

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

D. FLIPO

**Charge stationnaire d'une file d'attente à rejet. Application
au cas indépendant**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 92, série *Probabilités
et applications*, n° 7 (1988), p. 47-74

http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1988__92_7_47_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CHARGE STATIONNAIRE D'UNE FILE D'ATTENTE A REJET

APPLICATION AU CAS INDEPENDANT

D. FLIPO

Title : Stationary load of the single server loss system.
Application to the GI|GI|1|0 system.

Abstract : A formal approach to single server loss systems GI|GI|1|0 is given (sect. 2 and 3) : the stationary load of the server is constructed on an extension $\tilde{\Omega}$ of the initial probability space Ω .

The second part deals with the GI|GI|1|0 systems. Results are stated in section 4 : a very simple necessary and sufficient condition is given for the extension space $\tilde{\Omega}$ to be isomorphic to Ω . Under this condition, in fact almost always fulfilled, the load equation has a unique solution on Ω itself. The proofs are given in sections 5 and 6.

Keywords : Loss system , stationary load , extension .

Résumé : La première partie de ce travail (sections 2 et 3) est consacrée à la construction et à l'étude d'un espace de probabilité $\tilde{\Omega}$ sur lequel la charge stationnaire du serveur d'une file GI|GI|1|0 peut être définie de manière unique. La seconde partie (sections 4 à 6) concerne l'application au cas GI|GI|1|0. Une condition nécessaire et suffisante très simple d'existence et d'unicité de la charge stationnaire sur l'espace de probabilité initial est donnée.

1. INTRODUCTION

On étudie la charge stationnaire Γ du serveur, aux instants d'arrivée de clients, d'une file d'attente $G|G|1|0$ (file où tout client trouvant à son arrivée le serveur occupé renonce au service et s'en va immédiatement). Comme la charge stationnaire ne peut pas, en général être construite sur l'espace Ω des mesures ponctuelles chargeant l'origine (espace de Palm), on construit à la section 2 une extension $\tilde{\Omega}$ de cet espace, minimale en un certain sens, sur laquelle l'équation de la charge a une solution unique. Cette extension est isomorphe à celle donnée par Neveu [4].

Les travaux précédents traitant des files à rejet étudient soit les lois stationnaires de Γ (Borovkov [1], Lisek [3]), soit, ce qui revient au même, la limite quand $n \rightarrow \infty$ des lois conditionnelles de la charge Γ_n à la n -ième arrivée connaissant la charge Γ_0 à l'instant 0 (Joffe et Ney [2]). La méthode employée ici, qui reprend les idées de Lisek [3] et Neveu [4], permet de construire la v.a. charge et plus seulement sa loi. La section 3 est consacrée à des résultats nouveaux sur la taille de l'extension $\tilde{\Omega}$, l'ergodicité de $\tilde{\Omega}$ (proposition 3.1) et sur la structure des solutions ergodiques de l'équation régissant la charge stationnaire (proposition 3.2) : on établit que toute extension ergodique de Ω permettant de construire la charge stationnaire se projette sur une composante ergodique de $\tilde{\Omega}$.

Dans la seconde partie on étudie ce que devient cette extension dans le cas indépendant $GI|GI|1|0$. Les résultats sont énoncés à la section 4, les démonstrations sont données aux sections 5 et 6. La proposition 4.1, qui constitue le résultat principal de ce travail, énonce une condition nécessaire et suffisante très simple pour que $\tilde{\Omega}$ soit isomorphe à Ω ; sous cette condition, d'ailleurs presque toujours réalisée (cf. la remarque qui suit le lemme 4.2), la v.a. Γ existe sur Ω lui-même et est unique, et il y a convergence des lois conditionnelles de Γ_n sachant Γ_0 vers la loi de Γ . On retrouvera au cours des démonstrations les résultats partiels obtenus par Borovkov [1] (Théorème 4 p. 211) et Joffe et Ney [2] (théorème 2) sur l'existence d'une loi stationnaire pour Γ .

2. CONSTRUCTION DE L'EXTENSION

Soient σ et τ deux v.a.r. strictement positives intégrables sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) muni d'un automorphisme θ bi-mesurable préservant P et ergodique. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la suite des instants d'arrivée définie par $T_0 = 0$, $T_{n+1} = T_n + \tau \circ \theta^n$, ($n \in \mathbb{Z}$), et $N = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \epsilon_{T_n}$ le processus ponctuel des arrivées (description de Palm).

Le service demandé par le client arrivant à l'instant T_n est $\sigma \circ \theta^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) si le serveur est libre et 0 sinon.

La charge stationnaire du serveur, si elle existe sur Ω , doit vérifier l'équation :

$$(2.1) \quad \Gamma \circ \theta = (\Gamma + \sigma \cdot 1_{\Gamma=0} - \tau)^+$$

équation qui peut avoir selon les cas 0, 1, ou plusieurs solutions. Nous chercherons donc à construire une extension $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P}, \tilde{\theta})$ de $(\Omega, \mathcal{A}, P, \theta)$, où $\tilde{\Omega}$ est une partie de $\Omega \times \mathbb{N}$, sur laquelle l'équation

$$(2.2) \quad \tilde{\Gamma} \circ \tilde{\theta}(\tilde{\omega}) = (\tilde{\Gamma}(\tilde{\omega}) + \sigma(\omega) \cdot 1_{\tilde{\Gamma}(\tilde{\omega})=0} - \tau(\omega))^+$$

a une solution et une seule.

La v.a. ν de la définition suivante joue un rôle crucial dans la suite :

Définition 2.1. Soit ν la v.a. entière > 0 définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) par

$$\nu(\omega) = \min (n > 0 \mid \sum_{k=0}^{n-1} \tau(\theta^k \omega) \geq \sigma(\omega))$$

et soit

$$d = \text{pgcd} (n > 0 \mid P(\nu=n) > 0)$$

ν est l'indice du premier client servi après le client 0 lorsque celui-ci a lui-même été servi.

Notons L l'application de $\Omega \times \mathbb{N}$ dans \mathbb{N} définie par :

$$L(\omega, i) = \begin{cases} i + 1 & \text{sur } (\nu \circ \theta^{-i} > i + 1) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et $(L^m(\omega))_{m \in \mathbb{N}^*}$ les applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définies par :

$$L^1(\omega) = L(\theta^{-1}\omega, \cdot) \quad \text{et} \quad L^{m+1}(\omega) = L^m(\omega) \circ L(\theta^{-m-1}\omega, \cdot) \quad \text{pour } m \geq 1,$$

et posons

$$H^m(\omega) = L^m(\omega, \mathbb{N}) .$$

Lemme 2.2. L'événement $\text{Lim sup}_n (\nu \circ \theta^{-n} > n)$ est P -négligeable et la suite $(H^m(\omega))_{m \geq 1}$ est pour presque tout ω une suite décroissante de parties finies non vides de \mathbb{N} , dont l'intersection $H(\omega)$ a un cardinal P -p.s. constant noté h .

Démonstration : Par définition de v on a :

$$\sum_{k=0}^{v-2} \tau \theta^k < \sigma \leq \sum_{k=0}^{v-1} \tau \theta^k$$

Intégrons la première inégalité :

$$\int_{\Omega} \sum_{k=1}^{\infty} \tau \theta^{k-1} 1_{v > k} dP < E(\sigma)$$

et utilisons l'invariance de P par θ :

$$(2.3) \int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{v\theta^{-k} > k} \right) \tau \theta^{-1} dP < E(\sigma)$$

Comme la v.a. $\tau \theta^{-1}$ est strictement positive, cette inégalité assure la convergence

presque sûre de la série $\sum_{k=1}^{\infty} 1_{v\theta^{-k} > k}$; la suite $1_{v\theta^{-k} > k}$ tend ^{donc} p.s. vers 0

et il existe une v.a. $K(\omega)$ finie presque sûrement telle que pour tout $k \geq K(\omega)$ $v\theta^{-k} \leq k$. Donc l'événement $\text{Lim sup}_n (v\theta^{-n} > n)$ est P -négligeable.

L'ensemble

$$H^1(\omega) = L(\theta^{-1}\omega, \mathbb{N}) = \{0\} \cup \{n > 0 \mid v\theta^{-n} > n\}$$

est donc pour presque tout ω une partie finie non vide de \mathbb{N} . L'égalité

$$L^{m+1}(\omega) = L^m(\omega) \circ L(\theta^{-m}\omega^{-1}, \cdot)$$

assure que $H^{m+1}(\omega)$ est inclus dans $H^m(\omega)$, ainsi tous les $H^m(\omega)$ ($m \geq 1$) sont presque sûrement des parties finies, évidemment non vides, de \mathbb{N} . Pour presque tout ω , la suite $(H^m(\omega))$ devient constante à partir d'un certain rang (dépendant de ω) et la limite décroissante $H(\omega)$ des $H^m(\omega)$ est donc p.s. non vide. Notons $h^m(\omega)$ et $h(\omega)$ respectivement les cardinaux des ensembles $H^m(\omega)$ et $H(\omega)$. En remarquant que

$$L^{m+1}(\theta\omega) = L(\omega, \cdot) \circ L^m(\omega)$$

on a $h^{m+1}(\theta\omega) \leq h^m(\omega)$ et en passant à la limite en m $h\theta \leq h$ P -p.s. ; compte tenu de l'ergodicité de θ , h est P -p.s. constante.

