraria di x_1, x_2, x_3. Tale congruenza ammette superficie ortogonali allora solo che l'equazione ai differenziali totali:

$$\varphi\, dx_1 + dx_3 = 0$$

è illimitatamente integrabile. Per ciò è necessario e sufficiente che

φ non dipenda da x_2 dopodichè la famiglia delle superficie ortogonali è rappresentata da:

$$F(x_1, x_3) = \text{cost.} \tag{7}$$

dove F (per l'arbitrarietà di φ) risulta funzione arbitraria dei suoi argomenti.

Le superficie di una famiglia (7) sono manifestamente luoghi di linee (x_2). Dico che ogni tale superficie è a curvatura assoluta nulla. Per dimostrarlo scriviamo l'equazione della superficie nel seguente modo:

$$x_3 = f(x_1) \,. \tag{8}$$

Il suo elemento lineare, riferito alle linee (x_2) e alle intersezioni della (8) colle superficie $x_1 = \text{cost.}$, si ottiene semplicemente introducendo (8) nell'elemento lineare (I) del n. 9 (§. 2). Si ottiene così:

$$ds^2 = \left\{ 1 + (x_1^2 + 1) \left(\frac{df}{dx_1}\right)^2 \right\} dx_1^2 + 2\, x_1 \frac{df}{dx_1}\, dx_1\, dx_2 + dx_2^2 \,.$$

Ponendo:

$$u = \int \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx_1}\right)^2}\, dx_1 \,, \quad v = x_2 + \int x_1 \frac{df}{dx_1}\, dx_1 \,,$$

si ha:

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

con che è dimostrato l'asserto [1].

Calcoli perfettamente analoghi valgono per gli spazi (II) e (III), dimodochè intanto possiamo dire che *per gli spazi del §. 2 le superficie luogo di ∞^1 geodetiche sistatiche sono a curvatura assoluta*

[1] La stessa cosa risulta subito dall' osservare che, possedendo lo spazio un movimento continuo avente per traiettorie le geodetiche sistatiche, ogni superficie formata con questa congruenza ammette una flessione continua, durante la quale le geodetiche di un sistema ∞^1 scorrono su se stesse, e perciò è a curvatura nulla.

nulla; e le famiglie che constano di ∞^1 *tali superficie hanno per traiettorie ortogonali la più generale congruenza principale normale* [1] *dello spazio.*

È dunque su queste famiglie di superficie che dobbiamo concentrare le nostre ricerche. Per la seconda parte dell'ultimo teorema del n. 19 e per i risultati testè trovati affinchè una di tali famiglie possa risultare di superficie totalmente geodetiche, è necessario che lungo la congruenza principale delle traiettorie ortogonali lo spazio sia a curvatura riemanniana nulla; basta quindi aver riguardo alle formole (1), (2), (3) del §. 1 (n. 9) per concludere che le famiglie cercate non possono esistere che negli spazi (4) del n. 10.

21. — Per questi abbiamo già veduto che le superficie x_3=cost. ortogonali alle geodetiche sistatiche sono totalmente geodetiche; se esiste un'altra famiglia colla stessa proprietà, essa deve essere costituita, per il n. precedente, da superficie luoghi di linee (x_3); e per il teorema del n. 18 deve segare le superficie $x_3 =$ cost. lungo geodetiche, per il che, secondo il primo teorema del n. 19, è necessario e sufficiente che le superficie della supposta famiglia seghino secondo geodetiche una qualunque delle $x_3 =$ cost. p. es. la $x_3 = 0$.

Se inversamente prendiamo sulla $x_3 = 0$ un sistema ∞^1 di geodetiche x_2=cost., queste individuano una famiglia di superficie, che assumeremo per nuove superficie coordinate $x_2 =$ cost., ciascuna delle quali è costituita da quelle linee (x_3) che passano pei punti di una delle superficie prese. Assumiamo infine per superficie x_1=cost. quelle che con le x_2=cost., x_3=cost., formano un sistema triplo ortogonale (certamente esistente, v. n. 19, fine); l'elemento lineare dello spazio, poichè le superficie x_3=cost. sono geodeticamente parallele e x_3 è l'arco delle geodetiche ortogonali prenderà la forma:

$$ds^2 = dx_1^2 + \mathrm{H}\, dx_2^2 + dx_3^2 \tag{9}$$

con H indipendente da x_3; e, secondo il solito teorema del n. 19, si vede che le x_2=cost. sono totalmente geodetiche. E se si osserva

[1] Così chiamiamo una congruenza che ammette superficie ortogonali.

che la validità del nostro ragionamento è subordinata solo al fatto che le superficie totalmente geodetiche $x_3 = \text{cost.}$ sono geodeticamente parallele, possiamo dire che:

Se in S_3 *esiste una famiglia di superficie geodeticamente parallele e totalmente geodetiche, ogni superficie costituita da quelle delle geodetiche ortogonali alla suddetta famiglia, che escono dai punti di una geodetica di una delle prime superficie, è pure totalmente geodetica.*

