Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Probabilités et applications

G. Royer

Distance de Fortet-Mourier et fonctions log-concaves

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 78, série *Probabilités et applications*, n° 2 (1984), p. 133-155

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFPA_1984__78_2_133_0>

DISTANCE DE FORTET-MOURIER ET FONCTIONS LOG-CONCAVES

G. ROYER

SUMMARY : In some sense, the cost paid to transform a Gaussian law into another, differing only by its mean is equal to the Euclidean length of the needed translation ; this equality is proved to subsist as an over-estimate after modification by a sufficiently log-concave function. Main application and motivation are taken from a problem of convex interaction in statistical mechanics or field theory.

Dans un travail antérieur sur les champs discrétisés [19], j'avais employé une majoration de distance entre mesures ; ici on se propose : d'expliciter cette majoration sous une forme attrayante, de l'étendre à la dimension quelconque, et de la généraliser un peu ; cela nous permet de retrouver le résultat sur les champs discrets de manière plus directe et d'avoir le résultat correspondant pour la théorie $(P\varphi)_1$. Le résultat le plus lisible en dehors de ces considérations de physique mathématique est 3.3.

Je remercie G. Fourt et L. Mailhot pour des informations sur les fonctions log-concaves à propos d'un travail connexe [14] ; A. Ehrhard et S. Chevet pour d'utiles conversations.

1 - RAPPELS SUR LA DISTANCE DE FORTET-MOURIER

Soit (X,D) un espace métrique séparable que l'on supposera aussi complet et soit $\underline{M}_1$ le convexe des mesures de probabilité μ sur X telles que, pour un x_0 (ou pour tout x_0, c'est égal), $\int D(x_0,x)\,\mu(dx) < \infty$. On définit la distance D sur $\underline{M}_1$ (la même notation est bienvenue puisque $D(\delta_x,\delta_y) = D(x,y)$) par :

$$D(\mu,\nu) = \inf \{\int D(x,y)\,\alpha(dx,dy)\ ;\ \alpha \in R(\mu,\nu)\}\ ,$$

où $R(\mu,\nu)$ est l'ensemble des probabilités sur $X \times X$ se projetant suivant μ et ν sur les deux facteurs. D'après le critère de Prokhorov, $R(\mu,\nu)$ est compact pour la topologie étroite ; donc l'infimum est atteint, l'application $\alpha \longrightarrow \int D(x,y)\,\alpha(dx,dy)$ étant s.c.i. pour cette topologie. On peut se représenter μ et ν comme des tas de charbon et α comme méthode pour transformer μ en ν par transport, D étant alors le coût minimum de transport.

Cette définition est souvent attribuée à Wasserstein quoique elle soit plus ancienne [11] ; en fait cette distance fut d'abord introduite sous une autre forme par Fortet-Mourier [10] :

$$D(\mu,\nu) = \sup_{||f||_L \leq 1} |\int f d\mu - \int f d\nu|,$$

où : $||\cdot||_L$ désigne le pseudo-norme de Lipschitz

$$||f||_L = \sup_{x \neq y} (|f(x) - f(y)| \,/\, D(x,y))\ .$$

La preuve de l'égalité des deux définitions est, d'après Dudley [8], due à Kantorovitch-Rubinstein. Dans le cas où X est fini, auquel on se ramène assez facilement, c'est typiquement un résultat de dualité en programmation linéaire ([20], [9]) mais il vaut mieux employer le théorème de Hahn-Banach directement en dimension infinie ([8], [15]). L'espace $\underline{M}_1$ muni de D est complet ([24]) la topologie correspondante est proche de la convergence étroite (elle coïncide si D est bornée). Cette distance s'est révélée utile dans des situations diverses ; en plus des travaux déjà cités, voir entre autres [12] , [6] ,[22] (Y. Guivarc'h m'a signalé l'aspect lipschitzien de ces derniers travaux dont un précurseur est d'ailleurs [7]). Sur $\mathbb{R}$ muni de la distance $|x-y|$, on a $D(\mu,\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x) - G(x)|\,dx$, où F et G sont les fonctions de répartition de μ et ν ; voir [10].

