ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

FRANÇOIS CHARLOT
DJENAT MERAD

Sur les méthodes de processus ponctuels et de renouvellement dans des systèmes de files d'attente. II- Convergence en loi dans les systèmes de files d'attente

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 93, série *Probabilités et applications*, nº 8 (1989), p. 49-62
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1989__93_8_49_0>

SUR LES METHODES DE PROCESSUS PONCTUELS ET DE RENOUVELLEMENT DANS DES SYSTEMES DE FILES D'ATTENTE

II - CONVERGENCE EN LOI DANS LES SYSTEMES DE FILES D'ATTENTE

François CHARLOT - Djenat MERAD

SUMMARY

This paper is a follow-up to CCG. We propose a systematic approach to weak convergence in queueing systems, using point processes techniques. The basic tool is a paper due to M.DELLASNERIE (De) whose results are extended to marked point processes.

INTRODUCTION

Cet article est la suite de CCG dont nous reprenons les notations. L'article de base pour l'étude de la convergence en loi de la charge du serveur et du nombre de clients à l'instant t, quand t tend vers l'infini, dans les GI/GI/1,reste celui de L.Tackacs (Ta, Co), qui s'appuie sur le théorème de renouvellement. Pour les files à plusieurs serveurs une approche est proposée dans D.R.MILLER et F.D.SENTILLES (MS). Nous proposons ici une approche systématique de ce problème par l'utilisation des processus ponctuels stationnaires et de la mesure de Palm et nous l'appliquons à plusieurs systèmes de files d'attente. La méthode s'appuie sur un article de M.DELLASNERIE (De) qui peut être regardé comme une extension du théorème classique de renouvellement. Ce résultat de M.DELLASNERIE est étendu aux processus ponctuels marqués grace à une amélioration d'un théorème sur la convergence en loi des processus ponctuels et les fonctionnelles de Laplace de ces processus (Ne). La méthode utilisée s'appuie aussi, bien entendu, sur des phénomènes "régénératifs" dans les files d'attente étudiées.

1)Convergence "vague-étroite" de mesures aléatoires marquées.

Dans ce paragraphe E et F sont deux espaces métriques complets séparables et locallement compacts, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ leur tribu borélienne. Pour nos applications, E = $\mathbb{R}$.

Définition 11

Une mesure μ *"marquée sur* E *à marques dans* F*" est une mesure positive sur* $(E\times F, \mathcal{E}\otimes\mathcal{F})$ *telle que pour tout compact* K *de* E*,* $\mu(K\times F) < \infty$.

On notera M(E;F) *(ou* M *quand il n'y aura pas d'ambiguité) les mesures marquées sur* E *à marques dans* F.

L'exemple typique sera ici

$\mu = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{t_n}\otimes\varepsilon_{x_n}$ où ε_u est la mesure de Dirac en u, $(t_n, n\in\mathbb{Z})$ une suite de points de E sans points d'accumulation et $(x_n, n\in\mathbb{Z})$ une suite de points de F. On notera $M_p(E;F)$ l'ensemble de ces mesures ponctuelles marquées, ou M_p quand il n'y aura pas d'ambiguité.

On remarque que, bien sur, si $\mu\in M$, l'application $A \dashrightarrow \mu(A\times F)$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}_+$ est une mesure de Radon et pour tout K compact de E, l'application $B \dashrightarrow \mu(K\times B)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}_+$ est une mesure bornée.

$M(E;F)$ est muni de la tribu $\mathcal{M}(E;F)$ (ou $\mathcal{M}$ quand il n'y aura pas d'ambiguité) qui est la plus petite tribu rendant mesurable toutes les applications de M dans $\mathbb{R}_+$ $\mu \dashrightarrow \mu(f)$ où f est une fonction mesurable positive sur $E\times F$.

$C(E;F)$ (C quand il n'y aura pas d'ambiguité) est l'ensemble des fonctions sur $E\times F$ à valeurs réelles continues bornées et à support compact par rapport à la première coordonnée. C'est-à-dire que $f\in C$ si f est continue et bornée sur $E\times F$ et si il existe un compact K de E tel que si $x\in E\setminus K$ et $y\in F$ alors $f(x,y) = 0$.