Notiamo che un tale spazio è certamente contenuto in un S_4 euclideo. Il suo elemento lineare è infatti riducibile a:

$$ds^2 = a_{11}\, dx_1^2 + 2\, a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2 + dx_3^2 \tag{10}$$

con a_{11}, a_{12}, a_{22} indipendenti da x_3. Se:

$$y_1 = y_1(x_1\,,\ x_2)\,,\ y_2 = y_2(x_1\,,\ x_2)\,,\ y_3 = y_3(x_1\,,\ x_2) \tag{11}$$

sono le equazioni di una superficie (di uno spazio euclideo $(y_1\, y_2\, y_3)$) di elemento lineare:

$$a_{11}\, dx_1^2 + 2\, a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2\,,$$

le (11) insieme ad

$$y_4 = x_3$$

sono le equazioni del nostro S_3 considerato come V_3 dell'S_4 euclideo di elemento lineare:

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 + dy_4^2\,.$$

Inoltre lo stesso S_3 è deformabile in S_4 e precisamente, ove si noti che esso si può pensare come un *cilindro* parallelo all'asse y_4 avente per superficie direttrice la (11) dell'S_3 coordinato $y_4 = 0$, si vede dall'espressione (10) dell'elemento lineare che ogni deformazione (in $y_4 = 0$) della superficie direttrice dà luogo a un nuovo cilindro applicabile sul primo [1].

[1] Facciamo anche la seguente osservazione: Se la forma:

$$a_{11}\, dx_1^2 + a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2$$

è a curvatura nulla, l'elemento lineare dello spazio S_3 che consideriamo è riducibile a

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\,,$$

Tutti questi risultati sono senz'altro applicabili agli spazi (4) del §. 2 (n. 10). È così risoluta la questione posta al §. 2 (n. 11) e quella della determinazione di tutte le *famiglie* ∞^1 di superficie totalmente geodetiche. Le considerazioni del n. seguente ci mostreranno che in pari tempo abbiamo anche determinate *tutte le superficie totalmente geodetiche esistenti nei nostri spazi.*

22. — Applicando un movimento ad una superficie totalmente geodetica, essa si muta evidentemente in una nuova superficie della stessa specie. Basterebbe questa semplice osservazione per stabilire che solo negli spazi (4) del n. 10 possono esistere famiglie ∞^1 di tali superficie. Essendo infatti a quattro parametri il gruppo completo dei movimenti dei nostri spazi, se in uno di essi esiste una tale famiglia, ogni superficie di questa deve ammettere un G_3 sottogruppo del G_4 completo, quindi in questo deve esistere un G_3 intransitivo, il che non avviene che per gli spazi (4) del n. 10.

Il metodo precedente ci ha permesso oltre a ciò di determinare in questi spazi tutte le famiglie in questione.

Che poi in nessuno degli spazi al § 2 possano esistere superficie isolate totalmente geodetiche, risulta dall'osservare che una tale superficie, per le ragioni dette prima, dovrebbe ammettere tutto il gruppo di movimenti dello spazio, il che è assurdo, essendo il gruppo in ogni caso transitivo.

Concludendo abbiamo dunque che:

In un S_3 *dotato di un* G_4 *di movimenti, non esistono superficie totalmente geodetiche, se non quando il gruppo derivato di quello è intransitivo. In tal caso le linee sistatiche del gruppo ammettono superficie ortogonali, e queste sono tutte totalmente geodetiche (esse sono a curvatura costante diversa da zero). Ogni altra superficie totalmente geodetica è il luogo delle posizioni occupate da una linea sistatica che si muove nello spazio in guisa che un suo punto descriva una geo-*

Lo spazio è dunque a curvatura nulla; dunque: *Gli* S_3 *euclidei sono i soli spazi a tre dimensioni nei quali esistono* ∞^1 *superficie geodeticamente parallele, totalmente geodetiche e a curvatura nulla.*

detica di una delle superficie sopra nominate (e queste sono tutte a curvatura assoluta nulla).

§. 5.

Delle ipersuperficie a linee di curvatura indeterminate.

23. — In seguito al teorema del n. 17 (§. prec.) ed alle formole del n. 6, una ipersuperficie di S_n totalmente geodetica, analogamente ai piani dell'ordinario spazio, gode della proprietà che ogni sua linea è di curvatura. Le $n-1$ curvature principali relative ad ogni punto sono tutte nulle.

Vogliamo ora studiare alcune proprietà delle ipersuperficie più generali a linee di curvatura indeterminate. Esse sono caratterizzate dalla proporzionalità delle due loro forme fondamentali. Ciò risulta immediatamente dalle considerazioni del n. 6 (§. 1).

Se, indicando al solito con:

$$ds^2 = \sum_1^n a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

il quadrato dell'elemento lineare di S_n, supponiamo dapprima che la ipersuperficie considerata $x_n=0$ abbia le linee di curvatura indeterminate, e che le linee (x_n) le siano ortogonali, usando le notazioni stesse del n. 17 (§. 4), dovremo avere:

$$\text{(1)} \qquad \left(\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_n}\right)^{(0)} = \mu\, a_{rs}^{(0)} \; (r\,,\, s = 1, 2\, \ldots\, n-1)$$

essendo μ una funzione di $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ soltanto. Viceversa soddisfatte le (I) la $x_n=0$ sarà della specie in discorso.

