ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Probabilités et applications

P. A. ZANZOTTO

Propriété des lois pour les solutions d'une famille d'équations stochastiques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 78, série *Probabilités et applications*, n° 2 (1984), p. 39-55

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1984__78_2_39_0>

PROPRIETE DES LOIS POUR LES SOLUTIONS D'UNE FAMILLE D'EQUATIONS STOCHASTIQUES

P.A. ZANZOTTO (*)

RESUME :

On considère une suite d'équations stochastiques par rapport à des mesures aléatoires et on donne des conditions suffisantes pour que les lois des processus, solutions(fortes)des équations données, forment un ensemble relativement compact pour la topologie de la convergence étroite des mesures de probabilité sur l'espace de Skorokhod. Le type d'équations considéré a été étudié par M. Métivier ([5]).

ABSTRACT :

We consider a sequence of stochastic equations driven by random measures and we give sufficient conditions in order that the distributions of the (strong) solutions of our equations constitute a family relatively compact in the topology of weak convergence of probability measures on the Skorokhod space. The type of equations we consider has been studied by M. Métivier ([5]).

(*) Membre du groupe de recherche G.N.A.F.A.-C.N.R. (Italie).

0. INTRODUCTION

Dans [5] a été étudiée une équation stochastique de la forme :

$$(0.1) \qquad \xi_t = V_t + \int_{]0,t] \times E} a(\xi,s,x)\; q(ds,dx) \;,$$

où (V_t) est un processus régulier, à valeurs dans un espace de Hilbert $\mathbb{H}$, a est une fonctionnelle prévisible de ξ pouvant dépendre, à l'instant s , du passé tout entier (c'est-à-dire de la restriction du processus $\xi^{\cdot}$ à l'intervalle $[0,s[$) et q est une mesure aléatoire "blanche".

Dans cet article, on considère une suite :

$$(0.2) \qquad \xi_t^n = V_t^n + \int_{]0,t] \times E} a^n(\xi^n,s,x)\; q^n(ds,dx)$$

d'équations du type précédent (avec $\mathbb{H} = \mathbb{R}^k$), et on donne une condition suffisante pour que les lois des processus ξ^n (solutions fortes des équations données) forment un ensemble relativement compact pour la convergence étroite des mesures de probabilité sur l'espace de Skorokhod. Cette condition (voir Théorème (3.2)), est fondée sur un théorème général de compacité, concernant les lois d'une suite de processus, qui a été démontré par Aldous [1] ainsi que sur une conséquence de ce résultat (relative aux cas particuliers des martingales) qui avait été trouvée indépendamment par Rebolledo [7] (voir [4] pour une exposition systématique de ces résultats).

Une application du théorème (3.2) fait intervenir directement (voir corollaire (3.14)) une suite $(A_t^n)_n$ de processus croissants, intrinsèquement liés aux mesures aléatoires q^n .

Dans la partie finale de l'article, on analyse en particulier le cas où les mesures dA_t^n sont absolument continues (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$) et le cas où les mesures q^n sont des mesures de Poisson entrées stationnaires.

Les résultats de cet article ont été publiés sans démonstrations dans [8].

1. RAPPELS

Nous nous proposons dans ce paragraphe de résumer les résultats essentiels concernant l'intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire "blanche" et l'existence de solutions pour une équation stochastique de la forme (0.1).

Dans toute la suite, $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé complet, muni d'une *filtration*, c'est-à-dire, d'une famille $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$, croissante et continue à droite, telle que $\mathcal{F}_0$ contienne la classe des ensembles $\mathbb{P}$-négligeables.

On se donne en outre un sous-espace ouvert E de $\mathbb{R}^d$ et une fonction p continue, bornée et partout strictement positive dans E. On désigne par $\mathcal{M}^p$ l'espace des mesures de Radon réelles m sur E, telles que l'on ait

$$\|m\|_p := \int p(x)\ |m|\ (dx) < +\infty .$$

On considère $\mathcal{M}^p$ (muni de la norme $\|m\|_p$) comme un sous-espace du dual de l'espace $\mathcal{C}^p$ des fonctions φ, continues dans E et telles que φ/p soit bornée, muni de la norme

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x\in E}\ (|\varphi(x)|\ /\ p(x)) .$$

(On note $<\varphi,m>$ la forme bilinéaire $\int_E \varphi(x)\ dm(x)$ qui définit la dualité entre $\mathcal{C}^p$ et $\mathcal{M}^p$).

