ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

PAOLO BONAVENTURA

Sulle formule generali di moltiplicazione complessa delle funzioni ellittiche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 7 (1895), exp. nº 3, p. 1-56

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1895_1_7__A3_0>

PAOLO BONAVENTURA

SULLE FORMULE GENERALI

DI

MOLTIPLICAZIONE COMPLESSA

DELLE

FUNZIONI ELLITTICHE

È noto che il calcolo delle formule di moltiplicazione ordinaria dell' argomento nella funzione ellittica di Weierstrass $p(z \mid \omega\, \omega')$ è stato da questo illustre geometra reso molto facile e spedito mediante l'introduzione della funzione

$$\Psi_n(z) = \frac{\sigma(n\,z)}{\sigma(z)^{n^2}} \qquad (^*);$$

poichè infatti assumendo allora la formula in discorso la forma elegante:

$$p(n\,z) - p(z) = -\frac{\Psi_{n-1}\,\Psi_{n+1}}{\Psi_n^{\,2}}$$

il calcolo è ridotto a quello delle funzioni Ψ_n il quale si effettua molto facilmente mediante l'uso delle seguenti relazioni ricorrenti:

(*) WIERSTRASS, le sue lezioni. KIEPERT Journal v. Crelle Bd 76 Wirkliche Ausführung der ganz. Mult. u. s. w.

$$\begin{cases} \Psi_{2n+1} = \Psi_{n+2}\,\Psi_n^{\;3} - \Psi_{n-1}\,\Psi_{n+1}^{\;3} \\ \Psi_{2n} = \dfrac{\Psi_n}{p'(z)} \left\{ \Psi_{n-2}\,\Psi_{n+1}^{\;2} - \Psi_{n+2}\,\Psi_{n-1}^{\;2} \right\} \text{(*)}. \end{cases}$$

Nel presente lavoro io ho esteso questi risultati, nel caso che la funzione ellittica in discorso goda della moltiplicazione complessa, a tali speciali formule di moltiplicazione: e in ciò ho proceduto nel modo che ora brevemente accennerò.

Affinchè la funzione $p(z)$ goda della moltiplicazione complessa, affinchè cioè $p(\varepsilon z)$ sia esprimibile razionalmente per $p(z)$ anche per valori non interi del moltiplicatore ε, è necessario e sufficiente che tra il moltiplicatore ed i periodi sussistano le relazioni

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \varepsilon\,\omega &= a\,\omega + b\,\omega' \\ \varepsilon\,\omega' &= c\,\omega + d\,\omega' \qquad (a,\ b,\ c,\ d \text{ interi}) \end{aligned}$$

dalle quali si deduce che il rapporto $\tau = \dfrac{\omega'}{\omega}$ è indice di una forma binaria quadrativa primitiva (A , B , C) di determinante negativo

$$B^2 - A\,C = -D$$

ed ε è un numero complesso della forma

$$\varepsilon = y + i\,x\sqrt{D}$$

(*) Cf. Halphen. Traité des fonctions elliptiques. 1re Partie, pag. 100.

essendo y , x tutti e due numeri interi o tutti e due metà di numeri interi dispari; la stessa funzione ellittica corrisponde a tutte le forme della medesima classe di (A, B, C); il grado della trasformazione (1) è dato da

$$N = a\,d - b\,c = y^2 + x^2\,D.$$

Il problema di cui ci occupiamo è quello di trovare, data la forma (A, B, C), la formula di moltiplicazione complessa per la funzione ellittica corrispondente: in ciò basterebbe limitarsi (*) a considerare il caso che nelle relazioni (1) i numeri interi a, b, c, d non avessero alcun divisore comune, il caso generale potendosi dedurre da questo mediante una moltiplicazione ordinaria. Ma per il mio scopo mi è stato invece necessario di studiare la formula generale di moltiplicazione complessa supponendo che nelle (1) i numeri a, b, c, d siano interi qualunque.

Comincio dal cercare i punti di infinito di $p(\varepsilon z)$ e dimostro che sono in numero di N valendomi di una dimostrazione data dal Sig. *H. Weber* nell' opera *Elliptische Functionen und algebraische Zahlen Braunschweig* 1891; e ne deduco la formula di decomposizione in elementi semplici della funzione $\varepsilon^2\,p(\varepsilon z)$, generalizzazione di quella data da Halphen nella memoria citata. Ciò è quanto è contenuto nel primo paragrafo.

(*) Cfr. Sylow Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques. Journal de Mathématiques pures et appliquées 1887. Halphen Sur la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques et en particulier sur la multiplication par $\sqrt{-23}$. Nello stesso giornale 1889, oppure nella 3a parte del suo *Traité des fonctions elliptiques* ove questa memoria è riportata.

Nei seguenti prendo a studiare la funzione:

$$\Theta_\varepsilon(z) = e^{-G_\varepsilon z^2} \frac{\sigma(\varepsilon z)}{\sigma(z)^N} \qquad (^*)$$

dove è

$$G_\varepsilon = \frac{x i \varepsilon}{\pi}\left[A \eta'^2 + 2 B \eta \eta' + C \eta^2\right].$$

Riguardo a questa costante dimostro la proprietà curiosa che essa è eguale alla metà della somma dei valori che assume la funzione $p(z)$ nei punti di infinito della funzione $p(\varepsilon z)$ eccettuato lo zero.

Per la funzione $\Theta_\varepsilon(z)$ ho trovato le seguenti espressioni dove è $y = p(z)$: se

$$N \equiv 1 \pmod 2$$

è

$$\Theta_\varepsilon(z) = \varepsilon y^{\frac{N-1}{2}} + a_1 y^{\frac{N-3}{2}} + \dots\dots + a_{\frac{N-1}{2}}$$

ed i coefficienti a_i sono funzioni razionali di $g_2 g_3$

(*) Nel caso particolare D=3 era stata già introdotta da Dantscher nella memoria: Bemerkungen zum analytischen Beweise des cubischen Reciprocitätsgesetzes Math. Annalen XII.

con coefficienti numerici contenenti la sola irrazionalità $i\sqrt{\mathrm{D}}$; se

$$\mathrm{N} \equiv 0 \pmod 2$$

ed è

$$a\,b + a + b \equiv c\,d + c + d \equiv 0 \pmod 2$$

è

$$\Theta_{\varepsilon}(z) = \frac{\varepsilon}{2}\, p'(z) \left\{ y^{\frac{\mathrm{N}}{2}-2} + \ldots\ldots + a_{\frac{\mathrm{N}}{2}-2} \right\}$$

dove le a_i *sono della stessa specie di quelle del caso precedente.*

Se invece non è

$$a\,b + a + b \equiv c\,d + c + d \equiv 0 \pmod 2$$

risulta:

$$\Theta_{\varepsilon}(z) = \varepsilon\sqrt{p(z) - e_{\alpha}} \left\{ y^{\frac{\mathrm{N}}{2}-1} + \ldots\ldots + a_{\frac{\mathrm{N}}{2}-1} \right\}$$

dove è

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha=1 & \text{se} \;\; a\,b + a + b \equiv 0 \,, & c\,d + c + d \equiv 1 \\ \alpha=2 & \text{»} \qquad\qquad\quad \text{»} \;\; \equiv 1 \,, & \qquad \text{»} \qquad \equiv 1 \\ \alpha=3 & \text{»} \qquad\qquad\quad \text{»} \;\; \equiv 1 \,, & \qquad \text{»} \qquad \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod 2$$

ed i coefficienti a_i *sono funzioni razionali di* $g_2\ g_3\ e_\alpha$ *con coefficienti numerici contenenti la sola irrazionalità* $i\sqrt{D}$.

Per l'introduzione della funzione $\Theta_\varepsilon(z)$ la formula generale di moltiplicazione complessa prende la forma:

$$p(\varepsilon z) - p(z) = - \frac{\Theta_{\varepsilon-1}\ \Theta_{\varepsilon+1}}{\Theta_\varepsilon^{\ 2}}$$

perfettamente analoga a quella di moltiplicazione ordinaria.

Ricerco la natura dei coefficienti delle potenze di $p(z)$ nel secondo membro e dimostro, servendomi di un metodo dato dal sig. Prof. Luigi Bianchi in alcune sue lezioni sulla moltiplicazione complessa, che essi sono funzioni razionali di $g_2\ g_3$ con coefficienti numerici contenenti la sola irrazionalità $i\sqrt{D}$; e per i valori elementari del moltiplicatore ($\varepsilon = i\sqrt{D}$, ovvero $\varepsilon = \dfrac{1+i\sqrt{D}}{2}$, secondo che la forma (A, B, C) è di prima o di seconda specie) dimostro col prof. Bianchi che essi dipendono soltanto dal determinante D e dalla specie della forma e precisamente contengono o no l'irrazionalità $i\sqrt{D}$ secondo che la forma (A, B, C) è di prima o di seconda specie. Come caso particolare di questa ricerca ho dedotto che il rapporto

$$\frac{A\,\eta'^2 + 2\,B\,\eta\,\eta' + C\,\eta^2}{\pi},$$

se la forma (A, B, C) è di prima specie, è uguale al prodotto di $\dfrac{1}{\sqrt{D}}$ per una funzione razionale di $g_2\ g_3$ con coefficienti numerici razionali; se la forma (A, B, C) è di seconda specie, è una funzione, razionale di g_2 g_3 con coefficienti numerici contenenti la sola irrazionalità $i\sqrt{D}$.

Finalmente nell'ultimo paragrafo ho stabilito delle relazioni ricorrenti tra le funzioni Θ_ε con diversi indici, che possono nel calcolo delle formule di moltiplicazione complessa rendere gli stessi servigi che rendono quelle indicate per le Ψ_n nel calcolo delle formule di moltiplicazione ordinaria.

§. I.