Facciamo ora l'ipotesi che tutte le ipersuperficie $x_n=$cost. siano a linee di curvatura indeterminate. Dovranno sussistere le relazioni seguenti:

$$\frac{\partial a_{rs}}{\partial x_n} = \mu\, a_{rs} \; (r, s = 1, 2\, \ldots\, n-1)$$

dove μ indica ora una funzione di tutte le variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Integrando avremo:

$$a_{rs} = \mathrm{K}^2 c_{rs} \ (r, s = 1, 2 \ldots n-1),$$

dove K è una funzione di $x_1, x_2 \ldots x_n$ e le c sono certe funzioni di $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ soltanto. Osservando che in tal caso gli elementi lineari delle $x_n =$ cost. sono:

$$\mathrm{K}^2 \sum_1^{n-1} c_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

e che, posto:

$$a_{nn} = \mathrm{K}^2 c_{nn},$$

l'elemento lineare di S_n si scrive:

$$(2) \qquad ds^2 = \mathrm{K}^2 \left(\sum_1^{n-1} c_{rs}\, dx_r\, dx_s + c_{nn}\, dx_n^2 \right),$$

dai risultati del n. 19 (§. 4) possiamo concludere che:

Se in un S_n *esiste una famiglia* ∞^1 *di ipersuperficie a linee di curvatura indeterminate, queste sono tutte rappresentabili conformemente l'una sull'altra* (n. 3 del §. 1) *in modo che le congiungenti i punti corrispondenti costituiscano le traiettorie ortogonali della famiglia. Inoltre lo spazio* S_n *è rappresentabile conformemente su un altro* S'_n *in modo che quelle* V_{n-1} *abbiano per immagine una famiglia di ipersuperficie totalmente geodetiche.*

L'inversa è pur vera, giacchè se una famiglia di $\infty^1\, \mathrm{V}_{n-1}$ soddisfa a queste condizioni, potremo assumerle a ipersuperficie coordinate $x_n =$ cost. e dare all'elemento lineare dello spazio ambiente la forma (2). Se allora si calcolano i coefficienti Ω_{rs} della seconda forma fondamentale delle ipersuperficie coordinate $x_n =$ cost., si trova:

$$(3) \qquad \frac{\Omega_{rs}}{\mathrm{K}^2 c_{rs}} = - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{K}^2 c_{nn}}} \frac{\partial \log \mathrm{K}}{\partial x_n} \ (r, s = 1, 2 \ldots n-1)$$

cioè le Ω_{rs} differiscono dalle corrispondenti $\mathrm{K}^2 c_{rs}$ (coefficienti dell'elemento lineare delle stesse ipersuperficie) per un fattore, indipendente dagli indici r, s.

24. — Tra le ipersuperficie a linee di curvatura indeterminate

sono particolarmente interessanti quelle per le quali le due forme fondamentali differiscono per un fattore costante. Allora (§. 1, n. 6) le flessioni delle sezioni normali relative ad ogni punto della ipersuperficie e ad ogni direzione uscente da questo sono tutte eguali ad una medesima costante. Sono queste le varietà studiate da Voss[1] e da lui chiamate *ipersfere* per la evidente analogia che presentano colle varietà sferiche degli spazi euclidei.

È facile vedere che se lo spazio ambiente S_n è a curvatura costante, non possono esistere in esso ipersuperficie a linee di curvatura indeterminate che non siano ipersfere. Se infatti l' S_n è a curvatura costante, nelle equazioni di Codazzi (13) del §. 1 (n. 6) per una ipersuperficie qualunque, si annullano identicamente i secondi membri; onde le equazioni stesse divengono:

$$\frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial \Omega_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \sum_1^{n-1}{}_t \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ t \end{Bmatrix}_b \Omega_{\gamma t} - \sum_1^{n-1}{}_t \begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ t \end{Bmatrix}_b \Omega_{\beta t} = 0 \; .$$

L'ipotesi fatta $\Omega_{rs} = \lambda\, b_{rs}$ esige quindi [2] che il fattore λ soddisfi le equazioni:

$$b_{\alpha\beta} \frac{\partial \lambda}{\partial u_\gamma} - b_{\alpha\gamma} \frac{\partial \lambda}{\partial u_\beta} = 0 \; (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2 \; . \; . \; . \; n-1) \, .$$

Detto $B_{\alpha\beta}$ il complemento algebrico di $b_{\alpha\beta}$ nel determinante $|b_{\alpha\beta}|$, si moltiplichi la precedente per $B_{\alpha\beta}$ e si sommi rispetto ad α da 1 ad $n-1$. Si ottiene, poichè $|b_{\alpha\beta}| \neq 0$ e si suppone naturalmente $\beta \neq \gamma$:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u_\gamma} = 0 \; (\gamma = 1, 2 \; . \; . \; . \; n-1) \, ,$$

cioè $\lambda =$ cost., il che dimostra la proprietà enunciata.

Questa proprietà non è, del resto, che un caso particolare del teorema dimostrato da Voss[3], secondo il quale ogni spazio S_n nel quale esistono ∞^n iperpiani non può contenere altre ipersuperficie

---

1) *Zur theorie der Transformation quadratischer Differentialausdrücke ecc.* Math. Ann. Bd. 16 pag. 146.

2) Si noti che i primi membri di queste equazioni sono nulli per $\Omega_{rs} = b_{rs}$.

3) l. c. pag. 157.

a linee di curvatura indeterminate se non le ipersfere. Voss chiama *iperpiano* una ipersuperficie la cui seconda forma fondamentale è identicamente nulla, e il suo teorema è senz'altro applicabile agli spazi S_n a curvatura costante, quando si rammenti che un tale spazio contiene ∞^n ipersuperficie totalmente geodetiche e si abbia riguardo al nostro teorema generale dimostrato al n. 17 (§. 4).