$\mathcal{M}$ est aussi la plus petite tribu sur M rendant mesurable les applications $\mu \dashrightarrow \mu(f)$ où $f\in C$.

On remarque que $M_p\in\mathcal{M}$ et on note $\mathcal{M}_p(E;F)$ (où $\mathcal{M}_p$ quand il n'y a pas d'ambiguité) la tribu trace de $\mathcal{M}$ sur M_p.

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un espace de probabilité. Une mesure aléatoire marquée est une variable aléatoire N de $(\Omega,\mathcal{A})$ à valeurs dans $(M,\mathcal{M})$. Si N est $\mathbb{P}$-p.s. à valeurs dans M_p, N sera un processus ponctuel marqué sur E à marques dans F. On notera $\mathbb{P}_N$ la loi de N. C'est une probabilité sur $(M,\mathcal{M})$, où sur $(M_p,\mathcal{M}_p)$ si N est un processus ponctuel marqué. On note $\mathcal{A}_N$ la sous tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par N.

M peut bien sur être muni de la topologie de la convergence vague. Nous définissons ici sur M une topologie plus fine.

Définition 12

On appelle "Topologie Vague-Etroite" sur M *la topologie la moins fine rendant continue les applications de* M *dans* $\mathbb{R}$*,* $\mu \dashrightarrow \mu(f)$ *où* $f \in C$.

On écrira alors $\lim_n \mu_n = \mu$ ve., *ou* $\mu_n \xrightarrow{ve.} \mu$*, si pour toute fonction* f *de* C, $\lim_n \mu_n(f) = \mu(f)$.

Il est facile de voir (confere Bil) qu'il suffit d'avoir la convergence pour les fonctions f de C uniformément continues.

Lemme 13

La convergence vague-étroite sur M *est métrisable et séparable.*

L'intéret de la convergence vague-étroite par rapport à la convergence vague est mis en évidence dans ce qui suit.

Soit $E = \mathbb{R}$, $\mu = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{t_n} \otimes \varepsilon_{x_n}$ et $\mu_k = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{t_n(k)} \otimes \varepsilon_{x_n(k)}$ ou $(t_n, n\in\mathbb{Z})$ et, pour tout k de $\mathbb{N}$, $(t_n(k), n\in\mathbb{Z})$ sont des suites strictement croissantes telles que $t_0 \le 0$, $t_1 > 0$ et $t_0(k) \le 0$, $t_1(k) > 0$.

Lemme 14

Supposons que $t_0 < 0$. *Alors* $\mu_k \xrightarrow{ve.} \mu$ *si et seulement si pour* *tout* n *de* $\mathbb{Z}$ *la suite* $(t_n(k),k\in\mathbb{N})$ *converge vers* t_n *et la suite* $(x_n(k),k\in\mathbb{N})$ *converge vers* x_n *quand* k *tend vers l'infini.*

La démonstration de ce résultat est facile. Remarquons que ce résultat est faux lorsqu'on remplace la convergence vague-étroite par la convergence vague. En effet, soit μ_k définie par:

- pour $n\geq1$, $t_n(k) = t_n$ et $x_n(k) = x_n$;
- pour $n\leq-1$, $t_n(k) = t_{n+1}$ et $x_n(k) = x_{n+1}$
- $t_0(k) = -1/k$ et $\lim_k x_0(k) = \infty$.

On peut supposer par exemple que $t_0<-1$. Il est clair alors que μ_k converge vaguement vers μ et ne converge pas vaguement-étroitement, et il est évident pour $(\mu_k,k\in\mathbb{N})$ que la conclusion du lemme 12 est fausse.

