ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

M. LEBAH
J. PELLAUMAIL

Balance locale dans les réseaux à trois stations

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 85, série *Probabilités et applications*, n° 3 (1985), p. 45-55
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1985__85_3_45_0>

BALANCE LOCALE DANS LES RESEAUX A TROIS STATIONS

M. LEBAH et J. PELLAUMAIL

RESUME

On étudie systématiquement tous les réseaux ouverts (resp. fermés) comprenant deux (resp. trois) stations quand il y a balance locale dans l'une des stations. On prouve notamment qu'il y a balance locale pour toutes les stations.

ABSTRACT

Closed queuing networks with three stations and open queuing networks with two stations are investigated when there is local balance in one station. In particular, it is shown that, in this case, local balance holds for all stations.

1. INTRODUCTION

Ce travail se situe dans le cadre général de l'étude des probabilités stationnaires des réseaux de files d'attente. Plus précisément, pour de tels réseaux, l'importance de la notion de balance locale est bien connue (cf. [Jac], [BCMP], [ ], etc...). Dans [Pel], il est montré que si une station satisfait à cette propriété de balance locale, on peut la remplacer par tout un réseau "standard" en ayant la "forme produit".

Il est donc naturel d'étudier systématiquement les "petits" réseaux dans lesquels l'une des stations possède la propriété de balance locale. On étudie ici de tels réseaux comprenant deux stations dans le cas ouvert ou trois stations dans le cas fermé.

2. CADRE GENERAL

Dans toute cette étude, on considère un processus markovien homogène qui évolue en temps continu et dont l'ensemble des états E est contenu dans $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.

Pour tout couple (e,e') d'éléments de E avec $e \neq e'$, on pose :

$$g(e,e') := \lim_{h \downarrow o} \frac{1}{h} \text{ Proba } [X_{t+h} = e' \mid X_t = e]$$

La fonction g caractérise le générateur infinitésimal et donc l'évolution du processus X.

On suppose que le processus X est ergodique et, pour tout état $e := (i,j)$, on notera $p(e) = p(i,j)$ la probabilité stationnaire, pour ce processus, d'être dans l'état e. On supposera que E a été choisi en sorte que, pour tout élément e de E, $p(e) > 0$. Si e n'appartient pas à E, on pose $p(e) := 0$. Pour tout état $e := (i,j)$, on pose $e + \delta := (i+1,j)$, $e + \delta' := (i,j+1)$, $(e+\delta-\delta') := (i+1,j-1)$, etc...

On se donne six fonctions à valeurs positives définies sur $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, à savoir a, a', d, d', t et t'. On suppose que, pour tout élément e de E, on a :

$g(e,e+\delta) = a(e)$; $g(e,e+\delta') = a'(e)$

$g(e,e-\delta) = d(e)$; $g(e,e-\delta') = d'(e)$

$g(e,e-\delta+\delta') = t(e)$; $g(e,e+\delta-\delta') = t'(e)$

Dans tous les autres cas on suppose que :

$g(e,e') = n(e,e') = 0$

On suppose évidemment que les fonctions a, etc... sont telles que $g(e,e') = 0$ si e' n'appartient pas à E. Par ailleurs, on suppose que, pour tout élément (i,j) de E, $((i-1)^+,j)$ et $(i,(j-1)^+)$ appartiennent à E où, évidemment, $x^+ := \sup. \{x,0\}$.

Du point de vue physique, l'exemple fondamental de cette situation correspond au cas d'un réseau de files d'attente avec une seule classe de clients et 2 stations (cas ouvert) ou 3 stations (cas fermé). Si le réseau est ouvert et comporte 2 stations A et A', l'état (i,j) correspond au cas où il y a i clients en A et j clients en A'. Si le réseau est fermé - c'est à dire que le nombre total n de clients dans le réseau est fixe - et comporte 3 stations A, A' et B, l'état (i,j) correspond au cas où il y a i clients en A, j clients en A' et (n-i-j) clients en B.