Il teorema alla fine del n. prec. sussiste naturalmente invariato quando si suppone che le ipersuperficie ivi nominate siano ipersfere; si può inoltre, in tal caso, spingere più oltre l'analogia collo spazio euclideo e dimostrare la seguente proprietà delle famiglie di ipersfere di uno spazio qualunque;

Affinchè una famiglia ∞^1 di ipersfere consti di ipersuperficie geodeticamente parallele è necessario e basta che la corrispondenza conforme segnata sulle ipersuperficie della famiglia dalle traiettorie ortogonali, sia una similitudine (§. 1 n. 5).

Se ci riferiamo alle notazioni del n. precedente, avremo intanto che, essendo ipersfere le x_n=cost., il fattore del 2.° membro della (3) è funzione della sola x_n, diciamo:

$$\frac{1}{\sqrt{K^2 c_{nn}}} \frac{\partial \log K}{\partial x_n} = f(x_n). \tag{4}$$

L'ipotesi che le x_n=cost., siano geodeticamente parallele porta che sia

$$K^2 c_{nn} = \varphi(x_n) \tag{5}$$

essendo pure $\varphi(x_n)$ una funzione della sola x_n. Invece l'altra che la corrispondenza segnata sulle x_n=cost. dalle linee x_n sia una similitudine, esige che gli elementi lineari delle x_n=cost, si deducano da uno di essi moltiplicandolo per un fattore variabile solo dall'una all'altra delle stesse ipersuperficie; che cioè il fattore K dell'espressione (2) sia della forma:

$$K = K_1 K_2$$

con K_1 funzione della sola x_n, e K_2 indipendente da x_n; e affinchè ciò si verifichi è necessario e sufficiente che sia

$$\frac{\partial \log K}{\partial x_n} = \psi(x_n), \tag{6}$$

essendo nuovamente $\psi(x_n)$ funzione della sola x_n. Ora, supposta verificata la (4), le (5) e (6) sono conseguenza l'una dell'altra, onde ne risulta il teorema enunciato.

25. — Una notevole proprietà delle famiglie di sfere esistenti in uno spazio a tre dimensioni risulterà dalle seguenti considerazioni.

Applichiamo le formole (13) del n. 6 (§. 1) alle x_n = cost, supponendo che esse siano ipersfere e che le linee (x_n) ne siano le traiettorie ortogonali. Se teniamo presente la nota a pag. 44, vediamo che i primi membri di quelle equazioni sono nulli, i secondi si riducono ai simboli

$$(\alpha n, \beta \gamma) \text{ per } \alpha, \beta, \gamma \neq n$$

(calcolati, ben inteso, rispetto all'elemento lineare dell'S_n ambiente); onde:

$$(\alpha n, \beta, \gamma) = 0 \text{ per } \alpha, \beta, \gamma \neq n$$

Nel caso $n = 3$, al modo stesso come al n. 19 (§. 4), ne deduciamo che le linee x_3 costituiscono una delle congruenze principali dell'S_3 considerato. Dunque:

Se in uno spazio a tre dimensioni esiste una famiglia di sfere, essa è ortogonale ad una congruenza principale.

Ma v'è di più. Data una sfera V_2 in un S_3, procedendo come alla pag. 35 (nota), possiamo dimostrare che in ogni punto di essa una delle direzioni principali dello spazio è quella della normale a V_2. Dimodochè, se supponiamo che uno spazio S_3 contenga un sistema ∞^3 di sfere, non composto con una congruenza, potendosene far passare una per ogni punto arbitrario e normalmente ad ogni direzione pure prefissata ad arbitrio, ne segue che in ogni punto le direzioni principali sono indeterminate, e che quindi (v. n. 7 fine) lo spazio è a curvatura costante.

Dunque:

Uno spazio a tre dimensioni nel quale esiste un sistema triplamente infinito di sfere, non composto con una congruenza, è necessariamente a curvatura costante (e quindi contiene ∞^4 sfere).

26. — Già il primo teorema del n. precedente mette in evidenza che soltanto in spazi particolari possono esistere infinite sfere, dovendo, perchè ciò avvenga, verificarsi la condizione necessaria che una delle congruenze principali ammetta superficie ortogonali.

Ci sono inoltre spazi nei quali non esistono altre sfere che i piani (superficie totalmente geodetiche). Un esempio ci viene offerto facilmente se andiamo a ricercare quali degli spazi considerati al §. 2 contengono sfere.

Per fare tale ricerca dovremo procedere, in virtù del primo teorema del n. precedente, come al n. 20 (§. 4) e troveremo subito che le sfere cercate, se esistono, devono essere ciascuna un luogo di geodetiche sistatiche. Se prendiamo allora la equazione di Gauss (formola (12) del n. 6 §. 1), che nel caso attuale si scrive:

$$\frac{1}{R^2} = K - K_0$$

(essendo R il *raggio* della sfera in discorso, K la sua curvatura assoluta, K_0 la curvatura riemanniana dello spazio nell' orientazione della sfera), vediamo che deve, lungo ognuna delle superficie cercate, verificarsi la disuguaglianza:

$$K - K_0 \geq 0$$

e poichè si è visto (§. 4, n. 21) che ogni luogo di geodetiche sistatiche è a curvatura assoluta nulla, dovrà pure essere $K_0 = 0$ e quindi:

$$\frac{1}{R} = 0 \ .$$

Si ricade pertanto negli spazi (4) del n. 10 (§. 2) e nelle superficie totalmente geodetiche in essi esistenti, che abbiamo già completamente determinato al n. 22 (§. 4).