Le lemme suivant donne le rapport entre la convergence vague et la convergence vague-étroite. Sa démonstration se calque sur des démonstrations classiques de convergence en loi. On notera ici $\mu_k \xrightarrow{v} \mu$ pour dire que la suite $(\mu_k,k\in\mathbb{N})$ converge vaguement vers μ quand k tend vers $+\infty$ et $C_K(E\times F)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact définies sur $E\times F$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

<u>Lemme</u> <u>15</u>

Soit $(\mu_k,k\in\mathbb{N})$ *et* μ *des éléments de* M. $\mu_k \xrightarrow{ve.} \mu$ *si et seulement si:*

a-$\mu_k \xrightarrow{v} \mu$

b-pour tout $f\in C_K(E)$ $\mu_k(f\otimes 1_F) \xrightarrow[k\to\infty]{} \mu(f\otimes 1_F)$ *et il suffit* de *choisir* f *dans une famille dénombrable de fonctions* $(f_p,p\in\mathbb{N})$

de $C_K(E)$ *telles que* $f_p(x) = 1$ *pour* $x \in L_p$, $(L_p, p \in \mathbb{N})$ *étant une suite croissante de compacts de* E *telle que* $\bigcup_p L_p = E$.

Le théorème fondamental de ce paragraphe est le suivant.

<u>Théorème</u> <u>16</u>

Soit $(P_k, k \in \mathbb{N})$ *et* P *des probabilités sur* $(M(E;F), \mathcal{M}(E;F))$. *Si:*

$$\forall f \in C(E;F), f \geq 0, \quad \lim_k \int_M P_k(d\mu)\exp(-\mu(f)) = \int_M P(d\mu)\exp(-\mu(f))$$

alors, quand k *tend vers* $+\infty$, P_k *converge étroitement vers* P *lorsque* M(E;F) *est muni de la topologie de la convergence vague-étroite.*

La démonstration utilise deux résultats fondamentaux. Le premier est le cas particulier du théorème lorsque F est réduit à un point, le second un théorème de Prohorov.

<u>Théorème</u> <u>A</u> (Ne page 282)

Soit $(P_k, k \in \mathbb{N})$ *et* P *des probabilités sur* $(M(E), \mathcal{M}(E))$. *Si:*

$$\forall f \in C_K(E), f \geq 0, \quad \lim_k \int_M P_k(d\mu)\exp(-\mu(f)) = \int_M P(d\mu)\exp(-\mu(f))$$

alors P_k *converge étroitement vers* P *lorsque* M(E) *est muni de la topologie de la convergence vague.*

<u>Théorème</u> <u>B</u> (Po page 71)

Soit G *un espace métrisable et séparable,* $(P_k, k \in \mathbb{N})$ *et* P *des probabilités sur* G *telles que* P_k *converge étroitement vers* P. *Il existe alors un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *et des variables aléatoires* X_k *et* X *à valeurs dans* G, X_k *de loi* P_k

et X de loi P telles que X_k converge $\mathbb{P}$-p.s. vers X quand k tend vers l'infini.

Nous aurons besoin d'un lemme technique.

Lemme 17

Soient $(X_k, k\in\mathbb{N})$ et X des variables aléatoires positives sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si:

a- $\liminf_k X_k \geq X$ $\mathbb{P}$-p.s.

b- $\lim_k X_k = X$ *en Loi*

alors X_k converge vers X en probabilité.

Démonstration

Si on suppose de plus que X_k et X sont intégrables et que $\lim_k \mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(X)$, alors X_k converge vers X dans $\mathbb{L}^1$. En effet: $\mathbb{E}(|X_k-X|) = \mathbb{E}(X_k-X) + 2\mathbb{E}((X-X_k)_+)$, $(X-X_k)_+ \leq X$ et $\limsup_k (X-X_k)_+ \leq (X - \liminf_k X_k)_+ = 0$, d'où le résultat par le lemme de Fatou.

Soit maintenant U: $\mathbb{R}_+ \text{--->} \mathbb{R}_+$ une fonction strictement croissante continue et bornée. On a par hypothèse $\liminf_k U(X_k) \geq U(X)$. D'aprés ce qui précède $U(X_k)$ converge dans $\mathbb{L}^1$ vers U(X) et donc X_k converge vers X en probabilité.