Une *mesure aléatoire* μ est une famille $(\mu(\omega;ds,dx))_{\omega\in\Omega}$ de mesures de Radon réelles sur $\mathbb{R}_+\times E$, telle que, pour tout t, la restriction de $\mu(\omega;ds,dx)$ au sous-espace $[0,t]\times E$ soit bornée et vérifie la condition :

$$\int_{[0,t]\times E} p(x)\ |\mu|\ (\omega;ds,dx) < +\infty .$$

Le *processus primitif* de μ est le processus F^μ, à valeurs dans $\mathcal{M}^p$, défini par

$$<\varphi, F^{\mu}(t,\omega)> = \int_{[0,t]\times E} \varphi(x)\ \mu(\omega;ds,dx)$$

pour tout élément φ de $\mathscr{C}^p$.

La mesure aléatoire μ est dite *optionnelle* (resp. *prévisible*) par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_t)$, si, pour tout élément φ de $\mathscr{C}^p$, le processus réel $(t,\omega) \rightsquigarrow <\varphi, F^{\mu}(t,\omega)>$ est optionnel (resp. prévisible) par rapport à $(\mathscr{F}_t)$.

Grâce à la séparabilité de $\mathscr{C}^p$, si la mesure aléatoire μ est optionnelle (resp. prévisible), il en est de même des mesures aléatoires $|\mu|$, μ^+ , μ^- , donc aussi du processus réel

$$\| F^{\mu}(t,\omega) \|_p = < p, F^{|\mu|}(t,\omega)> .$$

On dit que la mesure aléatoire μ est *blanche* si, pour tout élément φ de $\mathscr{C}^p$, le processus réel $<\varphi, F^{\mu}(t,\omega)>$ est une martingale (pour la filtration $(\mathscr{F}_t)$) .

Etant donné une mesure aléatoire optionnelle blanche $q(\omega;ds,dx)$ et un espace de Hilbert $\mathbb{H}$ séparable, *l'intégrale stochastique* par rapport à q peut être définie pour une classe Λ_q de fonctions Y , définies dans $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times E$, à valeurs dans $\mathbb{H}$, mesurables par rapport à $\mathscr{P}\otimes\mathscr{B}(E)$ (où $\mathscr{P}$ désigne la tribu prévisible sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$). De façon précise, la classe Λ_q est constituée par les fonctions Y qui vérifient la condition

$$\mathbb{E}\left[\int_{]0,+\infty[} \lambda_s(Y)\ db(s) \right] < +\infty ,$$

où $b(t,\omega)$ est un processus croissant, univoquement déterminé par q , et où $\lambda_s(Y)$ est un processus réel positif déterminé par le couple (Y,q) (voir [5]).

L'intégrale de Y par rapport à q est une martingale M de carré intégrable, à valeurs dans $\mathbb{H}$, que l'on désigne par l'une des notations suivantes :

$$M = \int Y \, d\, F^q \quad , \quad M(t,\omega) = \int_{]0,t] \times E} Y(\omega;s,u)\; q(\omega;ds,du)\ .$$

La définition de l'intégrale stochastique se prolonge ensuite, par les procédés habituels, aux processus Y qui sont "localement" dans Λ_q. L'intégrale $M = \int Y \, d\, F^q$ (qui est alors une martingale à valeurs dans $\mathbb{H}$, localement de carré intégrable) est liée à la mesure q et aux processus $b(t,\omega)$ et $\lambda_s(Y)$ par les relations

$$(1.1) \qquad \langle M\rangle_t = \int_{]0,t]} \lambda_s(Y)\, db(s) \quad , \quad \mathbb{E}\left[\|M_t\|^2_{\mathbb{H}}\right] = \mathbb{E}\left[\int_{]0,t]} \lambda_s(Y)\, db(s)\right] ,$$

où $\langle M\rangle_t$ désigne le processus de Meyer associé à $\|M_t\|^2_{\mathbb{H}}$.

Un *couple de contrôle* pour q est un couple (γ,A) de processus possédant les propriétés suivantes :

1°) $\gamma(\omega;s,dx \otimes dy)$ est un processus à valeurs dans $\mathscr{M}^{p\otimes p}$, tel que, pour tout élément φ de $\mathscr{C}^{p\otimes p}$, le processus réel

$$(t,\omega) \leadsto \int_{[0,t] \times E \times E} \varphi(x,y)\; \gamma(\omega;ds,dx \otimes dy)$$

soit optionnel ;

2°) A est un processus croissant positif ;

3°) pour tout processus Y, à valeurs dans $\mathbb{H}$, localement dans Λ_q, et pour tout temps d'arrêt τ, on a

$$(1.2) \qquad \mathbb{E}\left[\sup_{t<\tau} \left\|\int_{]0,t] \times E} Y(s,.,x)\; q(.;ds,dx)\right\|^2_{\mathbb{H}}\right]$$
$$\leqslant \mathbb{E}\left[\int_{]0,\tau[} dA_s \int_{E\times E} \langle Y(s,.,x),Y(s,.,y)\rangle_{\mathbb{H}}\; \gamma(.;s,dx\otimes dy)\right] .$$

L'existence d'un couple de contrôle est démontrée dans [5].