Dans la suite nous considérerons l'extension suivante de Ω :

$$\tilde{\Omega} = \{(\omega, i) \in \Omega \times \mathbb{N} \mid i \in H(\omega)\}$$

$$\tilde{\theta}(\omega, i) = (\theta\omega, L(\omega, i))$$

$\tilde{\mathcal{A}}$ est la trace sur $\tilde{\Omega}$ de la tribu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})$ où $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est la tribu des parties de \mathbb{N} .

La mesure \tilde{P} sur $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ est définie par :

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \tilde{P}(A \times \{i\}) = \int_A 1_{i \in H(\omega)} dP(\omega)$$

(noter que \tilde{P} n'est pas une probabilité : $\tilde{P}(\tilde{\Omega}) = h$).

Vérifions que $\tilde{\theta}$ est un automorphisme ^{P} de $\tilde{\Omega}$: il suffit pour cela de prouver que pour presque tout ω l'application $L(\omega, \cdot) : H(\omega) \rightarrow H(\theta\omega)$ est une bijection ; or comme $L^{m+1}(\theta\omega) = L(\omega, \cdot) \circ L^m(\omega)$, $L(\omega, \cdot)$ est une surjection de $H^m(\omega)$ sur $H^{m+1}(\omega)$,

ensembles qui sont respectivement égaux à $H(\omega)$ et $H(\theta\omega)$ pour m assez grand, donc aussi une surjection de $H(\omega)$ sur $H(\theta\omega)$, et même une bijection puisque $H(\omega)$ et $H(\theta\omega)$ sont deux parties de \mathbb{N} qui ont même cardinal h .

L'invariance de \tilde{P} par $\tilde{\theta}$ est immédiate : en effet, pour toute fonction $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+$ on a :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Omega}} f \circ \tilde{\theta} \, d\tilde{P} &= \int_{\Omega} \sum_{i \in \mathbb{N}} f(\theta\omega, L(\omega, i)) \mathbb{1}_{i \in H(\omega)} \, dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j \in \mathbb{N}} f(\theta\omega, j) \mathbb{1}_{j \in H(\theta\omega)} \, dP(\omega) \quad \text{en posant } j = L(\omega, i) \\ &= \int_{\Omega} f \, d\tilde{P} \quad \text{car } \theta P = P. \end{aligned}$$

$\tilde{\theta}$ n'est pas nécessairement ergodique. Tout invariant \mathfrak{M} de $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$ est à un ensemble \tilde{P} négligeable près de la forme

$$(2.4) \quad \mathfrak{M} = \{(\omega, i) \in \tilde{\Omega} \mid i \in I(\omega)\}$$

où $I(\omega)$ vérifie

$$(2.5) \quad I(\theta\omega) = L(\omega, I(\omega)) \quad P\text{-p.s.}$$

En particulier, le cardinal de $I(\omega)$ est P -p.s. constant.

3. PROPRIETES DE L'EXTENSION $\tilde{\Omega}$

La proposition suivante donne un encadrement de h et une condition suffisante d'ergodicité de $\tilde{\theta}$.

Proposition 3.1. Soit r le plus petit entier supérieur ou égal à $E(\sigma)/E(\tau)$, et

$$(3.1) \quad r' = \inf \left\{ n > 0 \mid P \left(\bigcap_{m \geq n} (v\theta^{-m} \leq m) \right) > 0 \right\}$$

(r' est fini d'après le lemme 2.2) . Alors

$$(3.2) \quad d \leq h \leq r \wedge r'$$

Si $h = d$ et si $(\Omega, \mathcal{A}, P, \theta^d)$ est ergodique, alors $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P}, \tilde{\theta})$ l'est aussi.

Démonstration : Démontrons d'abord que $h \leq r \wedge r'$. Posons $B_{r'} = \bigcap_{m \geq r'} (v\theta^{-m} \leq m)$,

par définition de r' $P(B_{r'}) > 0$, et comme :

$$(3.3) \quad H^1(\omega) = (k > 0 \mid v\theta^{-k} > k) \cup (0)$$

$H(\omega) \subset H^1(\omega) \subset (0, 1, 2, \dots, r'-1)$ p.s. sur $B_{r'}$, et donc $h \leq r'$.

D'autre part l'inégalité (2.3) peut s'écrire

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{v\theta^{-k} > k} \right) \tau\theta^{-1} dP < \int_{\Omega} \frac{E(\sigma)}{E(\tau)} \tau\theta^{-1} dP$$

Il existe donc un événement non négligeable A sur lequel

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1_{v\theta^{-k} > k} < \frac{E(\sigma)}{E(\tau)}$$

et comme le premier membre de cette inégalité est entier

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1_{v\theta^{-k} > k} \leq r-1 \quad \text{p.s. sur } A.$$

D'après (3.3)

$$\text{card } H(\omega) \leq \text{card } H^1(\omega) \leq r \quad \text{P-p.s. sur } A$$

et donc $h \leq r$.

Pour prouver que $h \geq d$ remarquons que $H^1(\omega)$ contient p.s. l'ensemble $(0, 1, \dots, d-1)$ car $v \geq d$ p.s. . De plus pour tout i de $H^1(\omega)$ $L(\omega, i) = i + 1$ sauf si $v\theta^{-i} = i + 1$, ce qui ne peut se produire que si $i + 1$ est congru à 0 modulo d , donc $L(\omega, i)$ est congru à $i + 1$ modulo d P-p.s. sur $(i \in H^1(\omega))$. Par conséquent, si $H^n(\omega)$ ($n \geq 1$) contient au moins un représentant de chaque classe d'entiers modulo d $H^{n+1}(\theta\omega)$ aussi. Par récurrence, pour tout $n \geq 1$ $H^n(\omega)$ contient P-p.s. au moins un représentant de chaque classe, et $\text{card } H^n(\omega) \geq d$ P-p.s., donc $h \geq d$.

Pour établir la seconde partie de la proposition 3.1 rappelons que toute partie $\tilde{\Theta}$ invariante de $\tilde{\Omega}$ est, à un ensemble \tilde{P} -négligeable de la forme

$$\tilde{A} = \{(\omega, i) \in \tilde{\Omega} \mid i \in I(\omega)\}$$

où $I(\omega)$ vérifie (2.5). Si $h = d = 1$, $\text{card } i(\omega)$ vaut 0 ou 1 P-p.s. et l'ergodicité de $\tilde{\Theta}$ est triviale. Si $d > 1$, notons \bar{j} l'ensemble des entiers congrus à j modulo d et posons pour $0 \leq j \leq d$:

$$A_j = (\omega \in \Omega \mid I(\omega) \cap \bar{j} \neq \emptyset)$$

Comme $\overline{L(\omega, i)} = \overline{i+1}$ P-p.s. sur $(i \in H(\omega))$, on déduit de l'égalité (2.5) que

$$\theta^{-1}(A_j) = A_{j-1} \quad \text{P-p.s. pour } 0 < j < d$$

$$\text{et } \theta^{-1}(A_0) = A_{d-1} \quad \text{P-p.s.}$$

Donc $\theta^{-d}(A_0) = A_0$ et $A_j = \theta^j(A_0)$ P-p.s. pour $0 < j < d$. θ^d étant ergodique :

-soit $P(A_0) = 0$ et pour tout j ($0 \leq j < d$) $P(A_j) = 0$, donc $I(\omega) = \emptyset$ P-p.s.

et $\tilde{P}(\tilde{A}) = 0$

-soit $P(A_0) = 1$ et pour tout j ($0 \leq j < d$) $P(A_j) = 1$, donc

$\text{card } I(\omega) \geq d = h$ P-p.s. et $\tilde{A} = \tilde{\Omega}$ \tilde{P} -p.s.

et l'ergodicité de $\tilde{\Theta}$ est ainsi établie.

Le problème de l'existence et de l'unicité des solutions de l'équation (2.2) est résolu par la proposition suivante, qui assure en plus que toute autre espace de probabilité permettant de construire la charge stationnaire du serveur se projette sur $\tilde{\Omega}$.