2 - FONCTIONS LOG-CONCAVES ET INEGALITE DE BASE

2.1 - On dit qu'une fonction positive φ (éventuellement $+\infty$) sur un espace vectoriel E, est log-concave si : $\varphi(ax+by) \geqq (\varphi(x))^a\,(\varphi(y))^b$, pour tous $x,y \in E$, si $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $a+b=1$, en convenant de $0.\infty = 0$; si φ est log-concave, l'ensemble des points où φ est non nulle est convexe (ainsi que l'ensemble où φ est $+\infty$). Des exemples typiques sont $\mathbf{1}_A$ si A est convexe, $\exp(-x^2)$, $\exp(-x^4)$ ou $(\sup(x,0))^2$.

Le théorème de base concernant les fonctions log-concave est le théorème de Prékopa ([23], [25]) : $\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dy$ est une fonction log-concave sur $\mathbb{R}^p$ si $f(x,y)$ est log-concave sur $\mathbb{R}^{n+p}$; en particulier, la convoluée de deux fonctions log-concave est log-concave.

Soit μ une mesure sur E et φ une fonction positive sur E ; on notera $[\varphi\mu]$ la probabilité $(\int \varphi\, d\mu)^{-1}\ \varphi.\mu$, quand elle existe ; on simplifiera cette notation en $[\varphi]$ quand μ est la mesure de Lebesgue.

Plaçons nous tout d'abord sur $\mathbb{R}^n$; $|.|$, $(.,.)$ désignent les normes et produit scalaire euclidiens canoniques de cet espace : $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Soit D une autre distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$; elle provient d'une norme $||.||_D$, elle-même associée à une matrice symétrique de type positif non dégénérée, que l'on notera aussi D, par la formule $||x||_D = (Dx,Dx)^{1/2}$.

Il nous est utile de considérer des matrices de type positif qui ne soient pas symétriques : $B \geqq 0$ signifie $(x,Bx) \geqq 0$ pour tout x. Un produit de matrices positives n'est pas positif en général ; cependant :

2.2 - Lemme

Soit W une fonction $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$, dont la matrice dérivée seconde en tout point t, $W''(t)$, vérifie $CW'' \geqq I$, où C est une matrice symétrique positive non-dégénérée fixée ; alors $W'' \geqq c^{-1} I$ où c est la valeur propre maximale de C (et donc W est convexe) ; $\exp(-(W+g))$ est intégrable pour toute fonction g lipschitzienne.

Démonstration : La matrice W'' est symétrique ; soit α la valeur propre minimale de W'' (en un point fixé $t \in \mathbb{R}^n$), x un vecteur propre normalisé associé. On a $1 \leqq (x, CW''x) = \alpha(x,Cx) \leqq \alpha c$; la propriété d'intégrabilité est une conséquence de la stricte convexité ■

On a aussi l'inégalité $\text{dét}(W'') \geqq (\text{dét}(C))^{-1}$; en effet :

$$CW'' = \frac{1}{2}(CW'' + W''C) + T$$

où T est antisymétrique ; comme $CW'' + W''C$ est symétrique de type positif, d'après une inégalité d'Ostrowski et Taussky $\text{dét}(CW'' \geqq \text{dét}(\frac{1}{2}(CW'' + W''C)) \geqq 1$, puisque $\frac{1}{2}(CW'' + W''C) \geqq I$; voir [2].

L'énoncé suivant est un peu compliqué pour pouvoir englober des situations voisines mais distinctes. On y désigne par A une matrice symétrique positive non dégénérée fixée, par V une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, par g une fonction Lipschitzienne ; $|\nabla g|_\infty = \underset{t \in \mathbb{R}^n}{\text{ess.sup}} (|\nabla g(t)|)$ est défini puisque le gradient ∇g existe presque partout.