Si l'on pose :

$$(1.3) \qquad \mu_s(Y) = \int_{E\times E} \langle Y(s,.x),Y(s,.y)\rangle_{\mathbb{H}}\; \gamma(.;s,dx\otimes dy)$$

et si l'on désigne par M l'intégrale stochastique $\int Y\, d\, F^q$, on a aussi la relation

$$(1.4) \qquad \langle M\rangle_\tau - \langle M\rangle_\sigma = \int_{]\sigma,\tau]} \lambda_s(Y)\, db(s) \leq \int_{]\sigma,\tau]} \mu_s(Y)\, dA_s$$

pour tout couple σ,τ de temps d'arrêt tels que $\sigma \leq \tau$.

Dans [5], on considère l'équation :

$$(1.5) \qquad \xi_t = V_t + \int_{]0,t]\times E} a(.;s,\xi,x)\, q(.;ds,dx) ,$$

où V est un processus régulier (c'est-à-dire adapté, à trajectoires continues à droite et pourvues des limites à gauche) à valeurs dans $\mathbb{H}$, et où a est une fonctionnelle qui associe, à tout processus régulier ξ (à valeurs dans $\mathbb{H}$) et à tout élément x de E , un processus prévisible $(a(.;s,\xi,x))_{s\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $\mathbb{H}$.

L'existence et l'unicité (à indistinguabilité près) d'un processus régulier ξ (défini dans $\mathbb{R}_+\times\Omega$ tout entier) vérifiant l'équation (1.5) est démontrée dans [5] sous les hypothèses suivantes :

a) Pour tout ξ , $a(\xi)$ est localement dans Λ_q .

b) Pour tout temps d'arrêt τ et pour tout élément x de E , la v.a. $a(.;\tau,\xi,x)$ ne dépend que de la restriction de ξ à $[0,\tau[$.

c) (Condition de Lipschitz locale). Il existe un processus continu à droite, croissant adapté positif L , tel que l'on ait :

$$\int_r^t \mu_s(a(\xi) - a(\xi'))\, dA_s \leq \int_r^t \sup_{s<u} \|\xi_s - \xi'_s\|^2_{\mathbb{H}}\, dL(u)$$

pour tout couple r,t d'éléments de $\mathbb{R}_+$ avec $r < t$ et pour tout couple ξ,ξ' de processus réguliers à valeurs dans $\mathbb{H}$.

d) Il existe un processus continu à droite, croissant, adapté, positif B , tel que, pour tout élément t de $\mathbb{R}_+$ et tout processus ξ régulier on ait :

$$\int_0^t \mu_s(a(\xi))\, dA_s \leq \int_0^t (1 + \sup_{s<t} \|\xi_s\|^2_{\mathbb{H}})\, dB_s .$$

Les résultats de [5] sont fondés sur le lemme suivant (voir [6]), dont nous aurons besoin par la suite.

LEMME (1.6) : Soient A *un processus continu à droite, croissant, adapté, défini dans l'intervalle stochastique* $[0,\tau[$ *, à valeurs dans* $[0,\ell]$ *;* ϕ *un processus positif croissant adapté ;* K, ρ *des constantes réelles.*

On suppose que l'on ait :

$$\mathbb{E}\left[\phi_{\sigma^-}\right] \leq K + \rho\, \mathbb{E}\left[\int_{[0,\sigma[} \phi_{s^-}\, dA_s\right]$$

pour tout temps d'arrêt $\sigma \leq \tau$ *. On a alors :*

$$\mathbb{E}\left[\phi_{\tau^-}\right] \leq 2K \sum_{j=0}^{[2\rho\ell]} (2\rho\ell)^j \ ,$$

où $[x]$ *désigne la partie entière de* x *.*

2. CONDITIONS SUFFISANTES DE COMPACITE

Nous rappelons maintenant deux conditions suffisantes de compacité concernant des lois de probabilité sur l'espace $\mathbb{D}$ des trajectoires continues à droite et pourvues de limite à gauche, à valeurs dans $\mathbb{R}^K$, muni de la topologie de Skorokhod (voir [2] pour la définition de cette topologie).