§. 6.

Alcune rappresentazioni degli spazi considerati al § 2. Equazioni in termini finiti dei loro movimenti.

27. — Ritornando allo studio degli spazi che abbiamo considerato al §. 2, vogliamo cercarne qualche semplice rappresentazione ed a tal uopo facciamo le considerazioni seguenti:

Cominceremo dal tipo (III). Rammentiamo dapprima che al §. 2 si vide che quando $n \neq 0$ il gruppo derivato del gruppo G_4 dei movimenti dello spazio è il G_3 *transitivo* generato dalle trasformazioni infinitesime:

$$(1)\quad \begin{cases} X_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\[2ex] X_2 f = \cos x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \cot x_1 \sin x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{n \sin x_2}{\sin x_1} \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \\[2ex] X_3 f = -\sin x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \cot x_1 \cos x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{n \cos x_2}{\sin x_1} \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{cases}$$

e di composizione:

$$(X_2 X_3) = X_1 , \quad (X_3 X_1) = X_2 , \quad (X_1 X_2) = X_3 .$$

Se d'altra parte consideriamo l'elemento lineare della sfera di raggio uno (riferita ai meridiani e paralleli):

$$ds^2 = dx^2 + \sin^2 x \, dy^2 ,$$

esso ammette, com'è noto, il G_3 generato dalle seguenti trasformazioni infinitesime:

$$(2)\quad \begin{cases} Y_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\[2ex] Y_2 f = \cos y \dfrac{\partial f}{\partial x} - \cot x \cos y \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] Y_3 f = -\sin y \dfrac{\partial f}{\partial x} - \cot x \cos y \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

che è oloedricamente isomorfo [1] col gruppo (1) quando alle $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ si facciano corrispondere le $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ rispettivamente, come dimostrano le formole di composizione del gruppo (2):

$$(Y_2\, Y_3) = Y_1\,,\ (Y_3\, Y_1) = Y_2\,,\ (Y_1\, Y_2) = Y_3\,.$$

Basta ora pensare che il gruppo di movimenti della sfera agisce *transitivamente sugli elementi lineari* [2] della superficie stessa, per dedurre subito dal gruppo (2) un gruppo *simile* [3] al gruppo (X_1, X_2, X_3).

Se infatti *prolunghiamo* [4] il gruppo (2) col pensare y funzione di x, otterremo un gruppo semplicemente transitivo in tre variabili, e poichè anche (1) è semplicemente transitivo, secondo un teorema di Lie, [5] i due gruppi saranno simili. Se alle formole che trasformano l'uno nell'altro i due gruppi diamo il significato di formole di rappresentazione dello spazio considerato sugli elementi lineari della sfera, avremo intanto, in primo luogo, che:

Esiste una corrispondenza fra i punti di uno spazio del tipo (III) *e gli elementi lineari della sfera, tale che i movimenti della sfera rappresentino altrettanti movimenti degli spazi.*

28. — Si tratta in secondo luogo di trovare le formole effettive della corrispondenza. Per comodità dei calcoli seguenti, mutiamo x_3 in $n\,x_3$, con che l'elemento lineare degli spazi in questione diviene:

$$ds^2 = dx_1^2 + (\sin^2 x_1 + n^2 \cos^2 x_1)\, dx_2^2 + 2\, n^2 \cos x_1\, dx_2\, dx_3 + n^2\, dx_3^2$$

e le trasformazioni infinitesime generatrici del

$$G_3 \equiv (X_1,\ X_2,\ X_3)$$

assumono le espressioni che nascono dalla (1) ponendovi $n = 1$.

Scriviamo anche il primo gruppo prolungato di (2). Posto $z = \dfrac{dy}{dx}$

---

[1] Lie. — *Transf.* Bd. I, K, 17.

[2] Così indichiamo l'elemento costituito da un punto e da una direzione uscente da esso (v. p. es. Lie, l. c. II, 1).

[3] Lie. — l. c. Bd. I, K. 19.

[4] « *erweitern* » secondo Lie, l. c. Bd. I, K. 25.

[5] l. c. Bd. I, K. 19 pag. 340.

le sue trasformazioni infinitesime, che continueremo a chiamare $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$, sono:

$$(3)\quad \begin{cases} Y_1 = \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2mm] Y_2 = \cos y \dfrac{\partial f}{\partial x} - \cot x \sin y \dfrac{\partial f}{\partial y} + \left(z^2 \sin y - z \cot x \cos y + \dfrac{\sin y}{\sin^2 x}\right)\dfrac{\partial f}{\partial z} \\[2mm] Y_3 = -\sin y \dfrac{\partial f}{\partial x} - \cot x \cos y \dfrac{\partial f}{\partial y} + \left(z^2 \cos y - z \cot x \sin y + \dfrac{\cos y}{\sin^2 x}\right)\dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