E noto che per ogni funzione ellittica $p(z\,|\,\omega,\omega')$ sussiste la proprietà che $p(\varepsilon z)$ è esprimibile razionalmente per $p(z)$ quando ε un numero intero; ed ora noi dimostreremo che finchè i periodi 2ω, $2\omega'$ restano arbitrarii solo per questi valori di ε sussiste l' indicata proprietà. Infatti poichè è:

$$p(\varepsilon z\,|\,\omega\,,\,\omega') = \frac{1}{\varepsilon^2}\,p\left(z\,\middle|\,\frac{\omega}{\varepsilon}\,,\,\frac{\omega'}{\varepsilon}\right),$$

la condizione necessaria e sufficiente affinchè $p(\varepsilon z)$ sia razionalmente esprimibile per $p(z)$ è che tra i periodi ed il moltiplicatore ε sussistano le relazioni:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega &= a\,\frac{\omega}{\varepsilon} + b\,\frac{\omega'}{\varepsilon} \\ \omega' &= c\,\frac{\omega}{\varepsilon} + d\,\frac{\omega'}{\varepsilon} \end{aligned}\right.$$

con a , b , c , d numeri interi; e da queste resulta immediatamente che se i periodi 2ω , $2\omega'$ rimangono arbitrarii, deve essere necessariamente

$$b'=0 \ , \ c=0 \ ; \ a = d = \varepsilon;$$

quindi ε è un numero intero e la formula cercata non è altro che una formula di moltiplicazione ordinaria. Ricerchiamo adesso se, per relazioni speciali sussistenti tra i periodi, possa valere il teorema enunciato anche per valori non interi del moltiplicatore.

Eliminando ε dalle (1) si ha l' eguaglianza

$$b\,\omega'^2 + (a-d)\,\omega\,\omega' - c\,\omega^2 = 0;$$

il rapporto $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ dei periodi deve dunque essere radice dell' equazione di 2^0 grado

$$b\,\tau^2 + (a-d)\,\tau - c=0:$$

a coefficienti interi, ed a determinante necessariamente negativo perchè τ non può esser reale. Inversamente se il rapporto τ dei periodi di una funzione ellittica $p(z \mid \omega , \omega')$ è radice di una equazione di secondo grado a coefficienti interi ed a determinante negativo

$$P\,\tau^2 + Q\tau + R=0$$

basterà porre nelle (1)

$$b = \mathrm{P} \ , \ a-d = \mathrm{Q} \ , \ c = -\mathrm{R}$$

affinchè esse risultino soddisfatte. Pertanto la proprietà enunciata ha luogo solo per quelle funzioni $p(z \mid \omega \ , \ \omega')$ nelle quali il rapporto dei periodi soddisfa ad una equazione di secondo grado a coefficienti interi e a determinante negativo. Eliminando dalle equazioni (1) il rapporto $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ otteniamo per ε l' equazione

$$(2^*) \quad \varepsilon^2 - (a+d)\,\varepsilon + a\,d - b\,c = 0$$

il determinante della quale

$$\Delta = (a+d)^2 - 4\,(a\,d - b\,c)$$

comune alla (2) essendo negativo per quanto abbiamo già detto, risulta che ε è un numero complesso della forma:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ a+d + i\sqrt{-\Delta} \right\} .$$

É per ciò che le speciali formule di moltiplicazione dell' argomento per le funzioni ellittiche qui considerate diconsi formule *di moltiplicazione complessa*. Il grado della trasformazione (1) cioè il grado della funzione razionale di $p(z)$ che eguaglia $p(\,\varepsilon\, z\,)$ è dato da

$$\mathrm{N} = a\,d - b\,c .$$

Se

$$P\,\omega'^2 + Q\,\omega\,\omega' + R\,\omega^2 = 0$$

è l' equazione soddisfatta dai periodi di una funzione ellittica $p(z)$ a moltiplicazione complessa possiamo evidentemente supporre che i numeri interi P, Q, R non abbiano alcun divisore comune; e poichè $Q^2 - 4\,P\,R$ è negativo, potremo anche supporre che P ed R siano positivi. Se Q è pari, allora posto $Q = 2\,Q'$, il primo membro dell' equazione precedente non è altro che la forma binaria quadratica di prima specie

$$(P\,,\,Q'\,,\,R)\,;$$

se Q è dispari, allora considereremo come corrispondente alla equazione (3) la forma di seconda specie $(2\,P\,,\,Q\,,\,2\,R)$. In tal modo alla equazione (3) facciamo in ogni caso corrispondere una forma primitiva positiva

$$(A\,,\,B\,,\,C)$$

di determinante

$$B^2 - A\,C = -\,D$$

negativo. Dalla proprietà fondamentale della funzione $p(z|\omega.\omega')$ di rimanere invariata per una trasformazione di primo ordine, risulta che ad ogni forma della medesima classe di $(A\,,\,B\,,\,C)$ corrisponde la stessa funzione ellittica a moltiplicazione complessa; e noi adesso ci proponiamo di stabilire nel modo più generale le formule di moltiplicazione complessa per una funzione ellittica $p(z \mid \omega\,\omega')$ corrispondente ad una data classe di forme di un dato determinante negativo $-$ D rappresentata da una data forma (A , B , C).

Paragonando l' equazione

$$\mathrm{A}\,\tau^2 + 2\,\mathrm{B}\,\tau + \mathrm{C} = 0$$

colla (2) risulta che dovremo porre:

$$(3^*)\; b = x\,\mathrm{A}\;,\; (a-d) = 2\,x\,\mathrm{B}\;,\; c = -\,x\,\mathrm{C}\;.$$

dove x è un fattore di proporzionalità che nel caso di una forma di prima specie, essendo A , 2 B , C senza divisore comune ed a , b , c , d, numeri interi, dovrà essere di necessità intero; e nel caso di una forma di seconda specie potrà essere o un numero intero o la metà di un numero dispari. Se dunque noi poniamo:

$$a = x\,\mathrm{B} + y \qquad b = x\,\mathrm{A}$$
$$c = -\,x\,\mathrm{C} \qquad d = -\,x\,\mathrm{B} + y$$

y sarà anche esso un numero intero nel primo caso, e nel secondo quando x sia la metà di un numero dispari sarà parimente la metà di un numero dispari.

Dalle precedenti espressioni di a , b , c , d seguono per il grado della trasformazione e per il moltiplicatore le altre:

$$\mathrm{N} = a\,d - b\,c = x^2\,\mathrm{D} + y^2$$
$$\varepsilon = y + i\,x\sqrt{\mathrm{D}}\,;$$

è quindi:

$$N = \mathfrak{N}(\varepsilon)$$

dove il simbolo $\mathfrak{N}(\varepsilon)$ indica la norma del numero complesso ε.

I più semplici valori che possano avere x ed y sono evidentemente i seguenti:

$x = \pm 1$, $y=0$ per una forma di prima specie,

$x = \pm \frac{1}{2}$, $y = \pm \frac{1}{2}$ per una forma di seconda specie.

I valori corrispondenti di N ed ε sono

(α) per una forma di prima specie:

$$N = D \; ; \; \varepsilon = i\sqrt{D};$$

(β) per una forma di seconda specie:

$$N = \frac{1}{4}(D+1) \; ; \; \varepsilon = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{D}).$$

Ora è da notare che note le forme di moltiplicazione complessa relative a questi casi *elementari* le altre si potranno dedurre da queste per mezzo del teorema di addizione e di moltiplicazione ordinaria come dimostrano le considerazioni seguenti (*). In ogni caso la formola generale di moltiplicazione complessa consiste nell' espressione di

(*) Queste sono tolte da alcune lezioni sulla moltiplicazione complessa del sig. prof. Luigi Bianchi.

$$p\,\{\,(\,m+n\,\varepsilon_1\,)\,z\,\}$$

ove m , n sono interi qualunque ed ε_1 ha il valore (α) o (β), in funzione razionale di $p(z)$; ora se si conosce la formula di moltiplicazione complessa elementare

$$p(\,\varepsilon_1\,z\,) = \mathrm{F}\,\{\,p(z)\,\}$$

dove F è il simbolo di una funzione razionale, le formule di moltiplicazione ordinaria danno altresì:

$$p(\,m\,z\,) = \Phi\,(\,p(z)\,)$$
$$p(n\,\varepsilon_1\,z\,) = \Phi_1\,(\,p(z)\,)$$

con Φ ; Φ_1 funzioni razionali; e poichè derivando segue:

$$p'(\,m\,z\,) = \frac{1}{m}\,\frac{d\,\Phi(\,p\,z\,)}{d\,p(z)}\,.\,p'(z)$$

$$p'(\,n\,\varepsilon_1\,z\,) = \frac{1}{n\,\varepsilon_1}\,.\,\frac{d\Phi_1(\,p(z)\,)}{d\,p(z)}\,.\,p'(z),$$

colla formola d'addizione:

$$(m+n\varepsilon_1 z)\} = \frac{\left\{2p(mz)p(n\varepsilon_1 z)-\frac{1}{2}g_2\right\}\left\{p(mz)+p(n\varepsilon_1 z)\right\}-g_3-p'(mz)p'(n\varepsilon_1 z)}{2\,\{\,p(\,m\,z\,)-p(\,n\,\varepsilon_1\,z\,)\,\}^2}$$

si esprimerà anche $p\{(m+n\,\varepsilon_1)\,z\}$ razionalmente per $p(z)$.

Di qui segue che secondo che la forma (A , B , C) è di prima o di seconda specie ci potremmo limitare nell'esame delle formule di moltiplicazione complessa corrispondenti alle relazioni (1) ai casi seguenti:

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} a=\mathrm{B} & b=\mathrm{A} \\ c=-\mathrm{C} & d=-\mathrm{B} \\ \mathrm{N}=\mathrm{D}\ , & \varepsilon=i\sqrt{\mathrm{D}} \end{cases}$$

per le forme di prima specie;

$$(\beta)\qquad \begin{cases} a=\frac{1}{2}(\mathrm{B}+1) & b=\frac{1}{2}\mathrm{A} \\ c=-\frac{1}{2}\mathrm{C} & d=\frac{1}{2}(-\mathrm{B}+1) \\ \mathrm{N}=\frac{1}{4}(\mathrm{D}+1)\ ; & \varepsilon=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{\mathrm{D}}) \end{cases}$$

per le forme di seconda specie. Le formule di moltiplicazione complessa corrispondenti diconsi *formule elementari* per il dato determinante D .

Ma noi invece vogliamo stabilire la formula di moltiplicazione complessa partendo dalle relazioni

$$\begin{aligned} \varepsilon\,\omega &= a\,\omega + b\,\omega' \\ \varepsilon\,\omega' &= c\,\omega + d\,\omega' , \end{aligned}$$

supponendovi in generale a , b , c , d interi qualunque.