Démonstration du Théorème 16

M(E;F) muni de la topologie de la convergence vague est un espace métrisable et séparable et P_k converge étroitement vers P pour cette topologie (Theoreme A).

D'aprés le Théorème B il existe un espace $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et des variables aléatoires $(X_k, k\in\mathbb{N})$ et X à valeurs dans M telles que X_k converge vers X $\mathbb{P}$-p.s. pour la topologie de la convergence vague, X_k étant de Loi P_k et X étant de Loi P.

Donc:

$$\exists\Omega'\in\mathcal{A},\ \mathbb{P}(\Omega')=1,\ \forall\omega\in\Omega',\ \forall f\in C_K(E\times F),\ \lim_k X_k(\omega)(f) = X(\omega)(f).$$

D'aprés l'hypothèse, pour tout $f\in C, f\geq 0$, $X_k(f)$ converge en Loi vers $X(f)$, puisque, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}_+$:

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda X_k(f)}) = \int P_k(d\mu)e^{-\mu(\lambda f)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \int P(d\mu)e^{-\mu(\lambda f)} = \mathbb{E}(e^{-\lambda X(f)}).$$

Si $f\in C, f\geq 0$ et si $g\in C_K(E\times F), 0\leq g\leq f$, on a:

$$X(g) = \lim_k X_k(g) \leq \liminf_k X_k(f).$$

et donc:

$$X(f) \leq \liminf_k X_k(f)$$

D'aprés le lemme 15, $X_k(f)$ converge donc en probabilité vers $X(f)$. On peut, par le procédé diagonal, choisir une suite d'entiers $(n_j, j\in\mathbb{N})$ telle que, il existe $\Omega''\in\mathcal{A}$, $\mathbb{P}(\Omega'') = 1$ quelque soit la fontion f_p comme dans le lemme 13: $\forall\omega\in\Omega''$, $\forall p\in\mathbb{N}$, $X_{n_j}(\omega)(f_p\otimes 1_F)\longrightarrow X(\omega)(f_p\otimes 1_F)$ quand j tend vers l'infini et donc, d'aprés le lemme 13: $\forall f\in C$, $f\geq 0$, $X_{n_j}(\omega)(f)\longrightarrow X(\omega)(f)$ quand j tend vers l'infini.

De toute suite d'entiers, on peut donc extraire une sous-suite possédant cette dernière propriété. Donc si F: $M\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue bornée pour la convergence vague-étroite, de toute sous-suite de $\mathbb{E}(F(X_k))$ on peut extraire une sous-suite convergent vers $\mathbb{E}(F(X))$ et donc $\lim_k \mathbb{E}(F(X_k)) = \mathbb{E}(F(X))$, ce qui signifie exactement que P_k converge quand k tend vers l'infini étroitement vers P lorsque M est muni de la topologie de la convergence vague-étroite. ∎

2)Mesures et processus ponctuels sur $\mathbb{R}$ marqués stationnaires.

Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ où $\Theta = (\theta_t, t\in\mathbb{R})$ est un flot réel stationnaire et N une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}$ à marques dans F et stationnaire, c'est-à-dire que N est une variable aléatoire de $(\Omega,\mathcal{A})$ à valeurs dans $(M(\mathbb{R};F),\mathcal{M}(\mathbb{R};F))$ telle que:

$$\forall\omega\in\Omega,\ \forall B\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\ \forall C\in\mathcal{F},\ \forall t\in\mathbb{R},\ N(\theta_t\omega, BxC) = N(\omega,(B+t)xC)$$

N est du premier ordre si sa mesure de Palm $\hat{P}$ est une mesure bornée: $\hat{P}(\hat{\Omega}) < \infty$. N est du second ordre si $N(.,f)\in\mathbb{L}^2(\mathbb{P})$ pour toute fonction $f\in C(\mathbb{R};F)$. La mesure positive σ sur $\mathbb{R}xF$ associée à N par:

$$\sigma(BxC) = \int N(\omega,BxC)\hat{P}(d\omega)$$

appartient à M si et seulement si N est du second ordre et on a de plus: pour tout compact K de $\mathbb{R}$

$$\sup\{\sigma((t+K)xF), t\in\mathbb{R}\} < \infty$$

(confere Ne). Rappellons que si N est du premier ordre, on note $\hat{\mathbb{P}}$ la probabilité sur $(\Omega,\mathcal{A})$ définie par: $\hat{\mathbb{P}} = \hat{P}/\hat{P}(\Omega)$ et que on note $(\tau_t, t\in\mathbb{R})$ le flot sur $(M,\mathcal{M})$ défini par $\tau_t(\mu)(f) = \mu(f(.-t,.))$ pour tout f de C.