2.3 - Théorème

> Si l'on a $D^2 A^2 V'' \geqq \rho D^2$ avec $\rho > 0$, alors :
> $$D(\left[\exp(-V)\right], \left[\exp(-V-g)\right]) \leqq \rho^{-1} |D A^2 \nabla g|_\infty .$$

Remarquons tout de suite que le cas général de cette proposition se déduit facilement du cas $D = I$; en effet la matrice D est une isométrie de $(\mathbb{R}^n, ||.||_D)$ sur $(\mathbb{R}^n, |.|)$ qui transforme $\left[\exp(-V)\right]$ en $\left[\exp(-W)\right]$ avec $W = V \circ D^{-1}$; comme $V'' = DW''D$ l'hypothèse du théorème $D^2 A^2 D W''D \geqq \rho D^2$ revient à $B^2 W'' \geqq \rho I$ avec $B = (D A^2 D)^{1/2}$; on obtient donc une majoration de la distance par $\rho^{-1} | B^2 \nabla(g \circ D^{-1})|_\infty$ qui revient à celle annoncée.

Pour établir la proposition dans le cas $D = I$, on s'appuie sur la méthode bien connue du mouvement brownien avec dérive , qui subsiste d'ailleurs sous des hypothèses plus faibles que celle envisagée ci-dessous.

2.4 - Lemme

> Soit U une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que, d'une part $(\nabla U(x), x)$ est borné inférieurement pour $x \in \mathbb{R}^n$, d'autre part $\exp(-U)$ est intégrable. Le processus de diffusion X_t^x défini par l'équation :
> $$X_t^x = x + B_t - (1/2) \int_0^t \nabla U(X_s^x) ds, \text{ où } (B_t, \Omega, \mathbb{P})$$
> est un mouvement brownien standard, existe pour tout $t > 0$ et l'on a :
> $$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^s \mathbb{E}(f(X_x^x)) ds = \int f(y) \left[\exp(-U(y)\right] dy \quad ,$$
> pour toute fonction f borélienne bornée et tout x.

Démonstration : Soit m : = $\sup_x (- (\nabla U(x),x))$. Pour chaque épreuve ω , la solution $X_t^x(\omega)$ existe, comme le montre la méthode de Picard, sur un intervalle $[0,T(\omega)[$; montrons que T = ∞ presque sûrement ; si T_k est le temps de sortie de la boule de rayon k, la formule de Itô montre que :

$$\mathbb{E}\,(|X|^2_{t\wedge T_k}) + \mathbb{E}\,(\int_0^{t\wedge T_k} (\nabla U(X_s),X_s)ds) = |x|^2 + \mathbb{E}(t\wedge T_k) \;;$$

c'est l'égalité de l'énergie de [3] ; d'après l'hypothèse sur U, on obtient :

$$\mathbb{E}\,(|X^2|_{t\wedge T_k}) \leq |x|^2 + (m+1)\,\mathbb{E}(t\wedge T_k) \leq |x|^2 + (m+1)t,$$

et, en faisant tendre k vers l'infini, on voit que T > t p.s puisque $|X|^2_{S_k} = k^2$ sur $\{T \geq t\}$.

D'autre part, le générateur infinitésimal du processus ainsi défini étant $(\Delta f - (\nabla U,\nabla f))/2$, il est immédiat que la probabilité $[\exp(-U)]$ est invariante ; le théorème ergodique appliqué au processus stationnaire associé montre que pour presque tout x, la limite annoncée est juste. Mais d'après la propriété de Markov on a :

$$\mathbb{E}(f(X_t^x)) = \int \mathbb{E}(f(X_{t-1}^y))\; m(dy),$$

où m est la loi de X_1^x ; m est équivalente à la mesure de Lebesgue, car la formule de Cameron-Martin montre que la loi de X_t^x, $0 \leq t \leq s$ est équivalente à la loi de B_t, $0 \leq t \leq 1$. On conclut par application du théorème de Lebesgue ■

Le calcul qui va suivre est inspiré par celui utilisé pour étudier les équations stochastiques monotones ([3], [21] , et spécialement [24]).