3. BALANCE LOCALE

Par définition, on dit qu'il y a balance locale en A si, quel que soit l'état e, on a :

$$p(e)\left[d(e)+t(e)\right] = p(e-\delta)a(e-\delta)+p(e-\delta+\delta')t'(e-\delta+\delta')$$

On définit de façon analogue la balance locale en A'.

On dira qu'il y a balance locale en B (si le réseau est ouvert, B est l'"extérieur" du réseau) si, quel que soit l'état e, on a :

$$p(e)\left[a(e)+a'(e)\right] = p(e+\delta)d(e+\delta)+p(e+\delta')d'(e+\delta')$$

On dira qu'il y a BLP (balance locale "partout") s'il y a à la fois balance locale en A, en A' et en B.

4. REMARQUES

Il y a deux cas, qui ont fait l'objet de nombreuses études, pour lesquels il est bien connu qu'il y a "balance locale partout".

1°) Cas de Jackson "généralisé" (cf. [Jac])

Dans ce cas il existe trois fonctions positives α, α' et β définies sur $\mathbb{N}$ et trois constantes λ, ν et μ' telles que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1$, $0 \leqslant \mu' \leqslant 1$ et

$$a(i,j) := \lambda\, \beta(i+j)\ , \quad a'(i,j) := (1-\lambda)\beta(i+j)$$

$$d(i,j) := (1-\nu)\alpha(i)\ , \quad d'(i,j) := \mu'\, \alpha'(j)$$

$$t(i,j) := \nu\, \alpha(i)\ , \quad t'(i,j) := (1-\mu')\alpha'(j)$$

Dans ce cas, la probabilité stationnaire satisfait à la forme produit.

2°) Cas réversible (cf. [Kel])

Dans ce cas, pour tout couple (e,e') d'états, on a

$$p(e)g(e,e') = p(e')g(e',e)$$

Si on est à la fois dans le cas de Jackson et dans le cas réversible, on a $\lambda\nu\mu' = (1-\lambda)(1-\nu)(1-\mu')$.

Si on est dans le cas de Jackson, la probabilité stationnaire satisfait à la forme produit ; or, sauf pour des formes très particulières de l'ensemble E, il y a des probabilités sur E qui ne satisfont pas à la forme produit (et donc qui ne peuvent pas être la probabilité stationnaire d'un réseau de Jackson).

Par contre, quelle que soit la probabilité p définie sur $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, il existe un réseau réversible comme défini plus haut, qui admet p comme probabilité stationnaire. En effet, soit (F,G) une partition de $(E\times E)$ telle que, si (e,e') appartient à F, (e',e) appartient à G. Pour $e = e'$ et pour $n(e,e') = 0$, on pose $g(e,e') = g(e',e) = 0$. Dans les autres cas, on définit arbitrairement $g(e,e')$ si (e,e') appartient à F avec $g(e,e') > 0$. Enfin, si (e',e) appartient à G, on pose $g(e',e) := g(e,e') \frac{p(e)}{p(e')}$.

5. THEOREME 1

La balance locale en B implique la balance locale en A, en A' et en B (ce qu'on a appelé B L P). De même la balance locale en A (resp. en A') implique la B L P.

Preuve :

Notons d'abord que ce résultat est intuitivement assez surprenant. En fait, on prouve un peu plus que le théorème énoncé.

Supposons d'abord qu'il y ait balance locale en B pour tous les états (i,j) tels que $(i+j) \leqslant m$, m fixé. On va alors montrer qu'il y a B L P pour ces mêmes états. Raisonnons par récurrence croissante sur m et supposons qu'il y ait B L P pour les états (i,j) tels que $(i+j) < m$ et qu'il y ait balance locale en B pour les états (i,j) tels que $(i+j) = m$. On va démontrer qu'il y a B L P pour les états (i,j) tels que $(i+j) \leqslant m$.