Pour tout n, soit $X^n = (X^n_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un processus régulier à valeurs dans $\mathbb{R}^K$, défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathbb{P}^n)$ muni d'une filtration $(\mathscr{F}^n_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

DEFINITION : *Les conditions (I) et (II) suivantes :*

(I) Pour tout $N > 0$ *et tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un* $\beta > 0$ *et un* n_0 *tels que l'on ait*

$$\sup_{n\geq n_0} \mathbb{P}^n(\{\sup_{0\leq t\leq N} |X^n_t| > \beta\}) \leq \varepsilon \ ;$$

(II) Pour tout $N > 0$*, tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\eta > 0$*, il existe un* $\delta > 0$ *et un* n_0 *tels que l'on ait :*

$$\sup_{n\geq n_0} \ \sup_{\theta\in[0,\delta]} \mathbb{P}^n(\{|X^n_{\tau_n+\theta} - X^n_{\tau_n}| > \eta\}) \leq \varepsilon$$

pour toute suite (τ_n) *de temps d'arrêt à valeurs dans* $[0,N]$*, (avec* τ_n *temps d'arrêt de la filtration* $(\mathscr{F}^n_t)$ *) ;*

seront appelées condition d'Aldous (I) et respectivement (II) pour la suite $(X^n)_n$ *de processus.*

Aldous [1] a montré que, si la suite $(X^n)_n$ satisfait aux conditions (I) et (II), alors les lois des X^n forment un ensemble relativement compact pour la topologie de la convergence étroite des mesures de probabilité sur $\mathbb{D}$.

Dans le cas particulier où les processus X^n sont des martingales, localement de carré intégrable, il suffit (voir [7] ou [4]), pour avoir la relative compacité des lois des processus X^n, que la suite $(\langle X^n\rangle)_n$ des processus de Meyer associés aux X^n satisfasse aux deux conditions d'Aldous (I) et (II).

3. RESULTATS DE COMPACITE

Considérons maintenant une suite d'équations stochastiques :

$$(3.1) \qquad \xi_t^n = V_t^n + \int_{]0,t] \times E} a^n(\xi^n,s,x)\, q^n(ds,dx) \ ,$$

où, pour tout n , a^n est une fonctionnelle à valeurs dans $\mathbb{R}^K$.

Pour tout n , on suppose remplies les conditions (a), (b), (c) et (d) du paragraphe 1 par rapport à la fonctionnelle a^n et à la mesure q^n . En particulier, si (γ^n,A^n) désigne le couple de contrôle de la mesure aléatoire q^n , l'hypothèse suivante est remplie :

[i] : il existe pour tout n , un processus continu à droite, croissant, adapté, positif B^n , tel que, si μ_t^n est défini par rapport à γ^n par l'analogue de (1.3), on ait, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout processus régulier ξ à valeurs dans $\mathbb{R}^K$:

$$\int_0^t \mu_s^n(a^n(\xi))\, dA_s^n \leq \int_0^t (1 + \sup_{u<s} \|\xi_u\|^2)\, dB_s^n \quad ,$$

$\|\xi\|$ désignant la norme de ξ dans $\mathbb{R}^K$.

On a alors le théorème suivant :

<u>*THEOREME (3.2)*</u> *: On suppose que les suites de processus* $(V_t^n)_n$ *et* $(B_t^n)_n$ *satisfassent aux conditions d'Aldous (I) et (II).*

Dans ces hypothèses, la suite des lois des processus $(\xi^n)_n$ *, solutions des équations de la suite (3.1), est une famille relativement compacte, pour la topologie de la convergence étroite des mesures de probabilité sur l'espace* $\mathbb{D}$.

Nous démontrerons d'abord un petit lemme :

<u>*LEMME (3.3)*</u> *: On considère une équation intégrale de la forme (1.5), telle que la fonctionnelle* a *et le couple de contrôle* (γ,A) *de la mesure aléatoire* q *satisfassent aux hypothèses (a), (b), (c) et (d) du paragraphe 1.*

On pose, pour tout t *,* $V_t^* = \sup_{s \leq t} \|V_s\|_{\mathbb{H}}$.

Après avoir fixé $N > 0$ *, on définit, pour tout* $\beta > 0$ *, le temps d'arrêt*

$$\tau_\beta := \inf\{ t \in \mathbb{R}_+ : V_t^* + B_t > \beta\} \wedge N .$$

Il existe alors une constante $R(\beta)$ *, qui ne dépend que de* β *, telle que l'on ait*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s<\tau_\beta} \|\xi_s\|^2_{\mathbb{H}}\right] \leq R(\beta) .$$

Plus précisément, on peut prendre :

$$R(\beta) = 4(\beta + \beta^2) . \sum_{j=0}^{[4\beta]} (4\beta)^j$$

où $[x]$ *désigne la partie entière de* $x > 0$.