Théorème 21

Soit N une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}$ à marques dans F stationnaire du second ordre sur un flot stationnaire réel $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$, $\hat{\mathbb{P}}$ sa probabilité de Palm, $\mathbb{P}_N$ et $\hat{\mathbb{P}}_N$ la loi de N respectivement sous $\mathbb{P}$ et sous $\hat{\mathbb{P}}$. Si $(\mathbb{P},\Theta)$ est mélangeant alors, $\tau_t(\hat{\mathbb{P}}_N)$ converge étroitement vers $\mathbb{P}_N$ quand t tend vers $\pm\infty$, M étant muni de la topologie vague-étroite.

La démonstration du théorème est mot pour mot celle de Dellasnerie

(De) pour le cas des mesures non marquées, compte tenu du théorème 14. L'ennoncé signifie donc que pour toute fonction F bornée et continue en $\mathbb{P}_N$ presque tout point de M (par rapport à la topologie de la convergence vague-étroite)

$$\int_\Omega F(N(\theta_t\omega))\hat{\mathbb{P}}(d\omega) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \int_\Omega F(N(\omega))\mathbb{P}(d\omega).$$

3)Convergence en Loi dans quelques systèmes de Files d'attente.

Les notations seront celles de (CCG). Nous commencons par le cas typique des Files G/G/1. On suppose bien sur que nous somme sous l'hypothèse de stabilité. Soit alors le processus ponctuel marqué à marques dans $F = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$:

$$N' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{T_n} \otimes \varepsilon_{(B_n, \hat{W}_n, \hat{Q}_n)}$$

où nous écrivons $\hat{Q}_n$ pour $Q(T_n)$. On a:

$$W(0) = (\hat{W}_0 + T_0)_+ = \Phi(N')$$

$$Q(0) = \hat{Q}_0 + 1 - \sum_{n\leq 0} 1_{\{T_n + \hat{W}_n + B_n \in [T_0, 0[\}} = \Psi(N')$$

où Φ et Ψ sont des fonctions définies sur $M(\mathbb{R};F)$ qui sont $\mathbb{P}_{N'}$-p.s. continues par rapport à la topologie de la convergence vague-étroite, d'aprés le lemme 12 et puisque $W(0)$ est continue par rapport à T_0 et $\hat{W}_0$ et $Q(0)$ est $\mathbb{P}$-p.s.continue par rapport à $\hat{Q}_0$, aux T_n, $\hat{W}_n$, B_n, pour $n\leq 0$ (mais il n'y a presque surement qu'un nombre fini de T_n qui rentrent dans l'expression de $Q(0)$) puisque presque surement $T_n+\hat{W}_n+B_n$ est différent de T_0. On a alors:

Théorème 31

Si le flot $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \Theta)$ est mélangeant, et si $\hat{\mathbb{E}}(A) < \hat{\mathbb{E}}(B)$, alors pour tout $w\in\mathbb{R}_+$ et tout $k\in\mathbb{N}$, la loi de $(W^w(t), Q^{w,k}(t))$ sous $\hat{\mathbb{P}}$

converge vers la loi de $(W(0),Q(0))$ *sous* $\mathbb{P}$.

Démonstration.