On pose (m étant fixé) :

$$e_k := (k-1,m-k+1) \; ; \; f_k := (k-1,m-k)$$

$$u_k := p(f_k)g(f_k,e_{k+1}) \; ; \; u'_k := p(e_{k+1})g(e_{k+1},f_k)$$

$$x_k := p(e_k)g(e_k,e_{k+1}) \; ; \; y_k := p(e_{k+1})g(e_{k+1},e_k)$$

$$b_k := p(f_k)g(f_k,e_k) \; ; \; b'_k := p(e_k)g(e_k,f_k)$$

La balance locale en B à l'état e_1 implique

$$x_1 + b'_1 = y_1 + b_1$$

Raisonnons par récurrence croissante sur k et supposons que

(1) $\quad x_k + b'_k = y_k + b_k$

D'une part, la balance locale en B à l'état f_k donne :

(2) $\quad u_k + b_k = u'_k + b'_k$

D'autre part, la balance locale en B et l'équation d'équilibre à l'état e_{k+1} donne

(3) $\quad u_k + x_k + b_{k+1} + y_{k+1} = u'_k + y_k + b'_{k+1} + x_{k+1}$

(3)-(1)-(2) donne $\quad b_{k+1} + y_{k+1} = b'_{k+1} + x_{k+1}$

ce qui achève le raisonnement par récurrence. Toutes les relations données précédemment sont donc satisfaites. Notamment, (1)+(2) donne $u_k + x_k = u'_k + y_k$ ce qui est la balance locale en A.

On prouve de façon analogue la balance locale en A' ; on peut aussi noter que la balance locale en B et en A implique la balance locale en A'.

Si on suppose qu'il y a balance locale en A (au lieu d'avoir balance locale en B), on démontre la balance locale en A' de façon tout à fait analogue . Si le réseau est fermé, il s'agit d'une simple permutation sur les stations. Cette vérification est laissée au lecteur.

6. REMARQUES

1°) Le théorème précédent ne s'étend pas aux réseaux comportant quatre stations : plus précisément, il est facile de construire un exemple de réseau fermé comportant quatre stations pour lequel il y a balance locale en une station et pas dans les autres stations.

2°) Quand on considère un réseau ouvert comprenant deux stations - ou un réseau fermé comprenant trois stations - le théorème 1 qui précède montre que le cas où on peut utiliser [Pel] est celui où il y a B L P. Nous allons donc maintenant approfondir ce cas.

3) Plus précisément, le théorème 2 qui suit montre comment vérifier si, oui ou non, pour un générateur infinitésimal donné on a B L P. Par contre, le théorème 3 permet de construire des générateurs infinitésimaux pour lesquels on a B L P. Ce théorème 3 montre aussi que le cas où il y a B L P est très général et il fait le lien entre la B L P et la réversibilité.

7. THEOREME 2

Rappelons que le système considéré est supposé ergodique. On suppose, de plus, que l'ensemble E des états (i,j) tels que $p(i,j) > 0$ est tel que, si (i,k) et (h,j) appartiennent à E, alors (i,j) appartient à E. On suppose aussi que, pour tout élément (i,j) de E, $(t+d)(i,j) > 0$ si $i > 0$ et $(t'+d')(i,j) > 0$ si $j > 0$.

Considérons les fonctions Φ et Φ' définies sur E, par :

- Si $(i,j+1)$ et $(i+1,j)$ appartiennent à E :

$$\Phi(i,j) := \frac{(a+a')(i,j)t'(i,j+1)+a(i,j)d'(i,j+1)}{(d+t)(i+1,j)d'(i,j+1)+d(i+1,j)t'(i,j+1)}$$

- Si $(i,j+1)$ appartient à E et $(i+1,j)$ n'appartient pas à E :

$$\Phi(i,j) := a'(i,j)/d'(i,j+1)$$

- Si $(i,j+1)$ n'appartient pas à E et $(i+1,j)$ appartient à E :

$$\Phi(i,j) := a(i,j)/d(i+1,j)$$

Φ' est définie de façon analogue en intervertissant A et A'.