<u>DEMONSTRATION</u> : Il s'agit d'une application du lemme (1.6).

Après avoir posé

$$M(t) := \int_{]0,t]\times E} a(\xi,s,x)\ q(ds,dx)$$

en tenant compte de l'hypothèse (d), on a, pour tout temps d'arrêt $v \leq \tau_\beta$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{s<v} \|\xi_s\|^2_{\mathbb{H}}\right] &\leq 2\ \mathbb{E}\left[\sup_{s<v} \|V_s\|^2_{\mathbb{H}}\right] + 2\ \mathbb{E}\left[\sup_{s<v} \|M(s)\|^2_{\mathbb{H}}\right] \\
&\leq 2\ \beta^2 + 2\ \mathbb{E}\left[\int_{]0,v[} \mu_s(a(\xi))\ dA_s\right] \\
&\leq 2\ \beta^2 + 2\ \mathbb{E}\left[\int_{]0,v[} (1 + \sup_{t<s} \|\xi_t\|^2_{\mathbb{H}})\ dB_s\right] \\
&\leq 2\ \beta^2 + 2\ \mathbb{E}\left[\int_{]0,v[} dB_s\right] + 2\ \mathbb{E}\left[\int_{]0,v[} \sup_{t<s} \|\xi_t\|^2_{\mathbb{H}}\ dB_s\right] \\
&\leq 2\ \beta^2 + 2\ \mathbb{E}\left[B_{v-}\right] + 2\ \mathbb{E}\left[\int_{]0,v[} \sup_{t<s} \|\xi_t\|^2_{\mathbb{H}}\ dB_s\right] \\
&\leq 2\ \beta^2 + 2\ \beta + 2\ \mathbb{E}\left[\int_{]0,v[} \sup_{t<s} \|\xi_t\|^2_{\mathbb{H}}\ dB_s\right] .
\end{aligned}$$

Pour obtenir la conclusion, il suffit d'appliquer le lemme (1.6) au processus $\phi_s := \sup_{t<s} \|\xi_t\|^2_{\mathbb{H}}$, en tenant compte du fait que sur l'intervalle stochastique $[0,\tau_\beta[$ on a $B_t(\omega) < \beta$. ▪

Démontrons donc le théorème (3.2).

Il suffit pour cela de démontrer que les conditions d'Aldous (I) et (II) sont remplies par la suite des processus $(<M_n>)_n$, où l'on a posé, de la même manière que dans le lemme précédent,

$$M_n(t) := \int_{]0,t]\times E} a^n(\xi^n,s,x)\, q^n(ds,dx) \quad (n \in \mathbb{N}) ,$$

ξ^n étant la solution de l'équation n-ième de (3.1).

De (1.4) et de l'hypothèse [i] il vient, pour tout n et tout t :

$$(3.4) \qquad <M_n(t)> = \int_{]0,t]} \lambda^n_s(a^n(\xi^n))\, db^n(s)$$
$$\leq \int_{]0,t]} \mu^n_s(a^n(\xi^n))\, dA^n_s \leq \int_{]0,t]} (1 + \sup_{t<s} \|\xi^n_t\|^2)\, dB^n_s .$$

Pour tout $N > 0$ et tout $\beta > 0$, on fixe un $N' > N$ quelconque et on introduit la suite de temps d'arrêt $(\tau_\beta(n))_n$ définie par

$$\tau_\beta(n) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : (V^n_t)^* + B^n_t > \beta\} \wedge N' .$$

D'après le lemme (3.3), il existe une constante $R(\beta)$, indépendante de n , telle qu'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(3.5) \qquad \mathbb{E}\Big[\sup_{s<\tau_\beta(n)} \|\xi^n_s\|^2\Big] \leq R(\beta) .$$

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ fixé, on peut donc déterminer une constante $K(\beta)$ telle que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(3.6) \qquad \mathbb{P}^n\Big(\Big\{\sup_{s<\tau_\beta(n)} \|\xi^n_s\|^2 > K(\beta)\Big\}\Big) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

En comparant (3.4) et (3.6) et en tenant compte de la définition de $\tau_\beta(n)$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\beta > 0$:

(3.7) $\quad \mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{0\leq t<\tau_\beta(n)} <M_n(t)> \, > (1+K(\beta))\,\beta\, N'\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$