2.5 - Démonstration du théorème 2.3 pour D = I

Considérons les deux processus de diffusion :

$$X_t = AB_t - \frac{1}{2} A^2 \int_0^t \nabla V(X_s)ds$$

et

$$Y_t = AB_t - \frac{1}{2} A^2 \int_0^t (\nabla V(Y_s) + \nabla g(Y_s))ds.$$

Le processus de diffusion $\tilde{X}_t = A^{-1} X_t$ satisfait à une équation du type du lemme 2.4, avec U = V o A. Puisque U" = A(V" o A)A, le lemme 2.2 donne une inégalité du type $U'' \geq kI$, $(k > 0)$, qui montre aussitôt que l'hypothèse du lemme 2.4 est vérifiée. Cela reste vrai pour le processus $A^{-1} Y_t$, en supposant que g est $\mathscr{C}^1$. Par transport par A le lemme 2.4 donne donc :

$$\lim\, (1/t)\; \mathbb{E}\; (f(Y_t)) = \int f(y) \left[\exp(-V(y) - g(y)\; dy\right]$$

pour f borélien bornée. Si de plus $||f||_L \leq 1$, on peut écrire :

(1) $$|\int f(y)\left[\exp -(V(y) - g(y))\,dy\right] - \int f(y)\left[\exp(-V(y))dy\right]|$$

$$= \lim\ (1/t)\ |\mathbb{E}((f(Y_t)-f(X_t)))|$$

$$\leq \underline{\lim}\ (1/t)\ \mathbb{E}(|Y_t - X_t|)$$

$$\leq \underline{\lim}\ (1/t)\ \text{ess.sup}\ |X_t(\omega) - Y_t(\omega)|\ .$$

Soit $\varphi(t) = |X_t - Y_t| = (\sum_{i=1}^{n} (X_t - Y_t)_i^2)^{1/2}$; on a $\frac{d}{dt}(\varphi(t)) = - Q_1 - Q_2$

avec :

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{n} (X_t - Y_t)_i\ (A^2(\nabla V(X_t) - \nabla V(Y_t)))_i$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^{n} (X_t - Y_t)_i\ (A^2\ \nabla g(Y_t))_i\ ;$$

Q_2 est majoré par $\varphi(t)|A^2\nabla g|_\infty$ d'après l'inégalité de Schwarz. D'après la formule des accroissements finis, Q_1 s'écrit pour un certain ξ ,

$$\sum_{i,j,k} (X_t - Y_t)_i\ (A^2)_{ik}\ U''_{kj}(\xi)\ (X_t - Y_t)_j\ \geq\ \rho\,\varphi^2(t),\ \text{puisque } A^2U'' \geq \rho\, I.$$

Donc $(\varphi^2(t))' \leq -\rho\ \varphi^2(t) + |A^2\ \nabla g|_\infty\ \varphi(t)$ avec $\varphi(0) = 0$; l'étude facile de cette inéquation ([20] appendice A) donne $\varphi(t) \leq |A^2\ \nabla g|_\infty /\rho$. Cette inégalité montre, en prenant la borne supérieure en f dans (1) que :

$$D(\left[\exp(-V-g)\right]\ ,\ \left[\exp(-V)\right]) \leq |A^2\ \nabla g|_\infty /\rho$$

On avait supposé g dérivable, mais cette restriction se lève immédiatement par régularisation (si f est contractante, il en est de même de $\mu * f$) pour toute probabilité μ de $\underline{M}_1$) ■

3 - APPLICATIONS

A) Une inégalité de corrélation

Désignons par $\text{cov}_V(f,g)$ la covariance calculée par rapport à la mesure $\left[\exp(-V)\right]$:

$$\text{cov}_V(f,g) = \frac{1}{Z} \int (f(x)-m)(g(x)-n)\ \exp(-V(x))dx$$

où $m = \frac{1}{Z} \int f(x)\ \exp(-V(x))dx$ (resp : n,g), Z constante de normalisation.