Le più generali formole di trasformazione che fanno passare da questo al gruppo (1) si trovano, seguendo i metodi dati da Lie, eguagliando a tre costanti arbitrarie tre soluzioni indipendenti del sistema completo:

$$(X_1 + Y_1) f = 0, \quad (X_2 + Y_2) f = 0. \quad (X_3 + Y_3) f = 0.$$

Noi però ci contenteremo di trovare una soluzione particolare di questo sistema, e precisamente tale da averne una trasformazione che muti le linee della congruenza (x_3) dello spazio negli ∞^2 gruppi di ∞^1 elementi lineari della sfera formati dagli elementi appartenenti ai suoi singoli punti (i gruppi cioè rappresentati dalle equazioni $x =$ cost., $y =$ cost.). Che una tale trasformazione esista risulta da ciò che segue: l'insieme dei punti della sfera (così chiamando, per brevità, la totalità degli ∞^2 gruppi suddetti) è invariante rispetto al gruppo (3) precisamente come la congruenza (x_3) dello spazio è invariante rispetto al gruppo (1) [1]; ora la congruenza più generale del nostro spazio invariante rispetto al gruppo (1) dipende da *due* costanti arbitrarie [2], d'altronde le trasformazioni

---

[1] Si ricordi infatti che $X_4 f = \dfrac{\partial f}{\partial x_3}$ è permutabile con $X_1 f$, $X_2 f$, $X_3 f$ e si confronti coi risultati di Lie, l. c. Bd. 1, K. 7.

[2] Essa è determinata dall'equazione lineare

$$\alpha_1 Z_1 f + \alpha_2 Z_2 f + \alpha_3 Z_3 f = 0,$$

dove $Z_1 f$, $Z_2 f$, $Z_3 f$ sono tre trasformazioni infinitesime indipendenti del gruppo reciproco di (1) (Lie. l. c. Bd. I, K. 20).

che mutano il gruppo (1) nel gruppo (3) dovranno necessariamente trasformare l'insieme dei punti della sfera in una di queste congruenze, e poichè esse racchiudono *tre* costanti arbitrarie, ne esisterà almeno una che trasforma l'insieme dei punti della sfera nelle linee della congruenza (x_3), come s'era asserito.

Diciamo $Y_4 f$ la trasformazione infinitesima in cui la trasformazione di cui abbiamo ora dimostrato l'esistenza, muta la $X_4 f = \frac{1}{n}\frac{\partial f}{\partial x_3}$, appartenente al G_4 di movimenti dello spazio [1]; le sue traiettorie, per quanto precede, sono i punti della sfera, dunque essa sarà della forma:

$$Y_4 f = \xi(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Per determinare ξ ci serviamo delle equazioni:

$$(Y_i\, Y_4) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

che sviluppate danno:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

$$\xi(2z\sin y - \cot x\cos y) = \cos y\frac{\partial \xi}{\partial x} + \\ + \left(z^2\sin y - z\cot x\cos y + \frac{\sin y}{\sin^2 x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\xi(2z\cos y + \cot x\sin y) = -\sin y\frac{\partial \xi}{\partial x} + \\ + \left(z^2\cos y + z\cot x\sin y + \frac{\cos y}{\sin^2 x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial z}.$$

La prima mostra che ξ non dipende da y. Moltiplicando le ultime due una volta per $\sin y$, $\cos y$ rispettivamente, una seconda per $\cos y$, $-\sin y$ e ogni volta sommando, si ha:

$$\frac{\partial \log \xi}{\partial x} = \frac{z^2\sin^2 x - 1}{z^2\sin^2 x + 1}\cot x, \quad \frac{\partial \log \xi}{\partial z} = \frac{2z\sin^2 x}{z^2\sin^2 x + 1}$$

[1] Si ricordi che si è mutato x_3 in $n\,x_3$.

da cui

$$\xi = C\,\frac{z^2 \sin^2 x + 1}{\sin x}$$

con C costante. La relazione:

$$Y_4 f = C\,(\cos x\, Y_1 f + \sin x \sin y\, Y_2 f + \sin x \cos y\, Y_3 f)$$

che ne risulta confrontata con la:

$$X_4 f = \cos x_1\, X_1 f + \sin x_1 \sin x_2\, X_2 f + \sin x_1 \cos x_2\, X_3 f$$

mostra che deve prendersi C=1, e che, se si riguardano identici due punti dello spazio che si rappresentano sul medesimo elemento lineare sferico (con che dovremo ritenere x_1 variabile tra 0 e π, x_2 tra 0 e 2π), le formole:

$$x_1 = x \qquad x_2 = y \tag{4}$$

formano parte delle cercate formole di rappresentazione.

Per determinare la terza equazione:

$$x_3 = x_3\,(x,\ y,\ z) \tag{5}$$

della rappresentazione non abbiamo che da esprimere che la trasformazione (4), (5) muta le trasformazioni infinitesime $X_i f$ nelle $Y_i f$ rispettivamente ($i = 1, 2, 3, 4$). Troviamo in tal modo per la funzione incognita $x_3\,(x, y, z)$ le seguenti condizioni:

$$\frac{\partial x_3}{\partial y} = 0$$

$$\cos y\,\frac{\partial x_3}{\partial z} + \left(z^2 \sin y - z \cot x \cos y + \frac{\sin y}{\sin^2 x}\right)\frac{\partial x_3}{\partial x} = \frac{\sin y}{\sin x}$$

$$-\sin y\,\frac{\partial x_3}{\partial x} + \left(z^2 \cos y + z \cot x \sin y + \frac{\cos y}{\sin^2 x}\right)\frac{\partial x_3}{\partial z} = \frac{\cos y}{\sin x}$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial z} = \frac{\sin x}{z^2 \sin^2 x + 1}\,.$$

Il sistema scritto è compatibile inquantochè l'ultima equazione è conseguenza delle precedenti.