On exprime maintenant la condition d'Aldous (I) pour les suites $(V^n)_n$ et $(B^n)_n$: par rapport à $\frac{\varepsilon}{2}$, on peut déterminer $\beta(\varepsilon) > 0$ et un entier $n_0(\varepsilon)$ tels que :

(3.8) $\quad \sup_{n\geq n_0(\varepsilon)} \mathbb{P}^n\left(\left\{\omega : (V^n_{N'}(\omega))^* + B^n_{N'}(\omega) > \beta(\varepsilon)\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$

D'après la définition de $\tau_\beta(n)$, cela entraîne, pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$:

(3.9) $\quad \mathbb{P}^n\left(\left\{\tau_{\beta(\varepsilon)}(n) < N'\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$

Pour tout $c > 0$ et tout temps d'arrêt $\tau \leq N'$ on a, d'autre part :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{0\leq t<N'} <M_n(t)> \; > c\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{0\leq t<\tau} <M_n(t)> \, > c\right\}\cap\left\{t=N'\right\}\right) + \mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{0\leq t<N'} <M_n(t)> \, > c\right\}\cap\left\{\tau<N'\right\}\right) \\
&\leq \mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{0\leq t<\tau} <M_n(t)> \; > c\right\}\right) + \mathbb{P}^n\left(\left\{\tau < N'\right\}\right) ;
\end{aligned}$$

on applique cette inégalité à $c = (1+K(\beta(\varepsilon)))\,N'\beta(\varepsilon)$, $\tau = \tau_{\beta(\varepsilon)}(n)$ et on conclut, d'après (3.7) et (3.9), que, pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$, on a :

$$\mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{0\leq t<N'} <M_n(t)> \; > \; (1+K(\beta(\varepsilon)))\; N'\beta(\varepsilon)\right\}\right) < \varepsilon ,$$

et donc, pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$:

$$\mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{0\leq t\leq N} <M_n(t)> \; > \; (1+K(\beta(\varepsilon)))\; N'\beta(\varepsilon)\right\}\right) < \varepsilon .$$

La condition d'Aldous (I) est remplie par la suite $(<M_n>)_n$.

On va maintenant vérifier que $(<M_n>)_n$ satisfait aussi à la condition d'Aldous (II).

Soit donc, pour tout n, τ_n un temps d'arrêt relatif à la filtration $(\mathcal{F}^n_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, à valeurs dans $[0,N]$.

Choisissons $\delta' > 0$ tel que l'on ait $\delta' > N' - N$.

D'après (1.4), il vient, pour tout n :

(3.10) $$\langle M_n(\tau_n + \delta')\rangle - \langle M_n(\tau_n)\rangle = \int_{]\tau_n,\tau_n+\delta']} \lambda_s^n(a^n(\xi^n))\, db^n(s)$$

$$\leq \int_{]\tau_n,\tau_n+\delta']} \mu_s^n(a^n(\xi^n))\, dA_s^n$$

$$\leq \int_{]\tau_n,\tau_n+\delta']} (1 + \sup_{t<s} \|\xi_t^n\|)\, dB_s^n .$$

Remarquons que, pour tout $c > 0$ et tout temps d'arrêt $\tau \leq N'$, on a :

(3.11) $$\mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{t<N'} \|\xi_t^n\|^2 > c\right\}\right) \leq \mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{t<\tau} \|\xi_t^n\|^2 > c\right\}\right) + \mathbb{P}^n\left(\left\{\tau < N'\right\}\right),$$

et choisissons :

a) $c := K(\beta(\varepsilon))$, où $\beta(\varepsilon)$ est le nombre pour lequel (3.8) est valable et $K(\beta(\varepsilon))$ est la constante pour laquelle est valable (3.6) par rapport aux temps d'arrêt $\tau_{\beta(\varepsilon)}(n)$;

b) $\tau := \tau_{\beta(\varepsilon)}(n)$.

Si on écrit l'inégalité (3.11) par rapport à $c = K(\beta(\varepsilon))$ et à $\tau = \tau_{\beta(\varepsilon)}(n)$ et l'inégalité (3.6) par rapport à $\tau_{\beta(\varepsilon)}(n)$ et $K(\beta(\varepsilon))$, on trouve, d'après (3.9) :

(3.12) $$\mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{t<N'} \|\xi_t^n\|^2 > K(\beta(\varepsilon))\right\}\right) < \varepsilon ,$$

pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$, où $n_0(\varepsilon)$ est l'entier choisi pour avoir (3.8).

Après avoir fixé $\eta > 0$, choisissons $\overline{q} > 0$ tel que $(1 + K(\beta(\varepsilon)))\,\overline{q} < \eta$.