A tale scopo osserviamo che i punti di infinito della funzione

$$p\left(z \,\middle|\, \frac{\omega}{\varepsilon} , \frac{\omega'}{o} \right) = \varepsilon^2 \, p(\varepsilon z)$$

sono nei punti:

$$z_{r \cdot s} = 2 r \frac{\omega}{\varepsilon} + 2 s \frac{\omega'}{\varepsilon}$$

che non sono altro che i numeri del modulo (*)

$$\mathfrak{m} = \left[2 \frac{\omega}{\varepsilon} , 2 \frac{\omega'}{\varepsilon} \right] ;$$

è quindi ora da ricercare quanti siano i numeri di un sistema completo di numeri del modulo $\mathfrak{m}$ incongrui rispetto al modulo

$$\mathfrak{n} = [2 \omega , 2 \omega'] .$$

Indichiamo perciò con e il massimo comun divisore dei numeri b , d e poniamo

$$b = b' e \quad , \quad d = d' e \quad , \quad \mathrm{N} = n' e$$

e consideriamo i numeri

$$\Omega_{\xi \xi'} = \frac{2 \xi \omega + 2 \xi' \omega'}{\varepsilon}$$

(*) Cfr. l'ultimo supplemento di Dedekind alla 3.ª edizione delle lezioni di teoria dei numeri di Dirichlet.

dove per ξ, ξ' si prendano i valori seguenti:

$$\xi = 0 , 1 , \ldots . n'-1$$
$$\xi' = 0 , 1 , \ldots . e-1 .$$

Fra questi N numeri $\Omega_{\xi\,\xi'}$ ve ne ha uno solo congruo allo zero rispetto al modulo $[2\,\omega , 2\,\omega']$; e precisamente $\Omega_{0,0}$. Infatti dalla congruenza

$$\Omega_{\xi\,\xi'} \equiv 0 \pmod{[2\,\omega , 2\,\omega']}$$

risulta:

$$2\,\xi\,\omega + 2\,\xi'\,\omega' = 2\,\varepsilon\,(h\,\omega + h'\,\omega')$$

con h, h' numeri interi; e per le (1):

$$2\,\xi\,\omega + 2\,\xi'\,\omega' = 2\,\omega\,\{h\,a + h'\,c\} + 2\,\omega'\,\{h\,b + h'\,d\}.$$

Da questa uguaglianza si ricava:

$$\xi = h\,a + h'\,c$$
$$\xi' = h\,b + h'\,d$$

quindi:

$$\xi' \equiv 0 \pmod{e}$$

cioè

$$\xi' = 0;$$

ed indicando con λ un numero intero sarà:

$$h = -\lambda\, d' \qquad h' = \lambda\, b'$$

quindi

$$\xi \equiv 0 \pmod{n'}$$

ossia

$$\xi = 0 .$$

Prendiamo ora a considerare due qualunque punti di infinito della funzione $p\left(z \,\middle|\, \frac{\omega}{\varepsilon}, \frac{\omega'}{\varepsilon}\right)$:

$$z_{r,s} = 2\, r \frac{\omega}{\varepsilon} + 2\, s \frac{\omega'}{\varepsilon}$$

$$z_{t,u} = 2\, t \frac{\omega}{\varepsilon} + 2\, u \frac{\omega'}{\varepsilon}$$

e sia:

$$z_{t,u} \equiv z_{r,s} \pmod{[\,2\,\omega\,,\ 2\,\omega'\,]}:$$

sarà:

$$(4) \qquad \begin{cases} t = r + h\, a + h'\, c \\ u = s + h\, b + h'\, d \end{cases}$$

con h, h' numeri interi. Determiniamo ora due numeri interi β, δ per modo che sia:

$$b'\, \delta - d'\, \beta = 1;$$

e poniamo:

$$\mu = h\, b + h'\, d$$
$$\nu = h\, \beta + h'\, \delta;$$

avremo :

$$h = \mu\, \delta - \nu\, d'$$
$$h' = b'\, \nu - \mu\, \beta\,;$$

sostituendo queste espressioni di h , h' nelle (4) esse diventano:

$$t = r + \mu\,(a\, \delta - c\, \beta) - \nu\, n'$$
$$u = s + \mu\, e.$$

Da ciò risulta che dati comunque r , s potremo determinare prima μ e poi ν in guisa che u assuma uno dei valori ξ' e t uno dei valori ξ; e ciò in un modo solo. Così rimane dimostrato che gli N numeri $\Omega_{\xi\,\xi'}$ formano un sistema completo di numeri del modulo $\mathfrak{m}$ incongrui rispetto al modulo $\mathfrak{n}$ (*).

Gl' infiniti della funzione $\varepsilon^2\, p(\varepsilon\, z)$ sono dunque nei punti:

$$\Omega_{\xi\,\xi'} = \frac{2\,\xi\,\omega + 2\,\xi'\,\omega'}{\varepsilon}$$

ed essendo tutti di secondo ordine coi termini di infinito

(*) Cfr. Weber Elliptische functionen und algebraische Zahlen. Braunschweig 1891 .

$$\frac{1}{(z-\Omega_{\xi\,\xi'})^2}$$

avremo

$$\varepsilon^2 p(\varepsilon z) = p(z) + \sum\nolimits'_{\xi\,\xi'} p(z-\Omega_{\xi\,\xi'}) + \mathrm{C}$$

dove l' apice al segno sommatorio indica che va esclusa la combinazione $\xi=0$ $\xi'=0$. Per determinare la costante C basta sviluppare per le potenze di z nell'intorno del punto $z=0$, e paragonare i termini noti: si ottiene

$$\mathrm{C} = -\sum\nolimits'_{\xi\,\xi'} p(\Omega_{\xi\,\xi'}) .$$

Sostituendo nell' eguaglianza precedente otteniamo la formula di decomposizione in elementi semplici:

$$(5)\quad \varepsilon^2 p(\varepsilon z) = p(z) + \sum\nolimits'_{\xi\,\xi'} \{ p(z-\Omega_{\xi\,\xi'}) - p(\Omega_{\xi\,\xi'}) \} \ (^*)$$

con

$$\Omega_{\xi\,\xi'} = \frac{2\,\xi\,\omega + 2\,\xi'\,\omega'}{\varepsilon}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ldots\ n'-1 \\ \xi' = 0\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ldots\ e-1. \end{array} \right.$$

(*) Cfr. HALPHEN, mem. cit.

§. II.

A stabilire la formula di decomposizione or ora trovata possiamo giungere anche mediante le considerazioni seguenti. Esaminiamo la funzione

$$\chi(z) = \frac{\sigma(\varepsilon z)}{\sigma(z)^N} :$$

essa ha, come facilmente risulta da quanto abbiamo detto al paragrafo precedente, N—1 infinitesimi di primo ordine nei punti $\Omega_{\xi\xi'}$ escluso il valore $\Omega_{0,0}$: ed N—1 poli di primo ordine nella origine; ne segue che il prodotto

$$\Pi'_{\xi\xi'} \{ p(z) - p(\Omega_{\xi\xi'}) \}$$

differisce dal quadrato della funzione in discorso solo per un fattore esponenziale: potremo porre

$$\chi^2(z) = e^{\varphi(z)} \Pi'_{\xi\xi'} \{ p(z) - p(\Omega_{\xi\xi'}) \}.$$

Per determinare l' esponenziale $e^{\varphi(z)}$ osserviamo che usando della nota formola fondamentale per la funzione $\sigma(z)$

$$\sigma(z+2m\omega+2n\omega') = (-1)^{mn+m+n} e^{2(m\eta+n\eta')(z+m\omega+n\omega')} \sigma(z)$$

e delle relazioni fondamentali

$$\varepsilon\,\omega = a\,\omega + b\,\omega'$$
$$\varepsilon\,\omega' = c\,\omega + d\,\omega'$$

si ottengono facilmente le seguenti eguaglianze:

$$\begin{cases} \chi(z+2\,\omega)^2 = e^{2(\mu\,z+\nu)\,+\,\varphi(z)}\,\Pi'_{\xi\,\xi'}\,\{p(z)-p(\Omega_{\xi\,\xi'})\} \\ \qquad\qquad = e^{\varphi(z+2\omega)}\Pi'_{\xi\,\xi'}\,\{\,p(z)-p(\Omega_{\xi\,\xi'})\,\} \\ \chi(z+2\,\omega')^2 = e^{2(\mu'\,z+\nu')\,+\,\varphi(z)}\,\Pi'_{\xi\,\xi'}\{p(z)-p(\Omega_{\xi\,\xi'})\} \\ \qquad\qquad = e^{\varphi(z+2\,\omega')}\,\Pi'_{\xi\,\xi'}\{\,p(z)-p(\Omega_{\xi\,\xi'})\,\} \end{cases}$$

dove è

$$\mu = -2\,\mathrm{N}\,\eta + 2(a\,\eta + b\,\eta')\varepsilon\ ,\quad \nu = 2(a\,\eta + b\,\eta')\,\varepsilon\,\omega - 2\,\mathrm{N}\,\eta\,\omega$$
$$\mu' = -2\,\mathrm{N}\eta' + 2(c\,\eta + d\,\eta')\,\varepsilon\ ,\quad \nu' = 2(c\,\eta + d\,\eta')\,\varepsilon\,\omega' - 2\mathrm{N}\eta'\omega'.$$