Risolvendolo rispetto alle derivate di x_3, si ottiene:

$$\frac{\partial x_3}{\partial x} = \frac{z \cos x}{z^2 \sin^2 x + 1}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial x_3}{\partial z} = \frac{\sin x}{z^2 \sin^2 x + 1}.$$

Integrando e prendendo uguale a zero la costante d'integrazione, si ha finalmente

$$(5^*) \qquad x_3 = \operatorname{arctg}(z \sin x).$$

Con ragionamenti e calcoli perfettamente analoghi si riesce facilmente a trovare formole che danno la rappresentazione degli spazi del tipo (II) (§2), quando $n \neq 0$, sugli elementi lineari di una superficie pseudosferica di raggio 1, in modo che le linee sistatiche (x_3) dello spazio siano rappresentate dai punti considerati come inviluppi degli elementi lineari che escono da essi.

29. — Per avere le formole di rappresentazione di uno spazio a tre dimensioni dei tipi (II) o (III) sugli elementi lineari della pseudosfera o della sfera rispettivamente non è veramente necessario possedere l'elemento lineare dello spazio sotto le forme tipiche del §. 2, ma basta conoscere le trasformazioni infinitesime generatrici del corrispondente gruppo di movimenti. Procedendo come al n. 14 (§. 3), si ridurrà alla forma normale $\frac{\partial f}{\partial x}$ la trasformazione infinitesima eccezionale del gruppo, dopo di che i calcoli (analoghi a quelli del n. prec.) da eseguirsi per trovare le formole di rappresentazione, non richiederanno più che sole quadrature. Avute le formole di rappresentazione si otterranno subito le equazioni in termini finiti del gruppo derivato, trasformando colle trovate formole le equazioni ben note del gruppo di movimenti della sfera o della pseudosfera rispettivamente. Il gruppo completo poi dei movimenti si otterrà aggregando alle equazioni così ottenute la:

$$x'_3 = x_3 + \text{cost.}$$

Anche per gli spazi del tipo (I) si possono dare in termini finiti le equazioni del gruppo di movimenti, note che ne siano le trasformazioni infinitesime. Basta infatti, a tal uopo, ridurre l'elemento lineare dato alla forma tipica del §. 2, per il che si richiedono solo operazioni algebriche e quadrature, [1] e poi trasformare con le formole stesse le equazioni finite dei movimenti dello spazio (I), che sono note. [2]

Se ricordiamo poi che, coi criterî dati al n. 9 possiamo con sole derivazioni stabilire a quale dei tre tipi appartiene uno spazio dato che ammette un G_4 di movimenti, perveniamo infine al seguente risultato:

Note le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo di movimenti di uno spazio a tre dimensioni dotato di un G_4 *di movimenti, con sole operazioni algebriche e quadrature se ne hanno le equazioni in termini finiti.*

30. — Dalla rappresentazione trovata possiamo trarre una importante proprietà di cui godono gli spazi del tipo (III), e cioè di essere finiti. Il verificarsi di questa proprietà è però subordinato alla convenzione già fatta al n. 28, che si riguardino come identici due punti dello spazio che sono rappresentati dal medesimo elemento lineare sferico. In tale ipotesi li otterremo tutti facendo variare x_1 fra 0 e π, x_2 fra 0 e 2π e x_3, per es., tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (vedi la (5*). Se ricordiamo che per elemento di volume di uno spazio a tre dimensioni il cui ds^2 è:

$$ds^2 = \sum_1^3 a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

s'intende, in analogia all'ordinario spazio euclideo, l'espressione:

$$\sqrt{a}\; dx_1\, dx_2\, dx_3$$

[1] Posto infatti il gruppo dello spazio dato in relazione d'isomorfismo oloedrico col gruppo (1) (§. 2) nel modo più generale si avranno senz'altro le equazioni delle geodetiche sistatiche seguendo il solito procedimento (n. 14 §. 3), e quindi due delle equazioni della trasformazione richiesta. La terza è subito determinata per quadrature dalla condizione, cui deve soddisfare, di dare, insieme alle prime due, una trasformazione che muti l' uno nell'altro i due gruppi.

[2] Bianchi, mem. cit., §. 16.

dove a indica il discriminante del ds^2, il volume V del nostro spazio sarà:

$$\mathrm{V} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} n \sin x_1 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = 4 \, n \, \pi^2$$

cioè finito per ogni valore finito della costante n.

31 .— La rappresentazione di cui ci siamo occupati nei numeri precedenti cade in difetto quando $n = 0$, giacchè il gruppo derivato del G_4 dei movimenti completi degli spazi (II) e (III) è allora intransitivo. È facile vedere che in questo caso lo spazio corrispondente è rappresentabile conformemente sull'ordinario spazio euclideo.

Per dimostrarlo ci riferiamo senz'altro alle forme tipiche:

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{2x1} \, dx_2^2 + dx_3^2$$
$$ds^2 = dx_1^2 + \sin^2 x_1 \, dx_2^2 + dx_3^2$$

degli elementi lineari degli spazi stessi, ed osserviamo che, posto:

(6) $$x = e^{-x1} \cos x_3 \;,\quad y = x_2 \;,\quad z = e^{-x1} \sin x_3$$

per il primo e

(7) $$x = \sin x_1 \cos x_2 \, e^{x3} \,,\; y = \sin x_1 \sin x_2 \, e^{x3} \,,\; z = \cos x_1 \, e^{x3}$$

per il secondo, essi si mutano rispettivamente in:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{x^2 + z^2} \;,\; ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{x^2 + y^2 + z^2} \;,$$

il che dimostra la proprietà enunciata.