3.1 - Théorème

Soit D matrice symétrique positive, non dégénérée, f et g lipschitziennes ; on suppose $D^2 V'' \geqq \rho D^2$; alors :

$$|\mathrm{cov}_V(f\,,g)| \leqq \rho^{-1} |D^{-1}\nabla f|_\infty \; |D\nabla g|_\infty .$$

Démonstration : On vérifie facilement que $\mathrm{cov}_V(f\,,g) = q'(0)$ en posant :

$$q(\tau) = \int f(x)\left[\exp(-V(x) - \tau g(x))\,dx\right] ;$$

d'après le théorème 2.3, appliqué pour A=I, on a :

$$|q(\tau) - q(0)| \leqq (\tau/\rho)\; ||f||_{L,D} \; |D\nabla g|_\infty ;$$

il suffit de remarquer que $||f||_{L,D}$ (norme de Lipschitz pour la distance D) vaut $|D^{-1}\nabla f|_\infty$ ∎

Dans le cas D=I, on a une inégalité bien plus forte de Brascamp et Lieb [13].

$$\mathrm{var}_V(f) \leqq \int (\nabla f(x), (V''(x))^{-1}\; \nabla f(x)) \left[\exp(-V(x))dx\right]$$

pour V'' positive. Nous ne voyons pas comment ramener le cas général du théorème 3.1 au cas D=I. Notons que $D^2V'' \geqq \rho D^2$ implique $V'' \geqq \rho I$ (comme au lemme 2.2).

B) Translation de mesures gaussiennes avec modification par une fonction log-concave

Soit μ une mesure de probabilité quelconque sur $\mathbb{R}^n$, $\mu + a$ la mesure translatée de μ par le vecteur a ; la formule $D(\mu,\mu+a) = ||a||_D$ est évidente et est valable aussi pour une norme non hibertienne. Quelque chose en subsiste après modification par une fonction log-concave, dans certains cas où μ est gaussienne et D hilbertienne.

Etant donné une matrice symétrique positive non dégénérée C, disons qu'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, V, est C-convexe si $CV'' \geqq 0$ et, plus généralement, qu'une distribution V'' est C-convexe si la régularisée par convolution $V * u$ est C-convexe pour toute fonction u positive de l'espace $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. En réalité, toute distribution C-convexe est une fonction convexe (utiliser le lemme 2.2).

3.2 - Proposition

Soit μ une mesure gaussienne non dégénérée de variance σ^2, sur $\mathbb{R}^n$ muni d'une distance hilbertienne D, et $\varphi = \exp(-U)$; si la fonction U est $D^2\sigma^2$- convexe on a :

$$D(\left[\varphi.\mu\right], \left[\varphi.(\mu+a)\right]) \leq \|a\|_D = D(0,a).$$

Démonstration : La mesure $\left[\varphi.(\mu+a)\right]$ n'est autre que $\left[\exp(-V(x)-g(x))dx\right]$ avec $V(x) = U(x) + \frac{1}{2}(x, \sigma^{-2} x)$, $g(x) = -(a, \sigma^{-2} x)$; comme $V'' = U'' + \sigma^{-2}$ et $\nabla g = -\sigma^{-2} a$, le résultat se déduit du théorème 2.3 où l'on choisit $A = \sigma$, du moins dans le cas où U est $\mathscr{C}^2$.

Si U n'est pas $\mathscr{C}^2$, on applique le résultat précédent à $U_n = U * u_n$, où u_n est une suite de fonctions positives lisses dont les supports forment une base de voisinages de 0 ; U étant continue, U_n converge vers U ; comme U est minorée par une forme affine, on peut passer à la limite dans l'inégalité.

$$\left|\left[\varphi_n \mu\right](f) - \left[\varphi_n(\mu+a)\right](f)\right| \leq \|a\|_D \, \|f\|_{L,D} ,$$

simplement par convergence dominée ■

Les cas le plus simple de cette inégalité est le cas où $D = \sigma^{-1}$; on peut alors apporter à l'inégalité deux améliorations : passer à des fonctions log-concaves pouvant s'annuller et généraliser en dimension infinie, améliorations qui devraient aussi pouvoir être apportées dans le cas général.