Proposition 3.2. La v.a. définie sur $\tilde{\Omega}$ par :

$$(3.4) \quad \begin{cases} \tilde{\Gamma}(\omega, i) = (\sigma \circ \theta^{-i} - \sum_{k=1}^i \tau \theta^{-k})^+ & \text{si } i \neq 0 \\ \tilde{\Gamma}(\omega, 0) = 0 \end{cases}$$

est solution de l'équation (2.2)

Soit $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ un espace de probabilité muni d'un automorphisme ergodique θ' , et une application mesurable ϕ de (Ω', \mathcal{A}') dans (Ω, \mathcal{A}) telle que :

$$\phi \circ \theta' = \theta \circ \phi \quad \text{et} \quad \phi(P') = P.$$

Alors, à toute solution Γ' non P'-p.s. infinie de l'équation :

$$(3.5) \quad \Gamma' \circ \theta' = (\Gamma' + \sigma \circ \phi \mathbb{1}_{\Gamma'=0} - \tau \circ \phi)^+$$

correspond une composante ergodique \tilde{I} de $\tilde{\Omega}$ et une application mesurable $\tilde{\phi}$ de Ω' dans \tilde{I} telle que :

$$\Gamma' = \tilde{\Gamma} \circ \tilde{\phi} \quad \tilde{\phi} \circ \theta' = \tilde{\theta} \circ \tilde{\phi} \quad \text{et} \quad \tilde{\phi}(P') = \frac{\tilde{P}}{\tilde{P}(\tilde{I})}$$

Démonstration : Vérifions que la v.a. définie en (3.4) est solution de (2.2) :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma} \circ \tilde{\theta}(\omega, i) &= \tilde{\Gamma}(\theta\omega, L(\omega, i)) \\ &= \begin{cases} (\sigma(\theta^{-i}\omega) - \sum_{k=0}^i \tau(\theta^{-k}\omega))^+ & \text{si } i \neq 0 \\ (\sigma(\omega) - \tau(\omega))^+ & \text{si } i = 0 \end{cases} \\ &= (\tilde{\Gamma}(\omega, i) + \sigma(\omega) \mathbb{1}_{\tilde{\Gamma}(\omega, i)=0} - \tau(\omega))^+ . \end{aligned}$$

Si l'événement θ' -invariant $(\Gamma' < \infty)$ n'est pas P'-négligeable, il est P'-presque certain en vertu de l'ergodicité de θ' . De plus l'événement $(\Gamma' = 0)$ ne peut être négligeable, sinon l'équation (3.5) s'écrirait $\Gamma' \circ \theta' = \Gamma' - \tau \circ \phi$ et impliquerait $\Gamma' \circ \theta' \leq \Gamma'$ donc Γ' P'-p.s. constante et τ P-p.s. nulle.

La v.a. $v'(\omega') = \inf (n \in \mathbb{N} \mid \Gamma' \circ \theta'^{-n}(\omega') = 0)$ est donc finie P'-p.s. et Γ' peut s'écrire en itérant (3.5) :

$$(3.6) \quad \Gamma'(\omega') = \left(\sigma \circ \theta^{-v'(\omega')}(\phi(\omega')) - \sum_{k=1}^{v'(\omega')} \tau \theta^{-k}(\phi(\omega')) \right)^+ \quad P'\text{-p.s.}$$

La v.a. v' vérifie l'équation :

$$(3.7) \quad v' \circ \theta'(\omega') = L(\phi(\omega'), v'(\omega')). \quad P'\text{-p.s.}$$

Or (3.7) implique que $v'(\omega')$ est dans $H^1(\phi(\omega'))$ P'-p.s. et que si $v'(\omega')$ est dans $H^n(\phi(\omega'))$ alors $v'(\theta'\omega')$ est dans $H^{n+1}(\phi(\theta'\omega'))$, donc par récurrence

$$v'(\omega') \in \bigcap_{n \geq 1} H^n(\phi(\omega')) = H(\phi(\omega')) \quad \text{P'-p.s.}$$

Soit $\tilde{\phi}$ l'application de Ω' dans $\tilde{\Omega}$ définie par $\tilde{\phi}(\omega') = (\phi(\omega'), v'(\omega'))$.

$\tilde{\phi}$ vérifie l'équation :

$$(3.8) \quad \tilde{\phi} \circ \theta' = \tilde{\theta} \circ \tilde{\phi}$$

Soient (I_1, I_2, \dots, I_k) , $(1 \leq k \leq h)$, les composantes ergodiques de $\tilde{\Omega}$. Pour tout j compris entre 1 et k $\tilde{\phi}^{-1}(I_j)$ est d'après (3.8) une partie θ' -invariante de Ω' ; étant donnée l'ergodicité de θ' , pour un indice j_0 et un seul, $\tilde{\phi}^{-1}(I_{j_0}) = \Omega'$ P'-p.s. tandis que pour tous les autres $\tilde{\phi}^{-1}(I_j) = \emptyset$ P'-p.s.. Posons $\tilde{I} = I_{j_0}$, de (3.6) et de la définition de $\tilde{\phi}$ on déduit que

$$\tilde{\Gamma}'(\omega') = \tilde{\Gamma}(\phi(\omega'), v(\omega')) = \tilde{\Gamma} \circ \tilde{\phi}(\omega').$$

Notons \tilde{P}' la probabilité image de P' par $\tilde{\phi}$ et montrons que $\tilde{P}' = \tilde{P}/\tilde{P}(\tilde{I})$.

Remarquons que pour tout A de \mathcal{A} :

$$\tilde{P}'(A \times \mathbb{N}) = P'(\tilde{\phi}^{-1}(A \times \mathbb{N})) = P'(\phi^{-1}(A)) = P(A)$$

la mesure \tilde{P}' est absolument continue par rapport à la mesure $P \otimes \lambda$ où λ désigne la mesure uniforme sur \mathbb{N} , et il existe donc une fonction positive, nulle en dehors de \tilde{I} , $\tilde{\mathcal{A}}$ -mesurable, telle que $\tilde{P}' = f \cdot P \otimes \lambda$. D'autre part, comme P' est θ' -invariante, d'après (3.8) \tilde{P}' est $\tilde{\theta}$ -invariante, et pour toute fonction g positive, $\tilde{\mathcal{A}}$ -mesurable :

$$\begin{aligned} \int g \, d\tilde{P}' &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g(\omega, i) f(\omega, i) \, dP(\omega) \\ &= \int g \circ \tilde{\theta} \, d\tilde{P}' = \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} g(\omega, i) f \circ \tilde{\theta}^{-1}(\omega, i) \, dP(\omega) \end{aligned}$$

donc f est $\tilde{\theta}$ -invariante, c'est à dire \tilde{P} -p.s. constante sur la composante ergodique \tilde{I} .

Corollaire 3.3. Il y a correspondance biunivoque entre les solutions de (2.1) sur Ω et les invariants $\tilde{\Gamma}$ de $\tilde{\Omega}$ de la forme :

$$(3.9) \quad \tilde{\Gamma} = \{(\omega, i) \in \tilde{\Omega} \mid i \in J(\omega)\} \quad \text{avec} \quad \text{card } J(\omega) = 1$$

Dans le cas où $h = 1$ (ce qui est en particulier réalisé si $r' = 1$ ou si $E(\sigma) \leq E(\tau)$ d'après la proposition 3.1) l'équation (2.1) admet une solution et une seule $\Gamma(\omega) = \tilde{\Gamma}(\omega, i(\omega))$ où $i(\omega)$ est l'unique élément de $H(\omega)$.

Démonstration : A tout invariant de $\tilde{\Omega}$ tel que $\text{card } J(\omega) = 1$ correspond évidemment une solution Γ de (2.1) : il suffit de poser $\Gamma(\omega) = \tilde{\Gamma}(\omega, i(\omega))$, où $i(\omega)$ est l'unique élément de $J(\omega)$.

Pour établir la réciproque, appliquons la proposition 3.2 à $\Omega' = \Omega$ et ϕ l'identité de Ω dans Ω . A toute solution Γ de (2.1) on associe la variable

$$v'(\omega) = \inf (n \geq 0 \mid \Gamma \circ \theta^{-n}(\omega) = 0)$$

et l'application $\tilde{\phi} : \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ définie par

$$\tilde{\phi}(\omega) = (\omega, v'(\omega)).$$

(3.8) s'écrit alors

$$\tilde{\phi} \circ \theta = \tilde{\theta} \circ \tilde{\phi}$$

et l'ensemble $\tilde{\phi}(\Omega) = \{(\omega, i) \mid \omega \in \Omega\}$ est $\tilde{\theta}$ -invariant et répond à la question.

Dans le cas particulier $h = 1$, $v'(\omega)$ est l'unique élément de $H(\omega)$ et $\Gamma(\omega) = \tilde{\Gamma} \circ \tilde{\phi}(\omega) = \tilde{\Gamma}(\omega, v'(\omega))$ P-p.s. .

Remarques : 1) La condition $r' = 1$, qui assure que $h = 1$ et donc que la charge du serveur existe sur Ω lui-même, est exactement celle que Borovkov [1] impose pour obtenir l'existence d'une distribution stationnaire pour Γ .

