ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

YVES DERRIENNIC

Sur le théorème de point fixe de Brunel et le théorème de Choquet-Deny

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 87, série *Probabilités et applications*, nº 4 (1985), p. 107-111

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1985__87_4_107_0>

SUR LE THEOREME DE POINT FIXE DE BRUNEL ET LE THEOREME DE CHOQUET-DENY

Yves DERRIENNIC

Dans l'étude du problème de la mesure invariante pour un opérateur markovien, Brunel a démontré le résultat suivant : "Soient T et S deux contractions linéaires d'un espace de Banach E telles que $TS = ST$. Si $x \in E$ vérifie $(\lambda T + (1-\lambda) S)x = x$ avec $0 < \lambda < 1$, alors $Tx = Sx = x$". D'autres démonstrations ont été données par Foguel-Weiss (1973), Nagel et al.(1983). Ce théorème a été utilisé par Guivarc'h pour démontrer le théorème de Choquet-Deny (Revuz, 1975, chap. V ; voir aussi Lin 1977). On se propose ici de suivre la démarche inverse et de montrer que le théorème rappelé ci-dessus peut être déduit du théorème de Choquet-Deny. Son énoncé s'étend alors à des combinaisons convexes quelconques et même dans certains cas à des opérateurs qui ne commutent pas. Pour conclure on donne une démonstration complètement élémentaire du théorème de Choquet-Deny (démonstration suggérée par un travail de Raugi (1983).

On considère un semi-groupe localement compact séparable S. Le produit dans S est noté st, l'élément neutre e. On suppose que S agit dans un espace de Banach E par opérateurs linéaires continus $(T_s)_{s \in S}$ de telle façon que

1) $T_e = I, \quad T_s T_t = T_{st}$

2) $\sup\limits_s ||T_s|| < \infty$

3) pour tout $x \in E$, $T_s x$ est faiblement continue en s.

A toute mesure de probabilité μ sur S est associé un opérateur linéaire continu $Mx = \int_S T_s x \, d\mu(s)$, l'intégrale étant définie au sens fort dans E. Supposons désormais μ fixée. On se demande à quelle condition $Mx = x$ implique $T_s x = x$ pour tout s dans le support de μ (noté $\mathrm{supp}(\mu)$). L'énoncé de Brunel se place dans ce cadre en prenant $S = \mathbb{N}^2$ et $\mu = \lambda\delta_{(1,0)} + (1-\lambda)\delta_{(0,1)}$ (δ désigne les mesures de Dirac).

<u>Proposition</u>. Si chaque fonction h continue bornée et μ-harmonique à droite (i.e. $\int_S h(uv)\, d\mu(v) = h(u)$), est constante, égale à $h(e)$, sur $\mathrm{supp}(\mu)$, alors $\int_S T_s x \, d\mu(s) = x$ entraîne $T_s x = x$ pour tout $s \in \mathrm{supp}(\mu)$.

Démonstration : $< T_s x, x' > = < T_s M x, x' > =$

$$< T_s \int_S T_t x \, d\mu(t), x' > = \int_S < T_s T_t x, x' > d\mu(t)$$

où x' est une forme linéaire continue sur E. Donc $h(s) = < T_s x, x'>$ est une fonction continue bornée, μ-harmonique à droite, et le résultat s'en suit.

Quand S est abélien, l'hypothèse de la proposition est toujours vérifiée, en vertu du théorème de Choquet-Deny.

<u>Théorème</u> : Si S est abélien, $\int_S T_s x \, d\mu(s) = x$ entraîne $T_s x = x$ pour tout $s \in \mathrm{supp}(\mu)$.

Si S est un sous-semi-groupe d'un groupe abélien localement compact séparable G et si $\mathrm{supp}(\mu)$ engendre topologiquement G, alors on obtient même $T_s x = x$ pour tout $s \in S$.

Dans le cas non abélien l'étude des fonctions harmoniques a fait l'objet de nombreux travaux. Mentionnons seulement le résultat d'Avez (1974) : "Si S est discret, engendré par $\mathrm{supp}(\mu) = V$ supposé fini, si $\lim_n \frac{1}{n} \log(\mathrm{card}\, V^n) = 0$, alors les fonctions μ-harmoniques bornées sont constantes". La proposition donne alors aussitôt l'énoncé suivant.