3.3 - Théorème :

Soit μ une mesure gaussienne sur un espace de Banach séparable E dont $(H, \|.\|_H)$ est l'espace autoreproduisant ; soit φ une fonction log-concave finie sur E. On suppose que l'ensemble des points de discontinuité de φ est négligeable pour μ et que φ est d'intégrale non nulle. Alors il existe une mesure α sur E x E de marginales $\left[\varphi\mu\right]$ et $\left[\varphi(\mu+a)\right]$ telle que :

$$\int \|x-y\|_H \, \alpha(dx,dy) \leq \|a\|_H \text{ en convenant de } \|u\| = +\infty \text{ pour } u \notin H.$$

Bien entendu $||x-y||_H$ est une distance sur E en un sens généralisée et on a ainsi une majoration d'une "distance" de Fortet-Mourier.

Démonstration : Notons d'abord que l'on a une majoration $\varphi(x) \leq r \exp(\ell(x))$ où ℓ est une forme linéaire continue sur E : soit x_0 un point où φ est continue ; pour $\varepsilon > 0$ et $y > 0$ convenablement choisis les parties suivantes de $X \times \mathbb{R}$

$$C_1 = \{(x,y) \ ; \ \exp(y) \leq \varphi(x)\}$$

et

$$C_2 = \{(x,y) \ ; \ |x-x_0|_E < \varepsilon \ , \ \exp(y) > \varphi(x_0) + \eta\}$$

sont convexes et disjointes ; C_2 est ouverte ; on peut donc trouver une forme linéaire continue $\tilde{\ell}$ sur $E \times \mathbb{R}$ que $\tilde{\ell} > 1$ sur C_2 et $\tilde{\ell} \leq 1$ sur C_1 ; est continue puisque C_1 est ouvert ; écrivons $\tilde{\ell}(x,y) = k(y-\ell(x))$; la forme linéaire ℓ sur E convient. La majoration obtenue justifie l'existence de $[\varphi(\mu+a)]$ ainsi que, plus bas, les applications de théorème de Lebesgue.

Plaçons nous tout d'abord dans le cas où E est de dimension finie et μ non dégénérée : $H = E = \mathbb{R}^n$; soit σ^2 la variance de la mesure μ ; la norme de l'espace autoreproduisant n'est autre que $(\sigma^{-1} x, \sigma^{-1} x)^{1/2}$; si φ est strictement positive, le théorème résulte de 3.2 en prenant $U = -\log(\varphi)$ et $D = \sigma^{-1}$. Si φ est quelconque, on pose :

$$\varphi_n = \varphi * \exp(-|x|^2/n^2)/n$$

qui est log-concave et non nulle ; par continuité φ_n converge vers $(2\Pi)^{n/2}\varphi$ et on passe à la limite comme à la fin de la démonstration de 3.2.

Dans le cas général soit e_i, $i \in \mathbb{N}$ une base hilbertienne de H et soient ξ_i les variables aléatoires de $L^2(\mu)$ associées ; on sait (voir [4]) que la série aléatoire $\sum \xi_i e_i$ converge presque sûrement dans E et que la loi de sa somme est μ ; soit a un élément de H, on peut toujours supposer a colinéaire à e_0 ; de même, soit ℓ une forme linéaire continue sur E telle que $\varphi \leq \exp(\ell)$; ℓ définit par restriction à H un élément b de $H = H'$ que l'on peut supposer être dans le plan (e_0, e_1) ; soit μ_n la loi de $\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$;

montrons que $\left[\varphi\mu_n\right]$ converge étroitement vers $\left[\varphi\mu\right]$: si f est continue et bornée sur E :