2) Le système dynamique $(\tilde{\Omega}, \tilde{\alpha}, \tilde{P}, \tilde{\theta})$ ainsi construit est isomorphe au système $(\Omega, \alpha, P, \theta)$ présenté dans Neveu [4] par :

$$\begin{aligned} \psi : \tilde{\Omega} &\longrightarrow \Omega \\ (\omega, i) &\longrightarrow (\theta^{-i}\omega, i) \end{aligned}$$

qui a pour inverse :

$$\begin{aligned} \psi^{-1} : \Omega &\longrightarrow \tilde{\Omega} \\ (\omega, n) &\longrightarrow (\theta^n\omega, n) \end{aligned}$$

On a

$$\psi \circ \tilde{\theta} = \bar{\theta} \circ \psi \quad \text{et} \quad \psi(\tilde{P}) = \bar{P}$$

En particulier

$$h = \tilde{P}(\tilde{\Omega}) = \bar{P}(\Omega) = \int_{\Omega^*} v \, dP$$

4. CAS GI|GI|1|0. ENONCE DES RESULTATS

Supposons maintenant que les variables $(\sigma\theta^n, \tau\theta^m)_{n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}}$ forment une suite de v.a. indépendantes (cas noté GI|GI|1|0), et montrons qu'alors l'extension $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P}, \tilde{\theta})$ est isomorphe à l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P, \theta)$ si et seulement si $d = 1$.

Dans le cas particulier où la loi de ν charge 1, c'est à dire si $P(\sigma \leq \tau) > 0$, il est facile de voir que $h = 1$ et donc que la charge stationnaire du serveur existe sur Ω lui-même. En effet l'indépendance de σ et τ permet d'écrire la condition $P(\sigma \leq \tau) > 0$ sous la forme :

$$\exists x > 0, \quad P(\sigma \leq x) > 0 \quad \text{et} \quad P(\tau \geq x) > 0$$

Considérons les trois suites d'événements :

$$A_n = \bigcap_{m \geq n} (\sigma\theta^{-m} \leq \sum_{k=1}^m \tau\theta^{-k})$$

$$B_n = \bigcap_{0 < p < n} \theta^p(\tau \geq x)$$

$$B'_n = \bigcap_{0 < p < n} \theta^p(\sigma \leq x)$$

D'après le lemme 2.2 les A_n sont de probabilité strictement positive à partir d'un certain rang N . De plus pour tout $n \geq N$, $P(A_n \cap B_n) > 0$. B'_n et $A_n \cap B_n$ étant indépendants,

$A_n \cap B_n \cap B'_n$ est non négligeable pour $n \geq N$, et comme

$$A_n = (H_1(\omega) \in \{0, 1, \dots, n-1\})$$

$$\text{et} \quad B_n \cap B'_n \subset \bigcap_{0 < p < n} \theta^p(\nu = 1)$$

$$H_1(\omega) = \{0\} \quad \text{p.s. sur } A_n \cap B_n \cap B'_n, \quad \text{et } h = 1.$$

C'est dans ce cas particulier que Borovkov a montré l'existence d'une distribution stationnaire pour la charge de serveur (cf. [1] théorème 1 p. 203 et remarque 1 p. 205).

La proposition suivante constitue le résultat central de ce travail.

Proposition 4.1. 1) Dans le cas $G|G|1|0$ $h = d$ et $\tilde{\theta}$ est ergodique.
En particulier, il y a existence et unicité sur Ω des solutions de l'équation

$$\Gamma \circ \theta = (\Gamma + \sigma^{-1} \Gamma_{=0} - \tau)^+$$

si et seulement si $d = 1$.

2) Lorsque $d = 1$ la loi de cette solution Γ est donnée par :

$$(4.1) \begin{cases} P(\Gamma = 0) = \frac{1}{E(v)} \\ P(\Gamma > x) = \frac{1}{E(v)} \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n > x) \quad \text{pour tout } x \geq 0, \text{ avec} \\ Y_n = \sigma - \sum_{k=0}^{n-1} \tau \theta^k. \end{cases}$$

De plus, pour toute fonction continue et positive sur \mathbb{R}_+

$$(4.2) \quad E[f(\Gamma \circ \theta^n) \mid \Gamma = x] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E[f(\Gamma)]$$

Ce dernier résultat de convergence généralise celui de Joffe et Ney [2] dans le cas de la file à un serveur : le théorème 2 de cet article, appliqué à la file à un serveur, établit la convergence des lois conditionnelles de $\Gamma \circ \theta^n$ sachant Γ sous l'hypothèse que la loi de τ charge tous les intervalles $]0, \epsilon[$ ($\epsilon > 0$). Cette hypothèse implique que la loi de v charge tous les entiers assez grands et donc que $d = 1$.

La démonstration de la proposition 4.1 s'appuie sur le lemme suivant qui a son intérêt propre :

Lemme 4.2. Dans le cas $G|G|1|0$ v est intégrable et on est dans l'alternative suivante :

- soit la suite $(v\theta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de v.a. indépendantes
- soit il existe un entier $m > 0$ et un intervalle I de \mathbb{R}_+ , éventuellement réduit à un point, tels que :

$$P(\sigma \in I) > 0 \quad \text{et} \quad P(\forall z \in I, \sum_{k=0}^{m-1} \tau \theta^k < z \leq \sum_{k=1}^m \tau \theta^k) > 0$$

Remarque : La deuxième condition du lemme 4.2 exprime le fait que

$$P(v = m + 1 \cap v_{\theta} = m) > 0$$

En effet

$$\{v = m + 1 \cap v_{\theta} = m\} \supset \left\{ \sigma \in I \cap \sigma_{\theta} \in I \cap \forall z \in I \sum_{k=0}^{m-1} \tau_{\theta}^k < z \leq \sum_{k=1}^m \tau_{\theta}^k \right\}$$

et comme les variables aléatoires $(\sigma_{\theta}^n, \tau_{\theta}^m)_{n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}}$ sont indépendantes, le second événement est non-négligeable.

Ainsi, dans le second cas du lemme 4.2 la loi de v charge deux entiers consécutifs m et $m+1$, et par conséquent $d = 1$. On ne peut donc avoir $d \neq 1$ que dans le premier cas du lemme 4.2 : comme on le verra dans la démonstration (section 5), la valeur de v dépend alors seulement de celle de σ et pas de la suite des $(\tau_{\theta}^n)_{n \in \mathbb{Z}}$; tout se passe comme si τ était une constante T et σ une v.a. à valeurs dans l'ensemble

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}](kd - 1)T, kdT].$$

Le cas $d \neq 1$ est donc assez exceptionnel.

5. DEMONSTRATION DU LEMME 4.2

a) Intégrabilité de v : supposons d'abord τ bornée.

Si τ est majorée p.s. par la constante b , par définition de v

$$\sigma \leq \sum_{k=0}^{v-1} \tau_{\theta}^k < \sigma + b$$

Intégrons la deuxième inégalité :

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 1_{v > k} \cdot \tau_{\theta}^k \right) dP < E(\sigma) + b$$

ce qui s'écrit encore, compte tenu de l'indépendance des v.a. $1_{v > k}$ et τ_{θ}^k

$$E \left(\sum_{k=0}^{\infty} 1_{v > k} \right) \cdot E(\tau) < E(\sigma) + b$$

soit
$$E(v) < \frac{E(\sigma) + b}{E(\tau)}$$

et l'intégrabilité de v est établie dans le cas où τ est bornée.

Si τ n'est plus supposée bornée on peut appliquer ce qui précède à la v.a.

v^b premier instant où la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (\tau \wedge b)_{\theta}^k$ dépasse σ . Ainsi v^b est intégrable et v qui est p.s. majorée par v^b l'est donc aussi.

b) -1er cas : supposons que

$$\forall m > 0 \quad P\left(\sum_{k=0}^{m-1} \tau\theta^k < \sigma \leq \sum_{k=1}^m \tau\theta^k \right) = 0.$$

Si G désigne la loi de σ cette condition s'écrit encore

$$\forall m > 0 \quad \int_{\mathbb{R}_+} p_m(x) \, dG(x) = 0$$

où

$$p_m(x) = P\left(\sum_{k=0}^{m-1} \tau\theta^k < x \leq \sum_{k=1}^m \tau\theta^k \right)$$

Donc les $p_m(x)$ sont nuls pour G -presque tout x . Posons

$$v_x(\omega) = \inf \left(n \geq 1 \mid \sum_{k=0}^{n-1} \tau\theta^k \geq x \right)$$

Le fait que les $p_m(x)$ soient nuls pour $m \geq 1$ signifie que

$$\forall m \geq 1 \quad v_x > m \implies v_x \theta^m > m \quad \text{p.s.}$$

ou encore que $v_x \theta^m \geq v_x$ p.s. , c'est à dire que v_x est p.s. constante. Le fait que pour G -presque tout x la v.a. v_x soit p.s. constante implique que la valeur de v ne dépend que de celle de σ et pas du tout de la suite des $(\tau\theta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$. La suite $(\sigma\theta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ étant faite de v.a. indépendantes, la suite $(v\theta^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ l'est aussi.

-2ème cas : on suppose maintenant que

$$\exists m > 0 \quad P\left(\sum_{k=0}^{m-1} \tau\theta^k < \sigma \leq \sum_{k=1}^m \tau\theta^k \right) > 0$$

Les v.a. σ et $(\tau\theta^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ étant indépendantes, il existe un intervalle I de \mathbb{R}_+ , éventuellement réduit à un point tel que :

$$P\left(\sum_{k=0}^{m-1} \tau\theta^k < \sigma \leq \sum_{k=1}^m \tau\theta^k \right) = P(\sigma \in I) \cdot P\left(\sum_{k=0}^{m-1} \tau\theta^k < z \leq \sum_{k=1}^m \tau\theta^k \right)$$

et le lemme est établi.

6. DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.1

1) Plaçons nous dans le premier cas du lemme 4.2

Pour tout entier naturel i on considère la suite de v.a. $(v_p^i)_{p \geq 1}$ définie par

$$\begin{cases} v_1^i = v_0 \theta^{-i} - i & \text{si } i > 0 \text{ et } v_1^i = 0 \text{ si } i = 0 \\ v_{p+1}^i = v_p^i + v_0 \theta^i v_p^i & \text{pour tout } p \geq 1 \end{cases}$$

Supposons $d = 1$ et $h > 1$. Alors il existe un couple (i, j) d'entiers naturels distincts tels que $P(i, j \in H(\omega)) > 0$, et deux entiers naturels r_i et r_j tels que

$$P(v_1^i = r_i ; v_1^j = r_j ; i, j \in H(\omega)) > 0 .$$

r_i et r_j sont nécessairement distincts car par construction de $H(\omega)$ l'application

$$\begin{array}{l} i \text{ -----} \rightarrow v_1^i \\ H(\omega) \text{-----} \rightarrow H(\theta v_1^i \omega) \end{array}$$

est une bijection. Notons $P_{i,j}(\cdot)$ la probabilité conditionnelle

$$P_{i,j}(\cdot) = P(\cdot \mid v_1^i = r_i ; v_1^j = r_j ; i, j \in H(\omega))$$

Comme par définition de $H(\omega)$ l'événement

$$F = \bigcup_{p > 1} \bigcup_{q > 1} (v_p^i = v_q^j)$$

est $P_{i,j}$ -négligeable, les suites $(v_p^i)_{p > 1}$ et $(v_q^j)_{q > 1}$ sont deux promenades aléatoires indépendantes. Mais comme $d = 1$, l'événement F ne peut être $P_{i,j}$ -négligeable : d'après l'égalité de Bezout il existe deux suites d'éléments du support de v , soient $(k_n)_{1 \leq n \leq N}$ et $(k'_m)_{1 \leq m \leq M}$, et deux suites d'entiers strictement positifs, soient $(c_n)_{1 \leq n \leq N}$ et $(c'_m)_{1 \leq m \leq M}$ telles que :

$$\sum_{n=1}^N c_n k_n - \sum_{m=1}^M c'_m k'_m = 1$$

Multiplions cette égalité par $r_j - r_i$ dans le cas où $r_j - r_i > 0$:

$$r_i + (r_j - r_i) \sum_{n=1}^N c_n k_n = r_j + (r_j - r_i) \sum_{m=1}^M c'_m k'_m$$

Il est alors facile de construire une famille de trajectoires sur lesquelles $v_p^i = v_q^j$ avec

$$p = 1 + (r_j - r_i) \sum_{n=1}^N c_n \quad \text{et} \quad q = 1 + (r_j - r_i) \sum_{m=1}^M c'_m$$

Le cas $r_j - r_i < 0$ est similaire, et on devrait avoir à la fois $P_{i,j}(F) = 0$ et $P_{i,j}(F) > 0$ ce qui signifie qu'il n'existe pas de quarté (i, j, r_i, r_j) tel que la probabilité $P(v_1^i = r_i ; v_1^j = r_j ; i, j \in H(\omega))$ soit non nulle, et donc $h = 1$.

Le même raisonnement appliqué aux classes d'entiers congrus modulo d montre que dans le cas $d > 1$, $H(\omega)$ contient p.s. au plus un représentant de chaque classe, et donc que $h \leq d$. On sait déjà que $h \geq d$ (proposition 3.1) donc $h = d$.

L'ergodicité de $\tilde{\theta}$ découle de la proposition 3.1 car dans le cas indépendant $(\Omega, \mathcal{A}, P, \theta)$ est isomorphe à un schéma de Bernoulli, donc toutes les puissances de θ sont ergodiques.

II) Plaçons nous maintenant dans le deuxième cas du lemme 4.2 et supposons $h > 1$.

Soit X_0 le vecteur aléatoire $\Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^h$ obtenu par réordonnement croissant du vecteur de composantes :

$$(6.1) \quad \begin{aligned} R_0(\omega) &= 0 \quad \text{si } 0 \in H(\omega) \\ \forall i \in H(\omega), i \neq 0, \quad R_i(\omega) &= \sigma_0 \theta^{-i} - \sum_{k=1}^i \tau_0 \theta^{-k} > 0 \end{aligned}$$

On définit par récurrence la suite (X_n) de v.a. de Ω dans \mathbb{R}_+^h en posant pour tout $n \geq 0$

$$(6.2) \quad X_{n+1} = \begin{cases} [(X_{n,1}^{-\tau_0 \theta^n})^+, \dots, (X_{n,h}^{-\tau_0 \theta^n})^+] & \text{si } X_{n,1} > 0 \\ R[(\sigma_0 \theta^n - \tau_0 \theta^n)^+, (X_{n,2}^{-\tau_0 \theta^n})^+, \dots, (X_{n,h}^{-\tau_0 \theta^n})^+] & \text{si } X_{n,1} = 0 \end{cases}$$

où $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,h}$ désignent les composantes du vecteur X_n , et R l'opération réordonnement croissant. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov en vertu du résultat suivant : Etant donnée une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de v.a. $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, indépendantes et de même loi, et une fonction borélienne $F : \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^h$, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{aligned} X_0 &\text{ donnée : } \Omega \rightarrow \mathbb{R}^h, \text{ mesurable par rapport à la tribu engendrée} \\ &\text{par les } (Y_n)_{n < 0} \\ \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} &= F(X_n, Y_n) \end{aligned}$$

est une chaîne de Markov. On applique ce résultat à $Y_n = (\sigma_0 \theta^n, \tau_0 \theta^n)$ et $k = 2$.

On vérifie facilement que pour tout $n \geq 0$ $X_n = X_0 \theta^n$, donc la chaîne est stationnaire.

Considérons maintenant la chaîne X_p^* induite par X_n sur

$$\Omega^* = (\omega \in \Omega \mid 0 \in H(\omega)) = (\omega \in \Omega \mid X_{0,1} = 0),$$

notons $T_1^*, T_2^*, \dots, T_k^*, \dots$ la suite des instants de retour à Ω^* , et

θ^* l'induite de θ sur Ω^* . On a :

$$(6.3) \quad \begin{aligned} X_0^* &= X_0 \quad \text{P p.s. sur } \Omega^* \\ X_{p+1}^* &= R[(\sigma_0 \theta^{*p} - \tau_0^* \theta^{*p})^+, (X_{p,2}^* - \tau_0^* \theta^{*p})^+, \dots, (X_{p,h}^* - \tau_0^* \theta^{*p})^+] \quad (p \geq 0) \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $x = (0, x_2, x_3, \dots, x_h)$ de \mathbb{R}_+^h tel que $0 < x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_h$

$$X_1^x = \left[0, (x_3 - T_{v_{x_2}})^+, \dots, (x_h - T_{v_{x_2}})^+, (\sigma - T_{v_{x_2}})^+ \right] \quad P_x\text{-p.s. sur } (\sigma \geq x_h)$$

On rappelle que pour tout $y > 0$

$$v_y(\omega) = \inf \left(n \geq 1 \mid \sum_{k=0}^{n-1} \tau \theta^k \geq y \right),$$

T_{v_y} est le premier instant où la promenade aléatoire $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ atteint ou dépasse y .

Comme la chaîne X_p^x est stationnaire par θ^x , elle admet une probabilité invariante notée m^x , qui est la loi de X_0^x .

Soit s la borne inférieure de l'intervalle I du lemme 4.2 et S sa borne supérieure. Quitte à réduire l'intervalle I on peut supposer que pour tout $\epsilon > 0$, la loi de σ charge les intervalles $[s, s+\epsilon]$ et $[S-\epsilon, S]$. Soit $[a, b]$ le plus petit intervalle fermé contenant le support de τ . On peut supposer $b < +\infty$, car si $b = +\infty$ $P(\sigma \leq \tau) > 0$ et $h = 1$ (cf. le début de la section 4).

Le cheminement de la démonstration est le suivant :

A) On remarque que m^x charge l'ensemble

$$K = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_h) \in \mathbb{R}_+^h \mid 0 = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_h < S \right\}$$

En effet, soit $x = (0, x_2, \dots, x_h)$ un point de \mathbb{R}_+^h tel que $0 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_h$, et soit N le plus petit entier supérieur ou égal à $2x_h/b$. Sur l'événement non négligeable

$$E = \bigcap_{0 \leq k \leq N} (\sigma - \theta^k \in I, \tau \theta^k \geq b/2)$$

toutes les composantes du vecteur x se sont

annulées au moins une fois avant l'instant T_N , et à chaque fois qu'une composante de X_k s'annule elle saute à $\sigma - \theta^k \leq S$, donc $X_{N,h} < S$ P_x -p.s. sur E ; ainsi au premier instant $T_*^x \geq T_N$ où la plus petite composante du vecteur X s'annule la chaîne X_p^x atteint K . Donc $P_x(\exists p \ X_p^x \in K) > 0$ et $m^x(K) > 0$.