Dovrà essere pertanto, tralasciando i multipli di $2\,\pi\,i$:

$$\text{A)}\qquad \begin{aligned} \varphi(z+2\,\omega) &= \varphi(z) + 2(\mu\,z+\nu) \\ \varphi(z+2\,\omega') &= \varphi(z) + 2(\mu'\,z+\nu'); \end{aligned}$$

queste eguaglianze derivate due volte ci mostrano che la funzione $\dfrac{d^2\,\varphi(z)}{d\,z^2}$ è doppiamente periodica; sarà dunque

$$\frac{d^2\, \varphi(z)}{d\, z^2} = G_1$$

G_1 essendo una costante; quindi

$$\varphi(z) = G_1\, z^2 + G_2\, z + G_3$$

G_2 , G_3 essendo altri coefficienti costanti. Possiamo dunque scrivere:

$$\chi^2(z) = e^{G_1\, z^2 + G_2\, z + G_3} \Pi'_{\xi\, \xi'} \{p(z) - p(\Omega_{\xi\, \xi'})\};$$

ora il primo membro di questa eguaglianza ed il coefficiente dell'esponenziale nel 2° membro sono due funzioni pari di z: dovrà quindi essere pari anche l' esponenziale e sarà

$$G_2 = 0\,.$$

Per determinare il coefficiente costante e^{G_3} moltiplichiamo i due membri della (6) per $z^{2^{N-1}}$ procedendo come è indicato dalla seguente eguaglianza

$$\left\{ \frac{\varepsilon^{\frac{\sigma(\varepsilon z)}{\varepsilon z}}}{\left(\frac{\sigma(z)}{z}\right)^N} \right\}^2 = e^{G_1\, z^2}\, e^{G_3}\, \Pi'_{\xi\, \xi'} \{ z^2 (p(z) - p(\Omega_{\xi\, \xi'}) \}$$

e passiamo al limite per $z=0$ ricordando le formule:

$$\lim_{z=0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1 \quad , \quad \lim_{z=0} z^2 p(z) = 1.$$

Con ciò troviamo:

$$e^{G_3} = \varepsilon^2$$

e la (6) diviene:

$$(7) \qquad \left\{ \frac{\sigma(\varepsilon z)}{\sigma(z)^N} \right\}^2 = e^{G_1 z^2} \varepsilon^2 \Pi'_{\xi \xi'} \{ p(z) - p(\Omega_{\xi \xi'}) \}$$

dove resta solo da determinare G_1. Partendo dalle identità (A) otteniamo facilmente:

$$G_1 = \frac{\mu}{2\omega} = \frac{\mu'}{2\omega'}$$

quindi:

$$G_1 \omega = \varepsilon(a\eta + b\eta') - N\eta$$
$$G_1 \omega' = \varepsilon(c\eta + d\eta') - N\eta';$$

moltiplicando la prima di queste due eguaglianze per η' e la seconda per η e sottraendo la prima di esse dalla seconda, mercè la relazione:

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}$$

otteniamo:

$$G_1 \frac{\pi i}{2} = \varepsilon \left\{ - b \eta'^2 + (d - a) \eta \eta' + c \eta^2 \right\}$$

ossia avuto riguardo alle (3*):

$$G_1 = \frac{2 i \varepsilon x}{\pi} \left\{ A \eta'^2 + 2 B \eta \eta' + C \eta^2 \right\}.$$

Dimostreremo ora l'eguaglianza:

$$G_1 = \sum'_{\xi \xi'} p(\Omega_{\xi \xi'}) .$$

Basta perciò moltiplicare i due membri dell'equazione (7) per $\sigma(z)^{2N}$, derivare logaritmicamente e poi derivare di nuovo l'eguaglianza così ottenuta: ed applicare la formula:

$$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2 \zeta(u) = \frac{p'(u)}{p(u) - p(v)}$$

con ciò si ottiene:

$$(7^*) \quad 2 \varepsilon^2 p(\varepsilon z) = 2 p(z) - 2 G_1 + \sum'_{\xi\xi'} \left\{ p(z + \Omega_{\xi\xi'}) + p(z - \Omega_{\xi \xi'}) \right\}$$

ed osservando che gli N—1 numeri $\Omega_{\xi \xi'}$ che compariscono in questa eguaglianza si scindono in coppie di numeri opposti rispetto al modulo $[2\omega, 2\omega']$, tali cioè che la somma sia congrua allo zero rispetto al modulo $[2\omega, 2\omega']$ potremo scrivere:

$$\varepsilon^2 p(\varepsilon z) = p(z) - G_1 + \sum'_{\xi \xi'} p(\Omega_{\xi \xi'}).$$

Risulta quindi dalle cose dette in fine del §. 1. che è

$$G_1 = \sum\nolimits'_{\xi\,\xi'} p(\Omega_{\xi\,\xi'})$$

e ad un tempo ritroviamo la formula di decomposizione già data (5):

$$\varepsilon^2 p(\varepsilon z) = p(z) + \sum\nolimits'_{\xi\,\xi'} \{p(z-\Omega_{\xi\,\xi'})\}\,.$$

Abbiamo così dimostrato l' eguaglianza

$$(8)\quad \sum\nolimits'_{\xi\,\xi'} p(\Omega_{\xi\,\xi'}) = \frac{2\,i\,\varepsilon\,x}{\pi}\Big\{A\,\eta'^2 + 2\,B\,\eta\,\eta' + C\,\eta^2\Big\}$$

della quale faremo uso nel seguito. Notiamo ora che sarebbe facile usando della formula:

$$p(u+v)+p(u-v) = \frac{2\{p(u)\,p(v) - \frac{1}{4}\,g_2\}\{p(u)+p(v)\} - g_3}{(\,p(u) - p(v)\,)^2}$$

trasformare il secondo membro della (7*) in una funzione razionale di $p(z)$ per modo da ottenere così la formula generale di moltiplicazione; ma non essendo quella la forma sotto la quale noi la vogliamo studiare, noi non eseguiremo questa trasformazione, e procederemo invece nella ricerca incominciata in questo paragrafo.

Riprendiamo l' equazione (7) che ora potremo scrivere nel modo seguente:

$$(9)\quad e^{-\frac{2i\varepsilon x}{\pi}(A\eta'^2+B\eta\eta'+C\eta^2)z^2}\left(\frac{\sigma(\varepsilon z)}{\sigma(z)^N}\right)^2 = \varepsilon^2\Pi'_{\xi\,\xi'}\,\{\,p(z)-p(\Omega_{\xi\,\xi'})\,\}.$$

Il primo membro di questa eguaglianza è il quadrato della funzione

$$\Theta_\varepsilon(z) = e^{-\frac{i\,\varepsilon\,x}{\pi}(A\,\eta'^2+2\,B\,\eta\eta'+C\,\eta^2)z^2}\,\frac{\sigma(\varepsilon\,z)}{\sigma(z)^{\mathfrak{N}(\varepsilon)}}$$

per la quale si trovano facilmente usando della formula fondamentale della $\sigma(z)$ le seguenti eguaglianze

$$(10)\quad \begin{cases} \Theta_\varepsilon(z+2\,\omega) = (-1)^{a\,b\,+\,a\,+\,b\,-\,N}\,\Theta_\varepsilon(z) \\ \Theta_\varepsilon(z+2\,\omega') = (-1)^{c\,d\,+\,c\,+\,d\,-\,N}\,\Theta_\varepsilon(z). \end{cases}$$

Pertanto se è:

$$N = a\,d - b\,c \equiv 1 \pmod 2$$

essendo:

$$a\,b + a + b \equiv 1 \quad ; \quad c\,d + c + d \equiv 1 \pmod 2)$$

$\Theta_\varepsilon(z)$ è una funzione doppiamente periodica coi periodi

2ω, $2\omega'$; ed essendo pari è una funzione razionale di $p(z)$; se:

$$N \equiv 0 \pmod 2$$

potranno darsi i casi seguenti:

$$\left.\begin{array}{lll} ab + a + b \equiv 0 & ; & cd + c + d \equiv 0 \\ \quad » \qquad \equiv 0 & ; & \quad » \qquad \equiv 1 \\ \quad » \qquad \equiv 1 & ; & \quad » \qquad \equiv 1 \\ \quad » \qquad \equiv 1 & ; & \quad » \qquad \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod 2$$

Nel primo caso risulta dalle (10) che $\Theta_\varepsilon(z)$ è una funzione doppiamente periodica coi periodi 2ω, $2\omega'$; ed essendo dispari, è uguale al prodotto della derivata prima di $p(z)$ per una funzione razionale di $p(z)$. Corrispondentemente agli altri tre casi prendiamo a considerare ordinatamente le funzioni

$$\varphi_1 = \frac{\sigma(z)}{\sigma_1(z)} \quad , \quad \varphi_2 = \frac{\sigma(z)}{\sigma_2(z)} \quad , \quad \varphi_3 = \frac{\sigma(z)}{\sigma_3(z)}$$

ed i prodotti:

$$\Theta_\varepsilon \varphi_1 \quad , \quad \Theta_\varepsilon \varphi_2 \quad , \quad \Theta_\varepsilon \varphi_3 ;$$

e vedremo facilmente che nel caso corrispondente ciascuno di questi prodotti è una funzione razionale di $p(z)$. Avendo pertanto riguardo al secondo membro della (9) e alle note eguaglianze:

$$\frac{\sigma_\alpha(z)}{\sigma(z)} = \sqrt{p(z) - e_\alpha}$$

potremo dare nei diversi casi le seguenti espressioni della funzione $\Theta_\varepsilon(z)$, nelle quali abbiamo posto:

$$p(z) = y \quad :$$

I) $N \equiv 1 \pmod 2$

$$\Theta_\varepsilon(z) = e^{-\frac{G_1}{2} z^2} \frac{\sigma(\varepsilon z)}{\sigma(z)^N} = \varepsilon y^{\frac{N-1}{2}} + a_1 y^{\frac{N-3}{2}} + \ldots + a_{\frac{N-1}{2}}$$

II) $N \equiv 0 \pmod 2$;

α) $\quad a\,b + a + b \equiv c\,d + c + d \equiv 0 \pmod 2$

$$\Theta_\varepsilon(z) = \frac{1}{2} \varepsilon\, p'(z) \left\{ y^{\frac{N}{2}-2} + a_1\, y^{\frac{N}{2}-3} + \ldots + a_{\frac{N}{2}-2} \right\};$$

β)

$$\Theta_\varepsilon(z) = \varepsilon . \sqrt{p(z) - e_\alpha} \left\{ y^{\frac{N}{2}-1} + a_1 y^{\frac{N}{2}-2} + \ldots + a_{\frac{N}{2}-1} \right\}$$

dove è:

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha = 1 \text{ se } & ab+a+b \equiv 0 & cd+c+d \equiv 1 \\ \alpha = 2 \text{ »} & \text{»} \quad \equiv 1 & \text{»} \quad \equiv 1 \\ \alpha = 3 \text{ »} & \text{»} \quad \equiv 1 & \text{»} \quad \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod 2$$

(11)

§. III.