Si potrebbe domandare se questi sono i soli, tra gli spazi considerati al §. 2, che sono rapppresentabili conformemente sullo spazio euclideo. Così è effettivamente, come si può riconoscere nel modo seguente:

Se un S_3 è rappresentabile conformemente sullo spazio euclideo, e solo allora, il suo elemento lineare è riducibile, salvo un fattore, a $dx^2 + dy^2 + dz^2$. La questione è quindi ridotta a ricercare se e quando un ds^2 della forma

(8) $$ds^2 = \lambda^2 \, (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

ammette un gruppo a 4 parametri di trasformazioni in sè. Se

$$\mathrm{X}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \xi\frac{\partial f}{\partial z}$$

è una trasformazione infinitesima ammessa dalla forma (8), dovranno essere verificate le condizioni (§. 1, n. 4):

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{X}(\lambda) + \lambda\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 0\,, \mathrm{X}(\lambda) + \lambda\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0\,, \mathrm{X}(\lambda) + \lambda\dfrac{\partial \xi}{\partial z} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \eta}{\partial z} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = 0\,,\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial z} = 0\,,\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x} = 0\,. \end{array}\right.$$

Dalle prime tre segue:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

le quali insieme alle (9) costituiscono le *equazioni di definizione* del gruppo conforme [1] dello spazio euclideo (x, y, z). Il gruppo G_4 cercato deve dunque (come si può stabilire a priori con semplici considerazioni geometriche) essere un sottogruppo di questo, e di più deve essere simile con uno dei gruppi dei nostri spazi. Servendoci dei risultati di Lie [2]; possiamo scrivere senz'altro tutti i sottogruppi G_4 del gruppo conforme G_{10}. Si trova che:

---

[1] Così chiamiamo il gruppo G_{10} di tutte le trasformazioni conformi dello spazio euclideo in sè.

[2] *Transf.* Bd. III, K. 13 §. 60. — Il G_{10} conforme è generato dalle seguenti 10 trasformazioni infinitesime indipendenti:

$$\begin{array}{l} \mathrm{X}_1 f = p\,,\ \mathrm{X}_2 f = q\,,\ \mathrm{X}_3 f = r\,,\ \mathrm{U} f = x p + y q + z r \\ \mathrm{Y}_1 f = y p - x q\,,\ \mathrm{Y}_2 f = x r - z p\,,\ \mathrm{Y}_3 f = y p - x q\,, \\ \mathrm{Z}_1 f = (x^2 - y^2 - z^2)\, p + 2\, x\, y\, q + 2\, z\, z\, r \\ \mathrm{Z}_2 f = (y^2 - z^2 - x)\, q + 2\, y\, z\, r + 2\, x\, y\, p \\ \mathrm{Z}_3 f = (z^2 - x^2 - y^2)\, r + 2\, z\, x\, p + 2\, y\, z\, q \end{array}$$

dove si è posto per brevità:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}\,,\quad q = \frac{\partial f}{\partial y}\,,\quad r = \frac{\partial f}{\partial r}$$

1.° Non esistono in G_{10} dei G_4 integrabili aventi per gruppo derivato un G_3; per cui il risultato enunciato è senz'altro verificato per gruppi del tipo (I).

2.° Esistono bensì dei sottogruppi G_4 non integrabili isomorfi coi gruppi appartenenti agli spazi (II) e (III), ma la condizione di somiglianza cogli stessi gruppi non è soddisfatta se non quando il G_3 derivato è intransitivo.

Ricadiamo pertanto negli spazi considerati al principio del presente numero.

Lie ha calcolato i sottogruppi del gruppo proiettivo Γ_{10} di un complesso lineare, gruppo generato colle trasformazioni infinitesime:

$$S_1 f = p - yr\,,\ S_2 f = q + xr\,,\ S_3 f = r\,,\ S_4 f = xq\,,\ S_5 f = xp - yq$$
$$S_6 f = yp\,,\ S_7 f = xp + yq + 2zr\,,\ S_8 f = zp - y(xp + yq + zr)$$
$$S_9 f = zq + x(xp + gq + zr)\,,\ S_{10} f = z(xp + yq + zr)$$

e che è isomorfo con G_{10}. Per dedurre dai sottogruppi di Γ_{10} quelli di G_{10} basta servirsi della seguente tabella che dà una corrispondenza d'isomorfismo dei due gruppi:

$$S_1 \equiv -Y_2 - iY_1\,,\ S_2 \equiv -X_3\,,\ S_3 \equiv \frac{X_1 - iX_2}{2}\,,\ S_4 \equiv -\frac{iX_2 - X_1}{2}\,,\ S_5 \equiv iY_3 - U$$

$$S_6 \equiv \frac{Z_1 - iZ_2}{2}\,,\ S_7 \equiv U + iY_3\,,\ S_8 \equiv Z_3\,,\ S_9 \equiv -Y_2 + iY_1\,,\ S_{10} \equiv \frac{Z_1 + iZ_2}{2}.$$