D'aprés ce qui précède $\exp(-\alpha W(0)-\beta Q(0))$, pour $\alpha\geq 0$ et $\beta\geq 0$, s'exprime comme une fonction $\mathbb{P}_N$, p.s.-surement continue et bornée sur $M(\mathbb{R};F)$, et donc, d'aprés le théorème 21:

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^2 \quad \lim_t \hat{\mathbb{E}}(\exp(-\alpha W(t)-\beta Q(t)) = \lim_t \hat{\mathbb{E}}(\exp(-\alpha W(0)-\beta Q(0))o\theta_t) = \mathbb{E}(\exp(-\alpha W(0)-\beta Q(0))$$

Mais d'aprés la propriété de PBACS pour tout $w\in\mathbb{R}_+$ et tout $k\in\mathbb{N}$, il existe un instant S $\hat{\mathbb{P}}$ p.s.-fini tel que, pour tout $t\geq S$,

$$W^w(t) = W(t) \text{ et } Q^{w,k}(t) = Q(t).$$

Le résultat ennoncé s'en déduit alors immédiatement. ∎

Pour les autres systèmes de files d'attente examinés en CCG les démonstrations sont identiques. Nous l'écrivons d'abord pour des tandems de files à plusieurs serveurs en suivant les notations de CCG 6A et 6B. Notons, pour un système de p services à plusieurs serveurs en tandems,

$$W(t) = ({}^1W(t),{}^2W(t),\dots,{}^pW(t))$$
$$W^s(t) = ({}^1W^{s^1}(t),{}^2W^{s^1s^2}(t),\dots,{}^pW^{s^1..s^p}(t))$$
$$Q(t) = ({}^1Q(t),{}^2Q(t),\dots,{}^pQ(t))$$
$$Q^{s,k}(t) = ({}^1Q^{s^1k^1}(t),{}^2Q^{s^1s^2,k^2}(t),\dots,{}^pQ^{s^1s^2..s^p,k^p}(t))$$

où $s = (s^1,s^2,\dots,s^p) \in \prod_{i=1}^{i=p} S_i$, $k = (k^1,k^2,\dots,k^p) \in \mathbb{N}^p$

les vecteurs de charges et le vecteur nombre de clients par services respectivement stationnaires et en régime transitoire. Notons ici

$$\hat{W}_n = ({}^1W(T_n),{}^2W(S_n^1),\dots,{}^pW(S_n^{p-1}))$$

où S_n^i, $1\le i\le p-1$, est l'instant de sorti du i-ème service du client arrivé à l'instant T_n dans le système. En particulier:

$$S_n^1 = T_n+{}^1W(T_n)+B_n^1$$

et de même,

$$\hat{Q}_n = ({}^1Q(T_n),{}^2Q(S_n^1),\dots,{}^pQ(S_n^{p-1})).$$

Comme précédemment, soit $N' = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{T_n}\otimes\varepsilon_{Y_n}$ où $Y_n = (B_n^1,\dots,B_n^p,\hat{W}_n,\hat{Q}_n)$, est un processus ponctuel marqué. On a

$${}^1W(0) = R({}^1\hat{W}_0 + B_0^1.\bar{e} + T_0.\bar{1})_+$$

$${}^1Q(0) = {}^1\hat{Q}_0 + 1 - \sum_{n\le 0}1_{[T_0,0[}(T_n+{}^1\hat{W}_n^1+B_n^1)$$

et donc, comme précédemment, $({}^1W(0),{}^1Q(0))$ est $\mathbb{P}$-p.s. surement continu par rapport aux T_n et aux Y_n, donc par rapport à N' lorsque l'espace canonique du processus N' est muni de la convergence vague-étroite. L'application:

$$N'\text{--->}N'' = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varepsilon_{S_n^1} \otimes \varepsilon_{(B_n^2,{}^2\hat{W}_n,{}^2\hat{Q}_n)}$$

est $\mathbb{P}$-p.s. surement continue lorsque les espaces canoniques de N' et N" sont munis de la convergence vague-étroite. Comme $({}^2W(0),{}^2Q(0))$ est défini sur N" comme $({}^1W(0),{}^1Q(0))$ sur N', on voit alors, en recommençant le raisonnement p-fois que $(W(0),Q(0))$ est $\mathbb{P}$-p.s. continu par rapport à N'. On a donc, comme plus haut, en notant:

$$(W,Q) = ((W^s(t),Q^{s,k}(t)),t\ge 0,s\in \prod_{i=1}^{i=p} S_i,k\in\mathbb{N}^p)$$