La funzione $\Theta_\varepsilon(z)$ che abbiamo definito nel paragrafo precedente è una generalizzazione della funzione

$$\Psi_n(z) = \frac{\sigma(n\,z)}{\sigma(z)^{n^2}}$$

introdotta da Weierstrass (*) nella teoria della ordinaria moltiplicazione dell' argomento della funzione $p(z)$ e si riduce alla $\Psi_n(z)$ ponendo $x=0$ $y=n$.

Adesso noi vogliamo mostrare come per l'introduzione della funzione $\Theta_\varepsilon(z)$ la formula generale di moltiplicazione complessa prenda una forma del tutto analoga a quella che prende la formula di moltiplicazione ordinaria per l' introduzione della funzione $\Psi_n(z)$. Osserviamo anzitutto che ponendo:

$$\varepsilon = y + i\,x\sqrt{D}$$

e

$$\frac{1}{2}\,G_1 = \frac{x\,i\,\varepsilon}{\pi}\,(A\,\eta'^2 + 2\,B\,\eta\,\eta' + C\,\eta^2) = G_\varepsilon$$

si trovano molto facilmente le due seguenti identità:

(*) Cfr. Weierstrass, le sue lezioni; Kiepert, Crelle, 76, Virkliche Ausführung der ganz. Mult. u. s. w.

$$(12)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathfrak{N}(\varepsilon-1)+\mathfrak{N}(\varepsilon+1)=2\,\mathfrak{N}(\varepsilon)+2\\ &G_{\varepsilon-1}+G_{\varepsilon+1}=2\,G_{\varepsilon} \end{aligned} \right.$$

posto ciò, partendo dalla nota eguaglianza

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(v-u)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}=p(u)-p(v)$$

otteniamo la seguente:

$$p(\varepsilon z)-p(z)=-\frac{\sigma\{(\varepsilon-1)z\}\,\sigma\{(\varepsilon+1)z\}}{\sigma^2(\varepsilon z)\,\sigma^2(z)}$$

la quale usando delle (12) può porsi sotto la forma:

$$p(\varepsilon z)-p(z)=-\frac{e^{-G_{\varepsilon-1}z^2}\dfrac{\sigma\{(\varepsilon-1)z\}}{\sigma(z)^{\mathfrak{N}(\varepsilon-1)}}\cdot e^{-G_{\varepsilon+1}z^2}\dfrac{\sigma\{(\varepsilon+1)z\}}{\sigma(z)^{\mathfrak{N}(\varepsilon+1)}}}{\left\{e^{-G_{\varepsilon}z^2}\dfrac{\sigma(\varepsilon z)}{\sigma(z)^{\mathfrak{N}(\varepsilon)}}\right\}}$$

ossia

$$(13)\qquad p(\varepsilon z)-p(z)=-\frac{\Theta_{\varepsilon-1}(z)\,.\,\Theta_{\varepsilon+1}(z)}{\Theta_{\varepsilon}^{2}(z)}.$$

Questa è la formula che noi cercavamo, la quale pel caso che ε sia un numero intero n ricade nella formula di moltiplicazione ordinaria:

$$p(n\,z) - p(z) = - \frac{\Psi_{n-1}\,\Psi_{n+1}}{\Psi_n^{\,2}}$$

Il denominatore dell' espressione

$$- \frac{\Theta_{\varepsilon-1}\;\Theta_{\varepsilon+1}}{\Theta_{\varepsilon}^{\,2}}$$

è una funzione razionale intera di $p(z)$ come risulta dalla eguaglianza (9); è facile verificare che lo stesso accade pel numeratore. Infatti supponendo dapprima che si tratti di una forma di prima specie osserviamo che in tal caso, x ed y essendo sempre numeri interi, avremo le relazioni:

$$\mathfrak{N}(\varepsilon-1) \equiv \mathfrak{N}(\varepsilon+1) \qquad (\bmod 2)$$

$$\mathfrak{N}(\varepsilon-1) + \mathfrak{N}(\varepsilon) \equiv \mathfrak{N}(\varepsilon+1) + \mathfrak{N}(\varepsilon) \equiv 1 \pmod 2;$$

quindi se

$$\mathfrak{N}(\varepsilon) \equiv 0 \qquad (\bmod 2)$$

risultando:

$$\mathfrak{N}(\varepsilon-1) \equiv \mathfrak{N}(\varepsilon+1) \equiv 1 \pmod 2$$

$\Theta_{\varepsilon-1}$, $\Theta_{\varepsilon+1}$ sono per le (11) funzioni razionali intere di $p(z)$: e tale è anche il loro prodotto.

Ma se

$$\mathfrak{N}(\varepsilon) \equiv 1 \pmod{2}$$

e per conseguenza:

$$\mathfrak{N}(\varepsilon-1) \equiv \mathfrak{N}(\varepsilon+1) \equiv 0$$

$\Theta_{\varepsilon-1}$ e $\Theta_{\varepsilon+1}$ non saranno più funzioni razionali di $p(z)$ ma contengono ciascuna un fattore irrazionale della forma $\sqrt{p(z) - e_\alpha}$, oppure la derivata prima della funzione $p(z)$ (v^i le (11)). Però è facile dimostrare che quando $\Theta_{\varepsilon-1}$ contiene un fattore $\sqrt{p(z) - e_\alpha}$ lo stesso fattore comparisce nell' espressione di $\Theta_{\varepsilon+1}$; ed altrettanto accade quando $\Theta_{\varepsilon-1}$ contiene il fattore $\frac{1}{2}\,p'(z)$: e da ciò risulterà immediatamente (11), che il prodotto $\Theta_{\varepsilon-1} \,.\, \Theta_{\varepsilon+1}$ è una funzione razionale intera di $p(z)$. Infatti se:

$$\varepsilon\,\omega = a\,\omega + b\,\omega'$$
$$\varepsilon\,\omega' = c\,\omega + d\,\omega'$$

sono le relazioni fra i periodi ed il moltiplicatore ε, le relazioni analoghe per il moltiplicatore $\varepsilon-1$ saranno:

$$(\varepsilon-1)\,\omega = a_1\,\omega + b_1\,\omega'$$
$$(\varepsilon-1)\,\omega' = c_1\,\omega + d_1\,\omega'$$

con

$$a_1 = a-1\ ;\ b_1 = b\ ;\ c_1 = c\ ;\ d_1 = d-1\ ;$$

e quelle per il moltiplicatore $\varepsilon+1$:

$$(\varepsilon+1)\,\omega = a_2\,\omega + b_2\,\omega'$$
$$(\varepsilon+1)\,\omega' = c_2\,\omega + d_2\,\omega'$$

dove abbiam posto

$$a_2 = a+1\ ,\ b_2 = b\ ,\ c_2 = c\ ,\ d_2 = d+1;$$

ed è evidentemente:

$$a_1 \equiv a_2 \qquad d_1 \equiv d_2 \pmod 2.$$

Conseguentemente risulta essere sempre:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,b_1 + a_1 + b_1 \equiv a_2\,b_2 + a_2 + b_2 \\ c_1\,d_1 + c_1 + d_1 \equiv c_2\,d_2 + c_2 + d_2 \end{array}\right\} \pmod 2$$

e ciò, avuto riguardo alle (11), dimostra quanto abbiamo asserito.

Tutto ciò vale anche per una moltiplicazione complessa corrispondente ad una forma di 2ª specie: basta solo osservare che quando x ed y sono le metà di due numeri dispari è:

$$\mathfrak{N}(\varepsilon) \equiv \mathfrak{N}(\varepsilon-1) \equiv \mathfrak{N}(\varepsilon+1) \pmod 2$$

e la discussione procede nello stesso modo.

Così abbiamo verificato che l' eguaglianza

$$p(\varepsilon z) - p(z) = - \frac{\Theta_{\varepsilon-1} \cdot \Theta_{\varepsilon+1}}{\Theta_{\varepsilon}^{2}}$$

è la formula generale di moltiplicazione complessa corrispondente ad una data forma (A , B , C). Il numeratore della funzione razionale del secondo membro è di grado

$$\mathrm{N} = \mathfrak{N}(\varepsilon) = a\,d - b\,c$$

ed il denominatore è del grado

$$\mathfrak{N}(\varepsilon) - 1\,;$$

ciò risulta facilmente dalla identità già stabilita tra le norme dei moltiplicatori $\varepsilon-1$, $\varepsilon+1$, ε.

§. IV.

Ed ora ci rimane soltanto da occuparci della determinazione di quei coefficienti a_s che compariscono nelle espressioni (11) della funzione $\Theta_{\varepsilon}(z)$.

Riferendoci appunto a quelle espressioni troviamo facilmente che la formula (13) può scriversi sotto la forma:

$$(14) \qquad p(\varepsilon z) - p(z) = \frac{(1-\varepsilon^2)\,\mathrm{U}}{\varepsilon^2\,\mathrm{V}}$$

essendo U e V due polinomii in $p(z)$ di grado $\mathcal{N}(\varepsilon)$ il primo, e di grado $\mathcal{N}(\varepsilon)-1$ il secondo ed aventi a coefficienti delle più alte potenze di $p(z)$ l'unità. Poniamo

$$p(z) = y$$

$$\mathrm{U} = y^{\mathrm{N}} + a_1\, y^{\mathrm{N}-1} + \dots + a_{\mathrm{N}}$$

$$\mathrm{V} = y^{\mathrm{N}-1} + b_1\, y^{\mathrm{N}-2} + \dots + b_{\mathrm{N}-1}.$$

La (14) da:

$$\varepsilon^2\, p(\varepsilon z)\, \mathrm{V} = \varepsilon^2 \left\{ \mathrm{V}\, p(z) - \mathrm{U} \right\} + \mathrm{U}$$

ossia:

$$\varepsilon^2\, p(\varepsilon z) \left\{ y^{\mathrm{N}-1} + b_1 y^{\mathrm{N}-2} + \dots + b_{\mathrm{N}-1} \right\} = y^{\mathrm{N}} + k_1\, y^{\mathrm{N}-1} + \dots + k_{\mathrm{N}}$$

avendo posto:

$$k_1 = a_1 (1-\varepsilon^2) + \varepsilon^2 b_1$$
$$k_2 = a_2 (1-\varepsilon^2) + \varepsilon^2 b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$k_{N-1} = a_{N-1} (1-\varepsilon^2) + \varepsilon^2 b_{N-1}$$
$$k_N = a_N (1-\varepsilon^2).$$