Alors, il y a B L P si et seulement si, pour tout élément (i,j) de $(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ tel que $(i+1,j+1)$ appartienne à E, on a :

$$\text{(L)} \qquad \Phi(i,j)\Phi'(i+1,j) = \Phi'(i,j)\Phi(i,j+1)$$

L'intérêt de cette condition nécessaire et suffisante est évidemment de s'exprimer directement à partir du générateur infinitésimal.

Preuve :

Supposons d'abord qu'il y ait BLP. En utilisant la balance locale en B pour l'état (i,j) et la balance locale en A pour l'état (i+1,j), on vérifie facilement que si (i+1,j+1) appartient à E, on a

$$p(i+1,j) = \Phi(i,j)p(i,j)$$

De même :

$$p(i+1,j+1) = \Phi'(i+1,j)p(i+1,j)$$

ce qui implique

$$p(i+1,j+1) = \Phi'(i+1,j)\Phi(i,j)p(i,j)$$

De même :

$$p(i+1,j+1) = \Phi(i,j+1)\Phi'(i,j)p(i,j)$$

ce qui implique la condition (L).

Réciproquement, supposons que cette condition (L) est satisfaite. Soit (i,j) un élément de E ; soit $(e_k)_{1\leq k\leq m}$ une suite d'éléments de E telle que $e_1 = (o,o)$, $e_m = (i,j)$ et, pour $1 \leq k \leq m-1$, si $e_k = (u,v)$, alors $e_{k+1} = (u+1,v)$ ou $e_{k+1} = (u,v+1)$. Posons :

$$p(i,j) := p(o,o) \prod_{k=1}^{m-1} \psi(e_k,e_{k+1})$$

où $\qquad \psi(e_k,e_{k+1}) := \Phi(e_k)$ si $e_{k+1} = e_k + \delta$

et $\qquad \psi(e_k,e_{k+1}) := \Phi'(e_k)$ si $e_{k+1} = e_k + \delta'$

On vérifie facilement, à partir de la condition (L), que p(i,j) ne dépend pas de la suite $(e_k)_{1\leq k\leq m}$.

Soit (i,j) tel que (i+1,j+1) appartienne à E. En remarquant que $\Phi(i,j)$ et $\Phi'(i,j)$ ont le même dénominateur, on constate que

$$(d+t)(i+1,j)\Phi(i,j) - t'(i,j+1)\Phi'(i,j) = a(i,j)$$

autrement dit, en multipliant par p(i,j) :

$$(d+t)(i+1,j)p(i+1,j) = (a\,p)(i,j) + t'(i,j+1)p(i,j+1)$$

ce qui est la balance locale en A pour l'état (i+1,j).

On vérifie de même la balance locale en B et A'. L'étude des états (i,j) pour lesquels (i+1,j) (ou (i,j+1)) n'appartient pas à E (s'il y en a !) s'effectue aisément. On vérifie donc qu'il y a balance locale en A, A' et B pour tous les états appartenant à E. La famille p(i,j) est donc la probabilité stationnaire et il y a B L P ce qui achève la preuve du théorème.

8. THEOREME 3

On se donne E (l'ensemble des états (i,j) tels que $p(i,j) > 0$) comme indiqué en 2. Soit $\bar{a}$, $\bar{a}'$, $\bar{d}$, $\bar{d}'$, $\bar{t}$ et $\bar{t}'$ des taux pour lesquels le système est réversible (cf. 4) ; on notera $\bar{p}(e)$ la probabilité stationnaire associée à ces taux.