Théorème 32

Si $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ *est un flot mélangeant, si le processus* (W,Q) *est un PBACS, et si pour tout i,* $1\le i\le p$, $\hat{\mathbb{E}}(B^i) < q_i\hat{\mathbb{E}}(A_i)$, *alors la loi de* $(W^s(t),Q^{s,k}(t))$ *sous* $\hat{\mathbb{P}}$ *converge vers la loi de* $(W(0),Q(0))$ *sous* $\mathbb{P}$.

On procèderait de la même façon dans le cas des files avec impatience (CCG 7) ou des files à une infinité de serveurs. Dans le cas des files à un serveur et à plusieurs classes de clients (notations et hypothèses de stabilité dans CCG 5C), remarquons que l'application $M \dashrightarrow (M_1,..,M_p)$ de $M_p(\mathbb{R};F)$ dans $M_p(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)^p$ est bijective et bicontinue lorsque les espaces sont munis de la convergence vague-étroite. Par ailleurs W^1, W^1+W^2 ,..., $W^1+..+W^p$, sont donnés par des équations de type G/G/1 où interviennent les processus ponctuels marqués M_1, M_1+M_2,..., $M_1+..+M_p$. On a alors comme précédemment:

Théorème 33

Si $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P},\Theta)$ est mélangeant et si $\sum_{l=1}^{l=p} i_l < 1$, où $i_l = \hat{\mathbb{E}}(B_l)/\hat{\mathbb{E}}(A)$, alors la loi de $(W^w(t),Q^{w,k}(t))$ par rapport à $\hat{\mathbb{P}}$, où $w \in \mathbb{R}_+^p$ et $k \in \mathbb{N}^p$, converge vers la loi de $(W^1(0),..,W^p(0),Q^1(0),..,Q^p(0))$ par rapport à $\mathbb{P}$.

BIBLIOGRAPHIE

Bi: BILLINGSLEY .: Convergence of probability measure. Willey. (1968).

CCG: CHARLOT F., CHOUAF B., GUELLIL A.: Sur les méthodes de processus ponctuels et de renouvellement dans les systèmes de files d'attente. I Sur la stabilité et la récurrence des Chaines de Markov et des systèmes de files d'attente.

CM2: CHARLOT F. et MERAD D.: Sur les métodes de processus ponctuels et de renouvellement dans les systèmes de files d'attente. II Processus ponctuels périodiques et systèmes périodiques de files d'attente.

Co: COHEN J.W.: On regenerative processes in queueing theory. Lec. Notes in Econo. and Math. Systems 121. Springer.

De: DELASNERIE M.: Flots mélangeant et mesure de Palm. Ann. Inst. Henri Poincarré, Vol XIII, 4, 357-369, (1977).

Me: MERAD D.: Convergence en loi des processus ponctuels marqués. Application aux files d'attente stationnaires et aux files d'attente périodiquement stationnaires.
Thèse de Magister, USTHB, Alger, 1988.

MS: MILLER D.R. et SENTILLES F.D.: Translated renewal processes and the existence of limiting distribution for the queue length of the GI/G/s queue. The Annal of Proba. Vol 3, 3, 424-439, (1975).

Ne: NEVEU J. Processus Ponctuels. Ecole d'été de St.Flour VI. Lecture Notes in Maths 598, Springer-Verlag, (1977).

Po: POLLARD .: Convergence of stochastic processes
Springer-Verlag (1984).

Ta: TAKACS L.: The limiting distribution of the virtual waiting time and the queue size for a single server queue.
Sankhya A, 25, 91-100.

François CHARLOT

Laboratoire de Calcul des
Probabilités et Statistique
Université de Rouen
B.P. 118

76134 MONT SAINT AIGNAN CEDEX
France

Djenat MERAD

Département de Probabilités
Institut de Mathématiques
USTHB

16112 BAB-EZZOUAR
Algérie