Svolgiamo ora in serie per le potenze di z colle formule:

$$y = p(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \frac{g_2^{\,2}}{2^4 . 3 . 5^2} . z^6 + \ldots\ldots$$

$$\varepsilon^2 p(\varepsilon z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} \varepsilon^4 z^2 + \frac{g_3}{28} \varepsilon^6 z^4 + \frac{g_2^{\,2}}{2^4 . 3 . 5^2} \varepsilon^8 z^6 + \ldots\ldots$$

sostituiamo questi sviluppi nella equazione:

$$\varepsilon^2 p(\varepsilon z) \left\{ y^{N-1} + \ldots + b_{N-1} \right\} - \left\{ y^N + \ldots + k_N \right\} = 0$$

ed eguagliamo a zero i coefficienti delle diverse potenze di z. In tal modo si ottengono delle relazioni ricorrenti lineari nelle $b_i\, k_i$ i cui coefficienti sono funzioni razionali intere di ε^2, g_2, g_3 i cui coefficienti numerici sono numeri razionali. Ora se osserviamo che prendendo comunque le k_i e le b_i il primo membro della equazione precedente è una funzione ellittica coi periodi $2\,\omega$, $2\,\omega'$ di ordine $4\,N-2$ al massimo di cui l'infinito in $z=0$ è al più d'ordine $2\,N$ ed i rimanenti sono $N-1$ poli di 2.° ordine, basterà determinare le b_i, k_i in guisa che siano nulli tutti i coefficienti delle potenze negative di z nello sviluppo del primo membro della equazione precedente e quelli delle potenze positive fino a $z^{2(N-1)}$ per esser certi che quel primo membro avendo già in $z=0$ un infinitesimo d'ordine $2N$ ed al più $2N-1$ infiniti è identicamente nullo. Basterà dunque scrivere le prime $2N-1$ delle relazioni citate per essere certi che esse determinano completamente le $2N-1$ costanti b_i, k_i le quali saranno quindi funzioni razionali di g_2, g_3 razionali in ε^2 con coefficienti numerici razionali (*). Dalle equazioni che abbiamo scritto precedentemente che legano le k_i ; a_i ; b_i; risulta che anche i coefficienti a_i sono della stessa natura. Abbiamo dunque il risultato:

I coefficienti della funzione Θ^2_ε *e quelli del prodotto* $\Theta_{\varepsilon-1}\,\Theta_{\varepsilon+1}$ *sono funzioui razionali di* g_2, g_3 *i cui coefficienti numerici contengono la sola irrazionalità* $i\sqrt{D}$. Applicando questi risultati alle moltiplicazioni complesse elementari possiamo dire.

I coefficienti delle funzioni Θ^2_ε, $\Theta_{\varepsilon-1}\,.\,\Theta_{\varepsilon+1}$ *per i valori elementari di* ε *sono funzioni razionali di* g_2, g_3 *con coefficienti numerici razionali ovvero contenenti la sola irrazionalità* $i\sqrt{D}$ *secondo che la forma* (A, B, C) *è di prima o di seconda specie. Le formule elementari di moltiplicazione complessa dipendono solo dal determinante* D *e dalla specie della forma.*

Ricordiamo ora che abbiamo dimostrata l'eguaglianza

(*) Queste considerazioni le ho trovate svolte in quelle lezioni già citate del Prof. Luigi Bianchi.

$$G_1 = \frac{2\,x\,i\varepsilon}{\pi}\left\{A\,\eta'^2 + 2\,B\,\eta\,\eta' + C\,\eta^2\right\} = \sum{}' p(\Omega_{\xi\,\xi'})$$

che ci dice che a meno del segno il coefficiente di y^{N-2} in V è appunto G_1: sarà dunque G_ε una funzione razionale di g_2, g_3 con coefficienti numerici contenenti la sola irrazionalità $i\sqrt{D}$. Nel caso di una moltiplicazione complessa elementare corrispondente ad una forma di prima specie è

$$x = 1 \qquad \varepsilon = i\sqrt{D};$$

quindi

$$G_\varepsilon = \frac{-2\sqrt{D}}{\pi}\left(A\,\eta'^2 + 2\,B\,\eta\,\eta' + C\,\eta^2\right)$$

e risulta che *il rapporto*

$$\frac{A\,\eta'^2 + 2\,B\,\eta\,\eta' + C\,\eta^2}{\pi}$$

è il prodotto di $\frac{1}{\sqrt{D}}$ *per una funzione razionale di* g_2, g_3 *con coefficienti numerici razionali;* se la forma (A, B, C) è di seconda specie si può dire soltanto che

$$\frac{A\,\eta'^2 + 2\,B\,\eta\,\eta' + C\,\eta^2}{\pi}$$

è una funzione razionalc intera di g_2, g_3 *con coefficienti numerici contenenti la sola irrazionalità* $i\sqrt{D}$.

Finora abbiamo studiato solamente la natura dei coefficienti delle funzioni Θ^2_ε, $\Theta_{\varepsilon-1} \cdot \Theta_{\varepsilon+1}$ dobbiamo ora rivolgerci allo studio di quelli della funzione Θ_ε. Cominciamo dal caso:

$$N \equiv 1 \pmod 2;$$

abbiamo visto (11) che in questo caso Θ_ε è un polinomio in $y = p(z)$ della forma:

$$(15) \quad \Theta_\varepsilon = e^{-G_\varepsilon z^2} \frac{\sigma(\varepsilon z)}{\sigma(z)^N} = \varepsilon\, y^{\frac{N-1}{2}} + a_1\, y^{\frac{N-3}{2}} + \ldots + a_{\frac{N-1}{2}}$$

Adoprando gli sviluppi in serie:

$$e^{-G_\varepsilon z^2} = 1 - G_\varepsilon z^2 + \frac{G_\varepsilon^2 z^4}{1.2} + \frac{G_\varepsilon^3 z^6}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

$$\sigma(z) = z \left\{ 1 - \frac{z^4}{240} g_2 + \ldots\ldots \right\}$$

$$\sigma(\varepsilon z) = \varepsilon z \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^4 z^4}{240} g_2 + \ldots\ldots \right\}$$

ed applicando i noti teoremi sulla moltiplicazione e divisione delle serie si otterrà lo sviluppo di Θ_ε per le potenze

*

ascendenti di z^2. Sostituendo questo sviluppo al primo membro della (15) e sviluppando in serie il secondo membro mediante la formula:

$$y = p(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20} z^2 + \frac{g_3}{28} z^4 + \ldots\ldots$$

e paragonando poi i coefficienti delle diverse potenze di z si dimostra che *i coefficienti* a_i *sono funzioni razionali di* $g_2\ g_3$ *con coefficienti numerici contenenti la sola irrazionalità* $i\sqrt{\mathrm{D}}$.

Sia ora

$$\mathrm{N} \equiv 0 \pmod 2$$

ed

$$a\, b + a + b \equiv c\, d + c + d \equiv 0 \pmod 2):$$

in tal caso è (11)

$$\Theta_\varepsilon(z) = e^{-\mathrm{G}_\varepsilon z^2} \frac{\sigma(\varepsilon z)}{\sigma(z)^{\mathrm{N}}} = \frac{\varepsilon}{2} p'(z) \left\{ y^{\frac{\mathrm{N}}{2}-2} + \ldots + a_{\frac{\mathrm{N}}{2}-2} \right\}$$

ed adoprando lo sviluppo in serie di $p'(z)$ secondo le potenze di z si dimostra che *i coefficienti del polinomio di grado* $\frac{\mathrm{N}}{2} - 2$ *in* $y = p(z)$ *che comparisce nel secondo* *membro della eguaglianza precedente sono funzioni razionali di* g_2 , g_3 *con coefficienti numerici contenenti la sola irrazionalità* $i\sqrt{D}$; se invece non è:

$$ab + a+b \equiv cd + c+d \equiv 0 \pmod 2$$

allora ((11) , β) è

$$\Theta_{\varepsilon}(z) = e^{-G_{\varepsilon} z^2} \frac{\sigma(\varepsilon z)}{\sigma(z)^N} = \varepsilon \sqrt{p(z) - e_\alpha} \left\{ y^{\frac{N}{2}-1} + \dots + a_{\frac{N}{2}-1} \right\}$$

e ricordando che

$$\sqrt{p(z) - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha(z)}{\sigma(z)}$$

risulta :

$$e^{-G_{\varepsilon} z^2} \frac{\sigma(\varepsilon z)}{\sigma(z)^{N-1} \cdot \sigma_\alpha(z)} = \varepsilon \left\{ y^{\frac{N}{2}-1} + \dots + a_{\frac{N}{2}-1} \right\}$$

ed operando al solito mediante gli sviluppi in serie di $e^{-G_{\varepsilon} z^2}$, $\sigma(\varepsilon z)$, $\sigma(z)$, $\sigma_\alpha(z)$, $p(z)$ concluderemo che in questo caso *i coefficienti del polinomio di grado* $\frac{N}{2}-1$ *in* y *che comparisce nel secondo membro della eguaglianza precedente sono funzioni razionali di* g_2, g_3, e_α *con coefficienti numerici contenenti la sola irrazionalità* $i\sqrt{D}$.

§. V.

Vogliamo da ultimo mostrare come si possano trovare anche per la funzione $\Theta_\varepsilon(z)$ da noi introdotta delle formule ricorrenti atte a facilitare il calcolo delle formule di moltiplicazione complessa e perfettamente analoghe a quelle note per la funzione Ψ_n che servono per il calcolo delle formule di moltiplicazione ordinaria.