D'après la condition d'Aldous (II) appliquée à la suite de processus croissants $(B_t^n)_n$, il existe $\delta > 0$, $\delta \leq \delta'$ et l'entier n_1 tels que :

(3.13) $\sup_{n \geq n_1} \mathbb{P}^n\left(\left\{B^n(\tau_n + \delta) - B^n(\tau_n) > \bar{q}\right\}\right) < \varepsilon$.

En posant $\bar{n} := n_0(\varepsilon) \vee n_1$, on tire de (3.10), (3.12) et (3.13) :

$$\sup_{n \geq \bar{n}} \mathbb{P}^n\left(\left\{<M_n(\tau_n + \delta)> - <M_n(\tau_n)> \ > \eta\right\}\right)$$

$$\leq \sup_{n \geq \bar{n}} \mathbb{P}^n\left(\left\{<M_n(\tau_n + \delta)> - <M_n(\tau_n)> \ > \bar{q}(1 + K(\beta(\varepsilon)))\right\}\right) < 2\varepsilon .$$

Cela prouve que la suite $(<M_n>)_n$ satisfait aussi à la condition d'Aldous (II) et conclut la démonstration du théorème. ∎

On suppose maintenant que l'hypothèse [i] soit remplacée par la suivante :

[ii] : il existe, pour tout n , une constante $K_n > 0$, telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout processus régulier ξ à valeurs dans $\mathbb{R}^K$, on ait :

$$\mu_t^n(a(\xi)) \leq K_n(1 + \sup_{u < t} \|\xi_u\|^2) .$$

Cette hypothèse implique évidemment [i] : il suffit de prendre, pour tout n et tout t , $B_t^n := K_n \cdot A_t^n$.

Après, si l'on suppose que la suite $(K_n)_n$ est bornée, on remarque, en posant $L = \sup_n K_n$:

a) que, pour tout $N > 0$ et tout $\beta > 0$, on a :

$$\mathbb{P}^n\left(\left\{\omega : \sup_{0 \leq t \leq N} B_t^n(\omega) > \beta\right\}\right) = \mathbb{P}^n\left(\left\{\omega : K_n \cdot \sup_{0 \leq t \leq N} A_t^n(\omega) > \beta\right\}\right)$$

$$\leq \mathbb{P}^n\left(\left\{\omega : \sup_{0 \leq t \leq N} A_t^n(\omega) > \beta/L\right\}\right) ;$$

b) que, pour tout τ_n temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_t^n)_{t \in \mathbb{R}_+}$, tout $\delta > 0$ et tout $\eta > 0$, on a :

$$\mathbb{P}^n\left(\left\{\omega : B^n(\tau_n + \delta) - B^n(\tau_n) \geq \eta\right\}\right) = \mathbb{P}^n\left(\left\{\omega : K_n \cdot (A^n(\tau_n + \delta) - A^n(\tau_n)) \geq \eta\right\}\right)$$

$$\leq \mathbb{P}^n\left(\left\{\omega : A^n(\tau_n + \delta) - A^n(\tau_n) \geq \eta/L\right\}\right)$$

Des deux inégalités précédentes, il vient que, si la suite de processus croissants $(A^n)_n$ satisfait aux conditions d'Aldous (I) et (II), la suite $(B^n)_n$ satisfait elle aussi aux mêmes conditions.

On a donc le corollaire suivant du théorème (3.2) :

<u>COROLLAIRE (3.14)</u> : *On suppose que l'hypothèse [ii] soit remplie. Alors, si les suites de processus $(V^n)_n$ et $(A^n)_n$ satisfont aux conditions d'Aldous (I) et (II) et si la suite de constantes $(K_n)_n$ est bornée, on a la même conclusion que dans le théorème (3.2).*

Toujours dans l'hypothèse [ii], supposons en plus que, pour $\mathbb{P}^n$-presque tout ω et pour tout n, les mesures de la suite $(dA_t^n)_n$ soient absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$: il existe alors une suite $(\ell_t^n)_n$ de processus $(\mathscr{F}_t^n)_{t\in\mathbb{R}_+}$-réguliers, tels que l'on ait, pour $\mathbb{P}^n$-presque tout ω, pour tout n et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $dA_t^n(\omega) = \ell_t^n(\omega)\, dt$.