B) Si on démontre que, partant de n'importe quel point de K , la chaîne X_p^x a une probabilité positive d'atteindre l'ensemble

$$K_0 = \left\{ (0, x_2, x_3, \dots, x_h) \in \mathbb{R}_+^h \mid x_2 = 0 \right\}$$

ceci impliquera que m^x charge K_0 . Or par construction de $H(\omega)$, m^x ne peut charger K_0 , donc l'hypothèse $h > 1$ est absurde, et $h = d = 1$ dans le deuxième cas du lemme 4.2

Il suffit donc d'établir que, partant de n'importe quel point de K , la chaîne X_p^x a une probabilité positive d'atteindre K_0 .

Nous allons d'abord décrire les différentes étapes de la démonstration dans le cas très particulier où σ est constante ($\sigma = S$) et où la loi de τ charge les extrémités de son support intervalle : $P(\tau = a) > 0$ et $P(\tau = b) > 0$.

Supposons que $h = 2$ et montrons que c'est impossible. Partant de $x = (0, y)$ avec $y < S$, la chaîne saute à l'instant T_0^+ à (y, S) et si $S - y$ est assez

petit, les deux composantes de X_n vont pouvoir s'annuler en même temps : soit

$$D_1 = \inf (pa + qb \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, pa + qb \geq S - b) = p_0 a + q_0 b ,$$

et $y \in]D_1, S[$ (noter que $S - b \leq D_1 < S - b + a$) ; considérons la chaîne (X_n)

qui part de $x = (0, y)$ sur l'ensemble :

$$\Omega_0 = \left\{ \omega \in \Omega \mid T_{p_0+q_0}(\omega) = \sum_{0 \leq k < p_0+q_0} \tau_{0\theta^k}(\omega) = p_0 a + q_0 b ; \tau_{0\theta^{p_0+q_0}}(\omega) = b \right\} .$$

Il est facile de voir que les deux composantes de X_n s'annulent pour la première fois et simultanément à l'instant

$$T_{p_0+q_0+1} = p_0 a + q_0 b + b = D_1 + b .$$

Ainsi, pour tout $x = (0, y)$ avec $D_1 < y < S$ $P_x(X_1^x = (0, 0)) > 0$.

Cherchons maintenant à partir de quels points de K la chaîne (X_k^x) a une probabilité strictement positive d'atteindre l'ensemble

$$K_1^x = \{ x \in K \mid D_1 < y < S \}$$

On pose

$$C_1 = \sup (pa + qb \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, pa + qb < S - D_1) = p_1 a + q_1 b ,$$

et on considère la chaîne (X_n) qui part à $T_0 = 0$ de $x = (0, y)$ avec $0 < y \leq C_1$ sur l'ensemble

$$\Omega_1 = \left\{ \omega \in \Omega \mid T_{p_1+q_1}(\omega) = \sum_{0 \leq k < p_1+q_1} \tau_{0\theta^k} = p_1 a + q_1 b \right\}$$

Sur cet ensemble la chaîne (X_n) atteint K_1^x au plus tard

à l'instant $T_{p_1+q_1}$ (en fait au premier instant $T_k \geq y$). Donc, pour tout

x de K tel que $y \leq C_1$, $P_x(X_{1,2}^x > D_1) > 0$ et $P_x(X_2^x = (0, 0)) > 0$.

On itère ensuite le procédé en posant :

$$D_n = \inf (pa + qb \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, pa + qb \geq S - C_n - b)$$

$$C_n = \sup (pa + qb \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, pa + qb < S - D_n)$$

et on montre que :

$$\forall x \in K \quad y > D_n \implies P_x(\exists k > 0 \quad X_{k,2}^x \leq C_{n-1}) > 0$$

$$\forall x \in K \quad y \leq C_n \implies P_x(\exists k > 0 \quad X_{k,2}^x > D_n) > 0$$

Comme les suites C_n et D_n sont respectivement croissante et décroissante, on a ainsi montré que

$$\forall x \in K \quad y > \liminf_n D_n \implies P_x(\exists k \ X_k^x = (0,0)) > 0$$

Comme $m^x(K) > 0$, il restera à démontrer que $\liminf_n D_n = 0$ pour établir que $m^x(0,0) > 0$, ce qui est exclu, donc $h = 2$ est impossible.

Le schéma de la démonstration est le même dans le cas général (on ne s'intéressera qu'aux w pour lesquels les $\tau_{0\theta^n}$ ne prennent que des valeurs proches de a ou b) ; la bonne définition des suites C_n et D_n dans le cas général est la suivante :

$$(6.4) \left\{ \begin{array}{l} C_0 = 0 \qquad D_0 = s \\ \forall n > 0, \quad D_n = \inf (y \in]0, S[\mid P(\sigma \in I, T_{v_y} \geq \sigma - C_{n-1}) > 0) \\ \forall n > 0 \quad C_n = \sup (pa + qb \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, pa + qb < S - D_n) \end{array} \right.$$

Comme $T_{v_y} \leq y + b$ P-p.s., $D_1 \geq s - b$, et comme pour tout $\epsilon > 0$ la loi de τ charge $[a, a+\epsilon[$, pour tout intervalle J de largeur strictement supérieure à a , $P(\exists k \ T_k \in J) > 0$ ^{et}
 $D_1 \leq s - b + a < D_0$

Donc C_1 est toujours défini et $C_1 \geq 0 = C_0$. Par récurrence, la suite C_n est croissante et majorée par S , et D_n est décroissante et minorée par 0 . Soient C et D leurs limites respectives.

B1) Pour tout $n > 0$ posons

$$K_n = (x \in K \mid x_2 \leq C_n)$$

et

$$K'_n = (x \in K \mid x_h > D_n)$$

et montrons par récurrence que

$$(6.5) \quad \forall x \in K'_1 \quad P_x(\exists p \ X_p^x \in K_0) > 0$$

et que

$$(6.6) \quad \forall n > 1 \quad \forall x \in K'_n \quad P(\exists p \ X_p^x \in K'_{n-1}) > 0$$

ainsi nous aurons montré, grâce à la propriété de Markov que :

$$(6.7) \quad \forall x \in \left(\bigcup_{n>0} K'_n \right) \quad P_x(\exists p \ X_p^x \in K_0) > 0$$

Il restera ensuite à prouver que la réunion des K'_n ($n>0$) recouvre tout K , c'est à dire que $D = 0$.

- Soit un x de K tel que $s < x_h < S$. Sur $(\sigma \in I)$ la chaîne X_p^x qui part de x , a juste après l'instant 0 deux composantes dans l'intervalle I , et sur l'événement non négligeable

$$(\sigma \in I) \cap (\forall z \in I, \sum_{k=0}^{m-1} \tau \theta^k < z \leq \sum_{k=0}^m \tau \theta^k)$$

ces deux composantes s'annulent pour la première fois et simultanément à l'instant T_m .

Donc, pour tout x de K tel que $s < x_h < S$ $P_x(\exists p \ X_p^x \in K_0) > 0$.

- Soit $n \geq 1$ et soit un x de K tel que $D_n < x_h \leq D_{n-1} \leq s$, et montrons que

$$P(\exists p \ X_{p,2}^x \leq c_{n-1}, X_p^x \in K) > 0$$

Le cas des x de K pour lesquels

$$\exists i (1 < i < h) \quad P(v_{X_i} = v_{X_{i+1}}) > 0$$

est clair car l'événement $(\exists p \leq i-1 \ X_p^x \in K_0)$ contient p.s. $(v_{X_i} = v_{X_{i+1}})$.

Pour les autres x de K , $v_{x_2} < v_{x_3} < \dots < v_{x_h}$ P_x -p.s. et

$$T_1^x = T_{v_{x_2}}, \dots, T_{h-1}^x = T_{v_{x_h}} \quad P_x\text{-p.s. sur } E' = \bigcap_{0 \leq i < h} (\sigma - \theta^{x_i} \in I)$$

Comme $x_h > D_n$, par définition de D_n l'événement

$$E'' = (\sigma \in I, T_{v_{x_h}} \geq \sigma - C_{n-1})$$

n'est pas négligeable, $E' \cap E''$ ne l'est pas non plus, et

$$T_{h-1}^x = T_{v_{x_h}}$$

$$X_{h-1,2}^x = (\sigma - T_{v_{x_h}})^+ \leq C_{n-1} \quad P_x\text{-p.s. sur } E' \cap E''$$

$$X_{h-1}^x \in K$$

On a ainsi établi d'une part (6.5) (K_1^x se décompose en deux parties :

$\{x \in K \mid x_h > s\}$ et $\{x \in K \mid D_1 < x_h \leq s\}$), et d'autre part que partant de n'importe quel point de K_n^x ($n > 1$), la chaîne X_p^x a une probabilité positive d'atteindre K_{n-1} .