Partiamo infatti dalla equazione a tre termini per la funzione $\sigma(z)$:

$$
\begin{aligned}
&\sigma(a-b)\,\sigma(a+b)\,\sigma(c-d)\,\sigma(c+d)\,+ \\
(16)\qquad &+\sigma(b-c)\,\sigma(b+c)\,\sigma(a-d)\,\sigma(a+d) \\
&+\sigma(c-a)\,\sigma(c+a)\,\sigma(b-d)\,\sigma(b+d)=0
\end{aligned}
$$

e poniamovi:

$$
a=\varepsilon_1 z \quad , \quad b=\varepsilon_2 z
$$
$$
c=z \quad , \quad d=0 ;
$$

otterremo:

$$(17)\qquad \sigma\{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)z\}\ \sigma\{(\varepsilon_1-\varepsilon_2 z\}\ \sigma^2(z) =$$
$$=\sigma\{(\varepsilon_1-1)z\}\sigma\{(\varepsilon_1+1)z\}\sigma^2(\varepsilon_2 z)-\sigma\{(\varepsilon_2-1)z\}\sigma\{(\varepsilon_2+1)z\}\sigma^2(\varepsilon_1 z).$$

Poniamo ora

$$\varepsilon_1 = y_1 + i\,x_1 \sqrt{D} \qquad \varepsilon_2 = y_2 + i\,x_2 \sqrt{D}$$

$$G_{\varepsilon_1} = \frac{i\,x_1\,y_1 - x_1{}^2 \sqrt{D}}{\pi}\ \{A\,\eta'^2 + 2\,B\,\eta\,\eta' + C\,\eta^2\}$$

$$G_{\varepsilon_2} = \frac{i\,x_2\,y_2 - x_2{}^2 \sqrt{D}}{\pi}\ \{A\,\eta'^2 + 2\,B\,\eta\,\eta' + C\,\eta^2\}$$

otterremo facilmente le seguenti identità:

$$G_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + G_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = 2(G_{\varepsilon_1} + G_{\varepsilon_2})$$

$$\mathfrak{N}\,\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \mathfrak{N}(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + 2 = 2\,\mathfrak{N}(\varepsilon_1) + 2\,\mathfrak{N}(\varepsilon_2) + 2$$
$$= \mathfrak{N}(\varepsilon_1-1) + \mathfrak{N}(\varepsilon_1+1) + 2\,\mathfrak{N}(\varepsilon_2)$$
$$= \mathfrak{N}(\varepsilon_2-1) + \mathfrak{N}(\varepsilon_2+1) + 2\,\mathfrak{N}(\varepsilon_1).$$

Posto ciò se dividiamo i due membri della (17) per

$$e^{(G_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + G_{\varepsilon_1-\varepsilon_2})\,z^2}\ \{\sigma(z)\}^{\mathfrak{N}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \mathfrak{N}(\varepsilon_1-\varepsilon_2) + 2}$$

otterremo facilmente l' eguaglianza

$$(18)\ \Theta_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,\Theta_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = \Theta_{\varepsilon_1-1}\,\Theta_{\varepsilon_1+1}\,\Theta^2_{\varepsilon_2} - \Theta_{\varepsilon_2-1}\,\Theta_{\varepsilon_2+1}\,\Theta_{\varepsilon_1}{}^2$$

Facendo ora dapprima:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon - 1$$

e poi

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - 1 \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon + 1$$

e ricordando che quando ε è un numero intero n è

$$\Theta_\varepsilon = \Psi_n$$

quindi in particolare:

$$\Theta_1 = \Psi_1 = 1$$
$$\Theta_2 = \Psi_2 = -p'(z)$$

troveremo le due formule

$$(19)\quad \begin{cases} \Theta_{2\varepsilon+1} = \Theta_{\varepsilon+2}\,\Theta_\varepsilon^{\,3} - \Theta_{\varepsilon-1}\,\Theta_{\varepsilon+1}^{\,3} \\[2ex] \Theta_{2\varepsilon} = \dfrac{\Theta_\varepsilon}{p'}\left\{\Theta_{\varepsilon-2}\,\Theta_{\varepsilon+1}^{\,2} - \Theta_{\varepsilon+2}\,\Theta_{\varepsilon-1}^{\,2}\right\} \end{cases}$$

le quali quando sia ε un numero intero coincidono colle relazioni ricorrenti tra le Ψ_n.

Nel nostro caso è più utile adoprare un' altra notazione; porremo cioè:

$$\varepsilon = m + n\,\mathrm{E},$$

indicando con E il valore elementare del moltiplicatore corrispondente alla forma data (A , B , C); e

$$\Theta_{\varepsilon} = \Theta_{m,n} .$$

In tal modo la formula (18) diviene:

$$(18^*) \left\{ \begin{aligned} &\Theta_{m_1+m_2, n_1+n_2} \Theta_{m_1-m_2, n_1-n_2} = \\ &= \Theta_{m_1-1, n_1} \Theta_{m_1+1, n_1} \Theta^2_{m_2, n_2} - \Theta_{m_2-1, n_2} \Theta_{m_2+1, n_2} \Theta^2_{m_1, n_1} \end{aligned} \right.$$

Facendo in questa eguaglianza, prima:

$$m_1 = m_2 = m \quad ; \quad n_2 = n \quad ; \quad n_1 = n + 1$$

e poi

$$m_1 = m+1 \ , \ m_2 = m \ , \ n_1 = n+1 \ , \ n_2 = n$$

otterremo ordinatamente le relazioni:

$$(19^*) \left\{ \begin{aligned} &\Theta_{2m, 2n+1} \Theta_{0,1} = \\ &= \Theta_{m-1, n+1} \Theta_{m+1, n+1} \Theta^2_{m,n} - \Theta_{m-1, n} \Theta_{m+1, n} \Theta^2_{m, n+1} \\ &\Theta_{2m+1, 2n+1} \Theta_{1,1} = \\ &= \Theta_{m, n+1} \Theta_{m+2, n+1} \Theta^2_{m,n} - \Theta_{m-1, n} \Theta_{m+1, n} \Theta^2_{m+1, n+1} . \end{aligned} \right.$$

Riscrivendole pertanto unitamente alle (19) scritte colla nuova notazione otteniamo le seguenti formule:

$$
(20) \left\{
\begin{aligned}
\Theta_{2m+1,2n} &= \Theta_{m+2,n}\,\Theta^3_{m,n} - \Theta_{m-1,n}\,\Theta^3_{m+1,n} \\
\Theta_{2m,2n+1} &= \frac{1}{\Theta_{0,1}} \left\{ \Theta_{m-1,n+1}\,\Theta_{m+1,n+1}\,\Theta^2_{m,n} - \Theta_{m-1,n}\,\Theta_{m+1,n}\,\Theta^2_{m,n+1} \right\} \\
\Theta_{2m,2n} &= \frac{\Theta_{m,n}}{p'(z)} \left\{ \Theta_{m-2,n}\,\Theta^2_{m+1,n} - \Theta_{m+2,n}\,\Theta^2_{m-1,n} \right\} \\
\Theta_{2m+1,2n+1} &= \frac{1}{\Theta_{11}} \left\{ \Theta_{m,n+1}\,\Theta_{m+2,n+1}\,\Theta^2_{m,n} - \Theta_{m-1,n}\,\Theta_{m+1,n}\,\Theta^2_{m+1,n+1} \right\}
\end{aligned}
\right.
$$

Esse sono appunto quelle alle quali volevamo pervenire; ed ora dimostreremo che calcolati direttamente i 4 valori iniziali

$$\Theta_{0,1}\ ;\ \Theta_{1,2}\ ;\ \Theta_{-1,1}\ ;\ \Theta_{2,1}\ ;$$

tutti gli altri valori $\Theta_{m,n}$ possono essere dedotti mediante il loro uso. Osserviamo anzitutto che possiamo ricondurre il calcolo di quelle funzioni $\Theta_{m,n}$ nelle quali uno o tutti e due gli indici m, n sono negativi a quello delle funzioni $\Theta_{m,n}$ con tutti e due gli indici positivi: ciò risulta dalle considerazioni seguenti.

Poniamo:

$$G_{\varepsilon} = G_{m,n}\ ;$$

allora se la forma (A , B , C) è di prima specie essendo

$$E = i\sqrt{D}$$

risulta:

$$G_{m,n} = (i\,m\,n - n^2 \sqrt{D})\,\frac{A\,\eta'^2 + 2\,B\,\eta\,\eta' + C\,\eta^2}{\pi}\,;$$

e se è di 2.ª specie essendo:

$$E = \frac{1 + i\sqrt{D}}{2}$$

è

$$G_{m,2n} = \left\{ i\left(\frac{2m+n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right) - \left(\frac{n}{2}\right)^2 \sqrt{D} \right\} \frac{A\eta'^2 + 2\,B\,\eta\,\eta' + C\eta^2}{\pi}\,;$$

ne conseguono in ogni caso facilmente le eguaglianze:

$$(\alpha)\ \begin{cases} G_{m,n} = G_{-m,-n} \\ G_{-m,n} = G_{m,-n} \end{cases}$$

Analogamente, posto:

$$\mathfrak{N}(\varepsilon) = \mathfrak{N}_{m,n}$$

si trovano immediatamente in tutti e due i casi le eguaglianze

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \mathfrak{N}_{m,n} = \mathfrak{N}_{-m,-n} \\ \mathfrak{N}_{-m,n} = \mathfrak{N}_{m,-n}\,. \end{cases}$$

Posto ciò basta ricordare che è:

$$\Theta_{m,n} = e^{-G_{m,n} z^2} \frac{\sigma\{(m+n\,E)z\}}{\sigma(z)^{\mathfrak{N}_{m,n}}}$$

per dedurrre dalle (α) , (β) le eguaglianze:

$$(21) \qquad \begin{cases} \Theta_{m,n} = -\Theta_{-m,-n} \\ \Theta_{m,-n} = -\Theta_{-m,n} \,. \end{cases}$$

Inoltre se nella (18) poniamo

$$m_1 = m \quad , \quad m_2 = 0 \quad , \quad m_1 = 0 \quad , \quad n_2 = n$$

otteniamo :

$$\Theta_{m,n}\,\Theta_{m,-n} = \Psi_{m-1}\ \Psi_{m+1}\,\Theta^2_{0,n} - \Theta_{-1,n}\,\Theta_{1,n}\ \Psi^2_{m},$$

quindi

$$(22)\ \Theta_{m,-n} = \frac{1}{\Theta_{m,n}} \left\{ \Psi_{m-1}\ \Psi_{m+1}\ \Theta^2_{0,n} - \Theta_{-1,n}\,\Theta_{1,n}\ \Psi^2_{m} \right\}.$$