Soit E' l'ensemble des éléments (i,j) de E tels que (i+1,j) et (i,j+1) appartiennent à E. Soit f une application définie sur E' et à valeurs réelles. On suppose que, pour tout élément (i,j) de E', on a :

$$f(i,j) \leqslant \inf.\{(\bar{p}\,\bar{a})(i,j),\ (\bar{p}\,\bar{t})(i+1,j)\}$$

et

$$-f(i,j) \leqslant (\bar{p}\,\bar{a}')(i,j)$$

On peut alors trouver des fonctions a, a', d, d', t et t' pour lesquelles il y a B L P, pour lesquelles la probabilité stationnaire est $p(i,j) = \bar{p}(i,j)$, et qui satisfont aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} f(i,j) &= (p\ d)(i+1,j) - (p\ a)(i,j) \\ &= (p\ t')(i,j+1) - (p\ t)(i+1,j) \\ &= (p\ a')(i,j) - (p\ d')(i,j+1) \end{aligned}$$

Inversement on peut construire ainsi les réseaux pour lesquels il y a B L P avec les inégalités données plus haut.

Preuve :

Considérons d'abord un réseau pour lequel il y a B L P. On vérifie facilement que, pour tout élément (i,j) de E', on a :

$$(p\,d)(i+1,j) - (p\,a)(i,j) = (p\,t')(i,j+1) - (p\,t)(i+1,j)$$
$$= (p\,a')(i,j) - (p\,d')(i,j+1)$$

On peut donc appeler f(i,j) cette quantité.

Posons :

$\bar{d} := d$; $\bar{d}' := d'$; $\bar{t}' := t'$; $\bar{p} := p$

$$\bar{a}(i,j) := [(p\,a)(i,j) + f(i,j)]\,/p(i,j) = (p\,d)(i+1,j)/p(i,j) \geqslant 0$$

$$\bar{a}'(i,j) := [(p\,a')(i,j) - f(i,j)]\,/p(i,j) = (p\,d')(i,j+1)/p(i,j) \geqslant 0$$

$$\bar{t}(i+1,j) := [(p\,t)(i+1,j) + f(i,j)]\,/p(i+1,j) = (p\,t')(i,j+1)/p(i,j) \geqslant 0$$

Puisque tous les taux définis ci-dessus sont positifs, on vérifie facilement que $\bar{p}$ est la probabilité stationnaire pour $\bar{a}$, $\bar{a}'$, ... et que, relativement à $\bar{p}$, $\bar{a}$, etc..., le réseau est réversible.

Réciproquement, soit $\bar{a}$, ... des taux et $\bar{p}$ la probabilité stationnaire associée en sorte que le réseau soit réversible. Soit f une application comme indiqué dans le théorème.

Posons :

$d := \bar{d}$; $d' := \bar{d}'$; $t' := \bar{t}'$; $p := \bar{p}$

$$a(i,j) := [(\overline{p\,a})(i,j) - f(i,j)]/\bar{p}(i,j)$$

$$a'(i,j) := [(\overline{p\,a}')(i,j) + f(i,j)]/\bar{p}(i,j)$$

$$t(i+1,j) := [(\overline{p\,t})(i+1,j) - f(i,j)]/\bar{p}(i+1,j)$$

On vérifie facilement qu'il y a B L P pour p, a,... ce qui achève la démonstration du théorème.

REFERENCES

[BCMP] F. BASKETT, K.M. CHANDY, R.R. MUNTZ and F.G. PALACIOS, *"Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers"*, J.A.C.M. vol. 22, n° 2, 248-260, 1975.

[GeP] GELENBE et PUJOLLE, *"Introduction aux réseaux de files d'attente"*, Eyrolles, 1982.

[Jac] J.R. JACKSON, *"Jobshop-like queue system"*, Management Sci., vol. 10, 131-142, 1963.

[Kel] F.P. KELLY, *"Reversibility and stochastic networks"*, J. Wiley, 1979.

[Len] LE NY, *"Etude analytique de réseaux de files d'attente multi-classes à routages variables"*, RAIRO, vol. 14, n° 4, 331-347, 1980.

[Pel] J. PELLAUMAIL, *"Formule du produit et décomposition de réseaux de files d'attente"*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 15, n° 3, 261-286, 1979.

Messieurs LEBAH et PELLAUMAIL
I.N.S.A.
20, Avenue des Buttes de Coësmes
35043 RENNES Cédex

Reçu en Juillet 1984