Etudions, dans le cas où $C_{n-1} > 0$, à quelle condition on a

$$X_{h-1,2}^x = C_{n-1} \quad P_x\text{-p.s. sur } E' \cap E''.$$

Ceci se produit si et seulement si

$$T_{v_{x_h}} = \sigma - C_{n-1} \quad P_x\text{-p.s. sur } E' \cap (T_{v_{x_h}} \geq \sigma - C_{n-1}) = E' \cap E''$$

c'est à dire si et seulement si

$$T_{v_{x_h}} \leq \sigma - C_{n-1} \quad P_x\text{-p.s. sur } E' = \bigcap_{0 \leq i < h} (\sigma - \theta^{x_i} \in I).$$

Mais alors :

$$T_{v_{x_h}} \leq s - C_{n-1} \quad P_x\text{-p.s. sur } E',$$

car la loi de σ charge tous les intervalles $[s, s+\epsilon]$ pour $\epsilon > 0$; comme les v.a.

$T_{v_{x_h}}$ et 1_E , sont indépendantes, on a en fait :

$$(\alpha) \quad T_{v_{x_h}} \leq s - C_{n-1} \quad P_x\text{-p.s.}$$

D'autre part, l'inégalité $x_h > D_n$ implique :

$$(\beta) \quad P(T_{v_{x_h}} \geq \sigma - C_{n-1}) > 0$$

De (α) et (β) on déduit que :

$$s = S$$

$$P(T_{v_{x_h}} = s - C_{n-1}) > 0$$

$$\tau_{\theta}^{v_{x_h^{-1}}} = b \quad P_x\text{-p.s. sur } (T_{v_{x_h}} = s - C_{n-1})$$

et en particulier que $P(\tau = b) > 0$.

On a ainsi montré que

$$\forall x \in K'_n \quad P_x(X_{h-1}^x \in K ; X_{h-1,2}^x < C_{n-1}) > 0$$

sauf éventuellement si à la fois

$$P(\tau = b) > 0 \quad \text{et} \quad s = S.$$

- Soit $n > 1$ et $x \in K_{n-1}$. La loi de τ chargeant pour tout $\varepsilon > 0$ les intervalles $[a, a+\varepsilon]$ et $[b-\varepsilon, b]$, on a pour tout couple (p, q) d'entiers naturels

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad P(pa + qb - \varepsilon < T_k < pa + qb + \varepsilon) > 0.$$

Supposons d'abord $x_2 < C_{n-1}$. Comme C_{n-1} est de la forme $pa + qb$, il suffit de choisir $\varepsilon \leq C_{n-1} - x_2$ pour avoir $P(T_{v_{x_2}} < C_{n-1} + \varepsilon) > 0$. On a

$$T_1^* = T_{v_{x_2}}$$

$$P_x\text{-p.s. sur } (S-\varepsilon < \sigma \leq S) \cap (T_{v_{x_2}} < C_{n-1} + \varepsilon)$$

$$X_{1,h}^* \geq (\sigma - T_{v_{x_2}})^+ > S - C_{n-1} - 2\varepsilon$$

mais comme $C_{n-1} < S - D_{n-1}$ la quantité $S - C_{n-1} - 2\varepsilon$ peut-être rendue supérieure à D_{n-1} en choisissant ε assez petit. On a ainsi établi que :

$$\forall x \in K, (x_2 < C_{n-1} \implies P_x(X_{1,h}^* \in K'_{n-1}) > 0)$$

Le cas $x_2 = C_{n-1}$ n'est à examiner que si pour au moins un x de K'_{n-1}

$$P_x(X_{h-1}^x \in K ; X_{h-1,2}^x < C_{n-1}) = 0$$

mais dans ce cas on a vu que $P(\tau = b) > 0$, et alors pour tout couple d'entiers (p, q) :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad P(pa + qb \leq T_k < pa + qb + \varepsilon) > 0$$

donc $\forall \varepsilon > 0 \quad P(T_{v_{x_2}} < C_{n-1} + \varepsilon) > 0$

et on termine le raisonnement comme dans le premier cas.

Le point B1 est ainsi établi. Montrons maintenant que $\bigcup_{n>0} K'_n = K$,

c'est à dire que $D = 0$.

B2) Remarquons que C et D vérifient les équations :

$$(6.8) \quad D = \inf (y \in]0, S[\mid P(\sigma \in I, T_{\nu_y} \geq \sigma - C) > 0)$$

$$(6.9) \quad C = \sup (pa + qb \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, pa + qb < S - D)$$

L'ensemble des nombres inférieurs à S de la forme pa + qb avec p et q entiers positifs étant fini, la suite C_n devient constante à partir d'un certain rang, donc D_n aussi et les égalités (6.8) et (6.9) sont évidentes.

Supposons $D > 0$ et posons :

$$D_- = \sup (y < D \mid \exists k \in \mathbb{N} \quad P(y < T_k < D) > 0)$$

et
$$C_+ = \inf (pa + qb \mid p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}, pa + qb > C)$$

Il est clair que $C < S - D \leq C_+$, donc $S \leq C_+ + D$. Montrons que $D_- < D$:

Comme pour tout $y > 0$

$$T_{\nu_y} \leq y + b \quad \text{P-p.s.}$$

d'après (6.8) on a $D \geq s - C - b$; si $D_- = D$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad P(D - \epsilon < T_k < D) > 0$$

mais alors $D = s - C - b$: en effet, si $s - C - b < D = D_-$ on peut trouver des $y < D$ tels que $P(T_{\nu_y} > s - C) > 0$, ce qui contredit (6.8). Si $D = D_-$ on a donc :

$$D + C + b = s \leq S \leq C_+ + D$$

et en particulier $C + b \leq C_+$. Or dans tout intervalle

semi-ouvert de \mathbb{R}_+ de largeur à il y a un nombre de la forme pa ($p \in \mathbb{N}$), donc à fortiori un nombre de la forme pa + qb, par conséquent $C_+ \leq C + a < C + b$. Donc $D_- < D$.

Montrons maintenant que $C + D_- + b \leq s$. D'après (6.8)

$$\forall y < D \quad P(\sigma \in I, T_{\nu_y} \geq \sigma - C) = 0$$

et donc

$$(6.10) \quad \forall y < D \quad T_{\nu_y} \leq s - C \quad \text{P-p.s.}$$

avec inégalité stricte si $P(\sigma = s) > 0$.

Comme par définition de D_- , $\forall \epsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad P(D_- - \epsilon < T_k \leq D_-) > 0$, on a :

$$(6.11) \quad \forall y \in]D_-, D_- + b] \quad \forall \epsilon > 0 \quad P(D_- + b - \epsilon < T_{\nu_y} \leq D_- + b) > 0$$

et en comparant (6.10) et (6.11), l'intervalle $]D_-, D[$ étant non vide, on obtient :

$$D_- + b \leq s - C$$

avec inégalité stricte sous la double condition :

$$(E) \quad P(\sigma = s) > 0 \quad \text{et} \quad P(\exists k \in \mathbb{N} \quad T_k = D_- + b) > 0$$

On a ainsi prouvé

$$(612) \begin{cases} C + D_- + b \leq s \leq S \leq C_+ + D \\ \text{la première inégalité étant stricte sous la condition } (\mathcal{C}) \end{cases}$$

En particulier

$$(613) \begin{cases} (C_+ - C) + (D - D_-) \geq b \\ \text{avec égalité seulement} \end{cases} \text{ si } \begin{cases} P(\exists k \in \mathbb{N} \ T_k = D_- + b) = 0 \\ \text{et } s = S \end{cases}$$

Remarquons que si $b > 2a$ l'inégalité (13) ne peut être satisfaite car les différences $(C_+ - C)$ et $(D - D_-)$ sont évidemment inférieures à la borne inférieure a des valeurs de τ . Dans ce cas donc $D = 0$ et $h = 1$. Dans [2] Joffe et Ney ont montré que pour une file à rejet $GI|GI|c|0$ à c serveurs, si l'une au moins des deux conditions $P(\sigma \leq \tau) > 0$ ou $b > c.a$ est réalisée la probabilité pour qu'un client trouve à son arrivée tous les c serveurs libres à la fois est strictement positive. Leur résultat dans le cas $c = 2$ montre que pour la file à 1 serveur $h = 1$ dès que $b > 2a$ ou $P(\sigma \leq \tau) > 0$. Ces deux conditions impliquent l'une et l'autre que $d = 1$: si $P(\sigma \leq \tau) > 0$ la loi de ν charge 1, et si $b > 2a$ elle charge au moins deux entiers consécutifs.

B3) Déduisons maintenant de (6.13) qu'il existe un couple d'entiers (p,q) tel que

$$C = qb, \quad D = pa, \quad C_+ = (q+1)a, \quad D_- = (p-1)b$$

Montrons qu'il existe un entier q' tel que $D_- = q'b$.