E da notare che questa uguaglianza vale solo per $m > 1$. Volendo delle formule analoghe pel caso che sia $m = 1$ le otterremo facendo, nella prima e nella quarta delle (20) $m = -1$:

$$(23)\left\{\begin{aligned}\Theta_{-1,2n} &= \Theta_{1,n}\,\Theta^3_{-1,n} - \Theta_{-2,n}\,\Theta^3_{0,n}\\ \Theta_{-1,2n+1} &= \frac{1}{\Theta_{1,1}}\left\{\Theta_{-1,n+1}\Theta_{1,n+1}\Theta^2_{-1,n} - \Theta_{-2,n}\Theta_{0,n}\Theta^2_{0,n+1}\right\}\end{aligned}\right.$$

In queste formule compariscono i valori $\Theta_{-2,n}$; ma questi si possono ridurre ai valori $\Theta_{0,n}$, $\Theta_{-1,n}$, $\Theta_{1,n}$ usando delle (21), (22). Pertanto le formule (21), (22), (23) riducono il calcolo delle funzioni $\Theta_{m,n}$ con indici negativi, a quello di quelle con indici positivi o aventi il primo indice —1, e il secondo positivo e inferiore; e poichè le (22) (23) valgono subito per $n=1$ basterà conoscere $\Theta_{-1,1}$ soltanto tra le funzioni aventi indici negativi, e resteranno solo da calcolare quelle con indici positivi: di questo ora andiamo ad occuparci. Osserviamo però che per $m=0$ e $m=1$ nei secondi membri delle (20) compariscono funzioni aventi per primo indice —1, ovvero —2; dovremo quindi per procedere nel calcolo delle funzioni $\Theta_{m,n}$ con m, n positivi, calcolare anche quelle che hanno per primo indice —1 o —2. Indichiamo adesso con che ordine si deve procedere per trovare tutte le funzioni $\Theta_{m,n}$ con indici positivi corrispondenti ad una data forma (A, B, C). In primo luogo bisognerà che si calcoli direttamente secondo il metodo del §. precedente, la formula di moltiplicazione complessa elementare:

$$p(Ez) - p(z) = -\frac{\Theta_{-1,1}\,\Theta_{1,1}}{\Theta^2_{0,1}}$$

così otterremo l'espressione di G_E in funzione razionale di g_2 , g_3; e ce ne serviremo per calcolare direttamente le funzioni

$$\Theta_{0,1} \ , \ \Theta_{1,1} \ , \ \Theta_{-1,1} \ , \ \Theta_{2,1}$$

delle quali nessuna può dedursi dalle altre mediante le (20). Calcoleremo $\Theta_{0,1}$, $\Theta_{1,1}$ direttamente col metodo degli sviluppi in serie che abbiamo indicato nel paragrafo precedente; $\Theta_{-1,1}$ verrà determinata dall' eguaglianza

$$\Theta_{-1,1} = - \frac{(p(Ez) - p(z))\,\Theta^2_{0,1}}{\Theta_{1,1}}$$

e $\Theta_{2,1}$ verrà determinato dall'altra

$$\Theta_{2,1} = - \frac{\{[p(E+1)z] - p(z)\}\,\Theta^2_{11}}{\Theta_{0,1}}$$

nella quale dovremo fare uso del teorema di addizione per la funzione $p(z)$ per sviluppare $p\{(Ez+z)\}$.

Fatto ciò, tutti gli altri valori $\Theta_{m,n}$ possono essere dedotti da questi mediante le (20), (22), (23). Basta infatti calcolarli nell' ordine seguente:

$$\Theta_{2,-1} = \frac{1}{\Theta_{2,1}} \left\{ \Psi_1 \ \Psi_3 \ \Theta^2_{0\,1} - \Theta_{-1,1} \ \Theta_{1,1} \ \Psi^2_2 \right\}$$

$$\Theta_{-2\ 1} = - \Theta_{2,-1}$$

$$\Theta_{0,-1} = - \Theta_{0,1}$$

$$\Theta_{1,-1} = - \Theta_{-1,1}$$

$$\Theta_{0,2} = \frac{\Theta_{0,1}}{p'(z)} \left\{ \Theta_{-2,1} \Theta^2_{1,1} - \Theta_{2,1} \Theta^2_{-1,1} \right\}$$

$$\Theta_{1,2} = \Theta_{2,1} \Theta^3_{0,1} - \Theta_{-1,1} \Theta^3_{1,1}$$

$$\Theta_{-1,2} = \Theta_{1,1} \ \Theta^3_{-1,1} - \Theta_{-2,1} \ \Theta^3_{0,1}$$

$$\Theta_{3,-1} = \frac{1}{\Theta_{1,1}} \left\{ \Psi_1 \ \Psi_3 \ \Theta^2_{1,-1} - \Theta_{0,-1} \ \Theta_{2,-1} \ \Psi^2_2 \right\}$$

$$\Theta_{3,1} = \frac{1}{\Theta_{3,-1}} \left\{ \Psi_2 \ \Psi_4 \ \Theta^2_{0,1} - \Theta_{-1,1} \ \Theta_{1,1} \ \Psi^2_3 \right\}$$

$$\Theta_{2,2} = \frac{\Theta_{1,1}}{p'(z)} \left\{ \Theta_{-1,1} \ \Theta^2_{2,1} - \Theta_{3,1} \ \Theta^2_{0,1} \right\}$$

$$\Theta_{0,3} = \frac{1}{\Theta_{0,1}} \left\{ \Theta_{-1,2} \ \Theta_{1,2} \ \Theta^2_{0,1} - \Theta_{-1,1} \ \Theta_{1,1} \ \Theta^2_{0,2} \right\}$$

$$\Theta_{1,3} = \frac{1}{\Theta_{1,1}} \left\{ \Theta_{0,2} \Theta_{2,2} \Theta^2_{0,1} - \Theta_{-1,1} \Theta_{1,1} \Theta^2_{1,2} \right\}$$

$$\Theta_{-1,3} = \frac{1}{\Theta_{1,1}} \left\{ \Theta_{-1,2}\, \Theta_{1,2}\, \Theta^2_{-1,1} - \Theta_{-2,1}\, \Theta_{0,1}\, \Theta^2_{0,2} \right\}$$

$$\Theta_{2,3} = \frac{1}{\Theta_{0,1}} \left\{ \Theta_{0,2}\, \Theta_{2,2}\, \Theta^2_{1,1} - \Theta_{0,1}\, \Theta_{2,1}\, \Theta^2_{1,2} \right\}.$$

$$\Theta_{2,-3} = \frac{1}{\Theta_{2,3}} \left\{ \Psi_1\, \Psi_3\, \Theta^2_{0,3} - \Theta_{-1,3}\, \Theta_{1,3}\, \Psi^2_2 \right\}$$

$$\Theta_{-2,3} = - \Theta_{2,-3}$$

$$\Theta_{3,2} = \Theta_{3,1}\, \Theta^3_{1,1} - \Theta_{0,1}\, \Theta^3_{2,1}$$

$$\Theta_{3,3} = \frac{1}{\Theta_{1,1}} \left\{ \Theta_{1,2}\, \Theta_{3,2}\, \Theta^2_{1,1} - \Theta_{0,1}\, \Theta_{2,1}\, \Theta^2_{2,2} \right\}$$

e poi:

$$\Theta_{0,4}\ ;\ \Theta_{1,4}\ ;\ \Theta_{-1,4}\ ;\ \Theta_{2,4}\ ;\ \Theta_{2,-4}\ ;\ \Theta_{-2,4}\ ;\ \Theta_{3,4}$$

$$\Theta_{4,0}\ ;\ \Theta_{4,1}\ ;\ \Theta_{4,2}\ \ \Theta_{4,3}\ ;\ \Theta_{4,4}$$

$$\Theta_{0,5}\ ;\ \Theta_{1,5}\ ;\ \Theta_{-1,5}\ ;\ \Theta_{2,5}\ \ \Theta_{2,-5}\ ;\ \Theta_{-2,5}\ ;\ \Theta_{3,5}\ ;\ \Theta_{4,5}$$

$$\Theta_{5,0}\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ \Theta_{5,5}$$

cioè in generale, dopo $\Theta_{h-1\ ,\ h-1}$ si calcoleranno successivamente le funzioni

$$\Theta_{0,h}\ ;\ \Theta_{1,h}\ ;\ \Theta_{-1,h}\ ;\ \Theta_{2,h}\ ;\ \Theta_{2,-h}\ ;\ \Theta_{-2,h}$$

$$\Theta_{3,h}\ ;\ \Theta_{4,h}\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ \Theta_{h-1,h}$$

$$\Theta_{h,0}\ ;\ \Theta_{h,1}\ ;\ \ldots\ldots\ ;\ \Theta_{h,h}.$$

In questo modo è evidente che si ottengono tutte le funzioni $\Theta_{m,n}$ con indici positivi dalle quali mediante le (21) e (22) otterremo tutte le altre.

		ERRORI	CORREZIONI
pag. 4	linea 16	quadrativa	quadratica
» 6	» 13	$\Theta_\varepsilon(z)=\varepsilon y^{\frac{N-1}{2}}+a_1 y^{\frac{N-3}{2}}+\dots+a\,\frac{N-1}{2}$	$\Theta_\varepsilon(z)=\varepsilon y^{\frac{N-1}{2}}+a_1 y^{\frac{N-3}{2}}+\dots+a_{\frac{N-1}{2}}$
» 9	» 13	quando ε un numero intero	quando ε è un numero intero
« 10	» 4	$b'=0$	$b=0$
» 10	» 14	$b\tau^2+(a-d)\tau-c=0$;	(2) $b\tau^2+(a-d)\tau-c=0$;
» 15	» 11	$\frac{1}{m}\frac{d\,\Phi(pz)}{d\,p(z)}\,p'(z)$	$\frac{1}{m}\frac{d\,\Phi(p(z))}{d\,(pz)}\,p'(z)$
» 15	» 14	$p\left\{(m+n\varepsilon_1 z)\right\}$	$p\left\{(m+n\varepsilon_1)z\right\}$
» 17	» 1	$p\left(z\,\middle\|\,\frac{\omega}{\varepsilon},\frac{\omega'}{0}\right)$	$p\left(z\,\middle\|\,\frac{\omega}{\varepsilon},\frac{\omega'}{\varepsilon}\right)$
» 20	» 20	functionen.	Functionen
» 24	» 12	$z\,2^{N-1}$	$z^{2(N-1)}$
» 40	» 16	*razionalc*	*razionale*