<u>Théorème</u>. Soient $T_1, \dots, T_\ell$ des contractions linéaires de E, telles que le nombre $c(n)$ des opérateurs s'écrivant $(T_{i_1} \dots T_{i_n})$ avec $i_j \in \{1\dots\ell\}$, vérifie $\lim\limits_n \frac{1}{n} \log c(n) = 0$. Alors $\sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_i T_i x = x$ avec $\lambda_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\ell} \lambda_i = 1$, entraîne $T_i x = x$ pour $i = 1 \dots \ell$.

Pour conclure, voici une démonstration directe du théorème de Choquet-Deny formulé de façon un peu abstraite.

<u>Théorème</u>. Soit S un semi-groupe localement compact séparable et μ une probabilité sur S. Soit h une fonction mesurable bornée, μ-harmonique à droite et à gauche (i.e. $h(s) = \int_S h(st)\, d\mu\,(t) = \int_S h(ts)\, d\mu\,(t)$). Alors $h \equiv h(e)$ μ p.p.

Si de plus h est continue alors h est constante sur le sous-semi-groupe fermé de S engendré par $\mathrm{supp}(\mu)$.

Démonstration : Soit $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ l'espace produit infini muni de la mesure produit $P = \mu^{\otimes \mathbb{N}}$. Les coordonnées sont notées $X_1, \dots, X_n, \dots$ On pose $Y_n = (X_1 \dots X_n)$ (produit dans S). Par μ-harmonicité à droite on a pour f mesurable bornée quelconque :

$$\int_\Omega (h(Y_{n+1}) - h(Y_n))\, f(Y_n, \dots, Y_1)\, dP$$

$$= \int_\Omega \left(\int_S (h(Y_n\, x_{n+1}) - h(Y_n))\, f(Y_n, \dots, Y_1)\, d\mu\,(x_{n+1})\right) dP = 0$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{N} \int (h(Y_{n+1}) - h(Y_n))^2\, dP = \int (h(Y_{n+1}) - h(e))^2\, dP.$$

Comme h est bornée la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int (h(Y_{n+1}) - h(Y_n))^2\, dP$ converge ; par le théorème de convergence monotone et le théorème de Fubini cette série vaut

$$\int_S \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_\Omega (h(Y_n u) - h(Y_n))^2 \, dP \right) d\mu \, (u) .$$

Donc μ p.p. en u, $\lim_n \int_\Omega (h(Y_n u) - h(Y_n))^2 \, dP = 0$

et aussi $\lim_n \int_\Omega (h(Y_n u) - h(Y_n)) \, dP = 0$. Par μ-harmonicité à gauche on trouve $\int_\Omega (h(Y_n u) - h(Y_n)) \, dP = h(u) - h(e)$ d'où $h \equiv h(e)$ μ p.p.

On trouve de même $h \equiv h(e)$ μ^n p.p. pour tout n. La seconde assertion en résulte aussitôt car le sous-semi-groupe fermé engendré par $\mathrm{supp}(\mu)$ est $\left[\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{supp}(\mu^n)\right]^a$.

Remarques : En général, si S n'est pas abélien, une translatée de h perd la μ-harmonicité du côté de la translation.

Dans la démonstration précédente, la mesure produit infini P, qu'il est commode d'utiliser pour ne pas alourdir les notations, ne joue pas réellement de rôle, seules les mesures produit $\mu^{\otimes n}$ comptent.

REFERENCES

AVEZ A. (1974) : Théorème de Choquet-Deny pour les groupes à croissance non exponentielle.
CRAS Paris t. 279, A, 25-28

BRUNEL A. (1970) New conditions for existence of invariant measures in ergodic theory.
Lecture notes in Math. n° 160 Springer

FOGUEL S., WEISS B. (1973) : On convex power series of a conservative Markov operator.
Proceedings A.M.S. Vol. 38 n° 2, 325-330

LIN M. (1977) : Ergodic properties of an operator obtained from a continuous representation.
Ann. Inst. H. Poincaré Sec. B t. XIII n° 4, 1977, 321-331

NAGEL R., PALM G. and DERNDINGER R. (à paraître) : Ergodic theory in the Perspective of Functional Analysis : 13 lectures.

RAUGI A. (1983) : Une démonstration d'un théorème de Choquet-Deny par les martingales.
Ann. Inst. H. Poincaré, vol. XIX, n° 1, 101-109

REVUZ D. (1975) : Markov Chains
North Holland pub.

Y. DERRIENNIC
Faculté des Sciences
6, avenue Victor Le Gorgeu
29283 BREST

Reçu en Mai 1985