Par définition de D_- , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier q' tel que l'ensemble

$$A = (\omega \in \Omega \mid D_- - \varepsilon < T_{q'} \leq D_-)$$

soit non négligeable. On peut même choisir un q' valable pour tout ε ($0 < \varepsilon < 1$), car

$$0 < a \leq \tau \leq b \quad \text{P-p.s.}$$

et donc la probabilité $P(D_- - 1 < T_k \leq D_-)$ n'est non nulle que pour un nombre fini de

valeurs de k. Pour prouver que $D_- = q'b$ il suffit de montrer que pour tout k ($0 \leq k < q'$) :

$$b - 2\varepsilon < \tau\theta^k \leq b \quad \text{p.s. sur } A.$$

Supposons qu'il existe un entier k compris entre 0 et q'-1 et une partie non négligeable A' de A sur laquelle

$$a \leq \tau\theta^k \leq b - 2\varepsilon$$

Soit A'' le cylindre de base A' obtenu en laissant libre la coordonnée $\tau\theta^k$ de ω , et soit

$$B = (\omega \in \Omega \mid b - \varepsilon < \tau\theta^k \leq b)$$

Sur l'événement non négligeable $A'' \cap B$ on a

$$D_- < T_{q'} \leq D_- + b - a \quad \text{p.s.}$$

$T_{q'}$, dépassant strictement D_- sur $A'' \cap B$, elle y dépasse aussi D par définition de D_- ,

et donc $D - D_- \leq b - a$. De plus, il ne peut y avoir égalité que si $T_{q'} = D_- + b - a$ p.s. sur $A'' \cap B$, et donc

$$T_{q'} = D_- \quad \text{et} \quad \tau\theta^k = a \quad \text{p.s. sur } A'$$

$$\text{et} \quad \tau\theta^k = b \quad \text{p.s. sur } B$$

condition qui suppose que la promenade (T_k) charge le point $D_- + b$.

Ceci, joint à la condition $C_+ - C \leq a$, contredit (6.13) ; donc :

$$P(A') = 0$$

$$\forall k (0 \leq k < q') \quad b - 2\varepsilon < \tau\theta^k \leq b \quad \text{p.s. sur } A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad q'b - 2q'\varepsilon \leq D_- < q'b + \varepsilon, \text{ soit } D_- = q'b.$$

De plus l'inégalité (6.13) peut maintenant s'écrire

$$(6.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} (C_+ - C) + (D - D_-) \geq b \\ \text{avec égalité seulement si} \end{array} \right\} \begin{cases} P(\tau = b) = 0 \\ \text{et } s = S \end{cases}$$

On procède de même pour prouver que $D = pa$ en remarquant que (6.8) implique

$$\exists p \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad P(D \leq T_p < D + \varepsilon) > 0$$

Montrons maintenant que $q' = p - 1$. Comme $D_- < D$ et $a < b$, il est clair que $q' \leq p - 1$. Supposons $q' < p - 1$ et considérons l'ensemble

$$\left\{ M_n = (p-n-1)a + nb \right\}_{0 \leq n \leq p-1}$$

Par définition de D_- $M_0 = (p-1)a \leq q'b$, et comme $q' < p-1$ $M_{p-1} = (p-1)b > q'b$; notons N le plus petit entier compris entre 1 et $p-1$ tel que $M_N > q'b = D_-$.

Remarquons que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(M_N - \varepsilon < T_{p-1} < M_N + \varepsilon) > 0$$

donc par définition de D_- l'inégalité $M_N > D_-$ implique $M_N \geq D$. De plus comme $N \geq 1$, si $P(\tau = b) = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(M_N - \varepsilon < T_{p-1} < M_N) > 0$$

et dans ce cas $M_N > D$. Ainsi

$$M_{N-1} \leq D_- < D \leq M_N = M_{N-1} + b - a$$

et

$$D - D_- \leq b - a$$

avec inégalité stricte si $P(\tau = b) = 0$.

Cette inégalité, jointe à la condition $C_+ - C \leq a$, est incompatible avec (6.14), donc $q' = p - 1$.

Montrons que $C = qb$. Supposons $C = na + qb$ avec $n \geq 1$; par définition de C_+

$$C_+ \leq (n-1)a + (q+1)b = C + b - a$$

donc $C_+ - C \leq b - a$. D'autre part $D - D_- \leq a$, donc d'après (6.14) on a :

$$(6.15) \quad C_+ - C = b - a ; \quad D - D_- = a ; \quad s = S ; \quad P(\tau = b) = 0.$$

Comme $D = pa$ $D_- = (p-1)a$, mais d'autre part $D_- = (p-1)b$ donc $p = 1$, d'où $D_- = 0$ et

$D = a$. (6.12) s'écrit alors

$$C + b \leq s \leq S \leq C_+ + a$$

et comme $C_+ = C + b - a$, ces trois inégalités sont en fait des égalités et (6.8) devient

$$D = \inf (y \in]0, S[\mid P(T_{v_y} \geq b) > 0)$$

et donc $D = 0$. Le système (6.15) est impossible et $C = qb$.

Supposons maintenant que $C_+ = p'a + mb$ avec $m \geq 1$. Par définition de C_+

$$C \geq (p'+1)a + (m-1)b = C_+ - b + a$$

donc $C_+ - C \leq b - a$ et il suffit de reprendre le raisonnement fait ci-dessus pour établir que $C_+ = p'a$.

Montrons enfin que $p' = q + 1$. On a évidemment $p' \geq q + 1$ car $C < C_+$ et $a < b$, et si $p' > q + 1$ on montre facilement en considérant l'ensemble

$$\{M'_n = (p'-n-1)a + nb\}_{0 \leq n \leq p'-1}$$

que $C_+ - C \leq b - a$ (cf. le raisonnement fait pour prouver que $q' = p-1$). Comme

$D - D_- \leq a$ on aboutit de nouveau grâce à (6.14) au système (6.15) qui est impossible. Donc $p' = q + 1$ et le point β_3 est établi.

B4) La condition (6.12) s'écrit maintenant :

$$(p + q)b \leq s \leq S \leq (p + q + 1)a$$

la première inégalité étant stricte dès que: $P(\tau=b) > 0$ et $P(\sigma=s) > 0$

ce qui signifie exactement que :

$$v = p + q + 1 \quad \text{P-p.s. sur } (\sigma \in I)$$

Ceci contredit le fait que sur l'événement non négligeable

$$(\sigma \in I) \cap (\sigma - \theta \in I) \cap (\forall z \in I, \sum_{k=0}^{m-1} \tau \theta^k < z \leq \sum_{k=1}^m \tau \theta^k)$$

$v = m + 1$ et $v\theta = m$ p.s..

Donc $D = 0$ et dans le deuxième cas du lemme 4.2 on a $h = d = 1$.

Le point 1) de la proposition 4.1 est établi. Passons au point 2).

Calculons la loi de Γ dans le cas $d = 1$. $(\Gamma \circ \theta^n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov stationnaire récurrente en 0, dont le noyau est donné par :

$$\forall y \geq 0 \quad Q(x,]y, +\infty[) = \begin{cases} P(\tau < x - y) & \text{si } x > 0 \\ P(\sigma - \tau > y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La loi de Γ est la probabilité invariante de cette chaîne. Soit m la mesure Q -invariante définie par

$$(6.16) \quad m(\cdot) = E_0 \left(\sum_{n=0}^{v-1} 1_{\Gamma \circ \theta^n \in \cdot} \right)$$

Comme $\Gamma \circ \theta^n = Y_n$ sur $(Y_n > 0, \Gamma = 0)$

$$m(\cdot) = \varepsilon_0(\cdot) + \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_n \in \cdot \cap]0, +\infty[)$$

et d'après (6.16) $m(\mathbb{R}_+) = E_0(v) = E(v)$.

La loi de Γ est donc la probabilité Q -invariante $\frac{m(\cdot)}{E(v)}$ où m est donnée par (6.16),

ce qui prouve (4.1).

Pour établir (4.2) il suffit d'appliquer le théorème d'Orey à la chaîne de Markov stationnaire $(\Gamma_0 \theta^n)_{n \geq 0}$ qui est récurrente en 0, irréductible, et apériodique si $d = 1$. La proposition 4.1 est ainsi démontrée.

Je remercie Monsieur Neveu pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée dans ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOROVKOV : Stochastic processes in queueing theory
Springer-Verlag (1976).
- [2] A. JOFFE et P.E. NEY : Convergence theorems for multiple channel loss probabilities. Ann. Math. Statist. 34 (1963) p. 260-273.
- [3] B. LISEK : Construction of stationary distributions for loss systems
Math. Operationforsch. Statist., Ser. Statist., Vol 10
(1979) p. 561-581.
- [4] J. NEVEU : Construction de files d'attente stationnaires
Publication de l'INRIA : Séminaire International sur la
modélisation et les méthodes d'évaluation de performance
(Paris, janvier 83) vol. 1, p. 155-166.

D. FLIPO
Université PARIS VI
Laboratoire de Probabilités
4, Place Jussieu
75230 PARIS Cedex 05