Il en résulte, pour tout temps d'arrêt τ_n relatif à la filtration $(\mathscr{F}_t^n)_{t\in\mathbb{R}_+}$, tout $\eta > 0$, tout $\delta > 0$, $\delta < N$:

$$(3.15)\qquad \mathbb{P}^n\left(\left\{A^n(\tau_n+\delta) - A^n(\tau_n) > \eta\right\}\right) = \mathbb{P}^n\left(\left\{\int_{]\tau_n,\tau_n+\delta]} \ell_s^n(\omega)\, ds > \eta\right\}\right)$$

$$\leq \mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{0\leq s\leq 2N} \ell_s^n(\omega) > \eta/\delta\right\}\right) ;$$

et, pour tout $c > 0$, $N > 0$:

$$(3.16)\qquad \mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{0\leq t\leq N} A_t^n(\omega) > c\right\}\right) = \mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{0\leq t\leq N} \int_0^t \ell_s^n(\omega)\, ds > c\right\}\right)$$

$$\leq \mathbb{P}^n\left(\left\{\sup_{0\leq t\leq N} \ell_t^n(\omega) > \frac{c}{N}\right\}\right)$$

D'après (3.15) et (3.16), il est évident que, dans ce cas particulier, si la suite $(\ell^n)_n$ vérifie la condition d'Aldous (I), alors la suite $(A^n)_n$ satisfait aux deux conditions d'Aldous (I) et (II).

Par conséquent, on a le :

COROLLAIRE (3.17) : *On suppose que l'hypothèse [ii] soit remplie et qu'il existe une suite de processus réguliers* $(\ell_t^n)_n$ *, telle que, pour* $\mathbb{P}^n$*-presque tout* ω *, tout* n *et tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *, on ait* $dA_t^n(\omega) = \ell_t^n(\omega)\, dt$ *. Alors, si la suite de processus* $(V^n)_n$ *satisfait aux deux conditions d'Aldous (I) et (II), la suite de constantes* $(K_n)_n$ *est bornée et la suite* $(\ell^n)_n$ *satisfait à la condition d'Aldous (I), on a la même conclusion que dans le théorème (3.2)*

Le cas envisagé dans le corollaire précédent se présente, par exemple, quand les mesures q^n sont des mesures de Poisson centrées stationnaires : la suite $(\ell^n)_n$ est alors (voir par exemple [5]) une suite de processus qui ne dépend ni de t , ni de ω , c'est-à-dire une suite de constantes.

Plus précisément, on a , dans ce cas, pour tout n (et tout t), $\ell_t^n(\omega) = \|\alpha_n\|_p$, α_n étant la mesure de Lévy associée à q^n . La condition d'Aldous (I) signifie alors simplement que la suite $(\|\alpha_n\|_p)_n$ est bornée.

REMARQUE (3.18) : Dans la démonstration du théorème (3.2), les seules propriétés de $(V^n)_n$ que l'on a employées, sont le fait que la suite de leurs lois est relativement compacte, et le fait qu'ils satisfont à la condition d'Aldous (I) ; d'autre part, cette condition est nécessaire pour la relative compacité de la suite des lois.

Par conséquent les conclusions du théorème (3.2) et des corollaires (3.14) et (3.17) restent valables si l'on suppose que la famille des lois de la suite $(V^n)_n$ est relativement compacte sur $\mathbb{D}$ et les autres hypothèses restent inaltérées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. ALDOUS : *Stopping times and tightness*. The Annals of Probability, 1978, Vol. 6, n° 2, p.335-340.

[2] P. BILLINGSLEY : *Convergence of probability measures*. Wiley, New-York.

[3] J. JACOD : *Calcul stochastique et problèmes des martingales*. Lecture Notes in Mathematics, N° 714, Springer (1979).

[4] M. METIVIER : *Sufficient conditions for tightness and weak convergence of a sequence of processes*. Internal Report, University of Minnesota, School of Mathematics, 1979.

[5] M. METIVIER : *Stability theorems for stochastic integral equations driven by Random measures and semimartingales*. Journal of Integral Equations, 3,1981, p. 109-135.

[6] M. METIVIER : *Un "lemme de Gronwall" "stochastique" et application à un théorème de stabilité pour équations différentielles stochastiques*. Note au C.R.A.S., T. 289, série A, 1979, p. 287.

[7] R. REBOLLEDO : *La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi des processus*. Bull. Société Mathématique de France, Mémoire n° 62, 1979.

[8] P.A. ZANZOTTO : *Compacité en loi des solutions d'une famille d'equations stochastiques*. Note au C.R.A.S., PARIS, T. 291, série A, 1980, p. 57.

P.A. ZANZOTTO
Dipartimento di Matematica
dell'Università
Via Buonarroti

2-56100 PISA
Italie

Reçu en Janvier 1984