$$\int f.\varphi d\mu_n = \mathbb{E}_\mu \left(f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right)\right) ;$$

le théorème de Lebesgue s'applique puisqu'on a une majoration de l'intégrale par $C \exp(\xi_1 < e_1, b > + \xi_2 < e_2, b >)$. La même méthode s'applique pour montrer que $\left[\varphi(\mu_n + a)\right]$ converge vers $\left[\varphi(\mu + a)\right]$ (on remplace ξ_1 par $\xi_1 + a$ dans les calculs précédents). D'après l'étude en dimension finie, existe une mesure α_n sur E x E se projetant suivant $\nu_n = \left[\varphi\mu_n\right]$ et $\nu'_n = \left[\varphi(\mu_n + a)\right]$ respectivement telle que

$$\int ||x-y||_H \; \alpha_n(dx,dy) \leq ||a||_H \; ;$$

puisque ν_n converge étroitement vers ν sur l'espace polonais E, existe un compact K portant à $\varepsilon > 0$ près toutes les mesures ν_n ; de même K' les mesures ν'_n ; les α'_n sont portées à 2ε près par K x K' ; ceci prouve que l'ensemble des α'_n reste relativement compact, ε pouvant être arbitraire ; on peut extraire une sous-suite α_{n_k} convergeant vers α et on a alors le résultat annoncé, vu que, l'injection H ⟶ E étant compacte, la fonction $||.||_H$ est s.c.i. sur E et donc aussi la fonction $||x-y||_H$ sur E x E ∎

3.4 - Exemple

Soit une partie convexe borélienne d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$; soit μ_a la mesure gaussienne de variance I et de moyenne a, $\mu_a(\circ \mid C)$ la mesure conditionnée par C, et m_a son barycentre ; on a $|m_a - m_b| \leq |a - b|$; ceci résulte de l'estimation de la distance entre $\mu_a(\circ \mid C)$ et $\mu_b(\circ \mid C)$, en remarquant que la fonction $x \longrightarrow D(x,H)$, où H est l'hyperplan passant par a et orthogonal à a - b, est lipschitzienne de norme 1.

Cet exemple est inspiré par [14] , de même que le résultat suivant : on peut montrer qu'en dimension 1, l'inégalité

$$D\left(\left[\varphi.\mu\right], \left[\varphi(\mu + a)\right]\right) \leq |a|$$

est valable avec φ log-concave et μ à densité log-concave.

C - Unicité du champ euclidien sur un réseau en interaction strictement convexe

On se propose de retrouver un résultat de [19] par une méthode directe, de passage à la limite thermodynamique, sans employer la méthode plus subtile de Dobrushin. Soit P un polynôme borné inférieurement non constant ; on appelle P-mesure de Gibbs toute probabilité μ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^\nu}$ (ν étant fixé) qui vérifie, pour toute partie finie L de $\mathbb{Z}^\nu$, l'équation :

$$\text{(D)} \qquad \mu(dx_L \mid x_{L^c}) = n_L(dx_L \mid x_{L^c}) \ ,$$

où le premier membre désigne la mesure conditionnelle sur $\mathbb{R}^L$ quand la composante x_{L^c} de $x \in \mathbb{R}^{Z^\nu}$ sur $L^c = \mathbb{Z}^\nu - L$ est fixée, et le deuxième est donné à priori par la formule :

$$n_L(dx_L \mid x_{L^c}) = \Big[\exp(-\sum_{u\in L} P(x_u) - \sum_{\substack{u \text{ ou } v\in L \\ v\sim u}} (x_u - x_v)^2/4)\Big]$$

$v\sim u$ signifiant que v est un des 2^ν voisins de u dans le réseau $\mathbb{Z}^\nu$.
Naturellement l'égalité (D) n'est à lire que pour μ-presque tout x_{L^c}.
Soit $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^\nu)$ l'espace des fonctions sur Z^ν à croissance au plus polynomiale.

3.5 - Théorème :

Supposons que $\inf(P'') > 0$; il existe alors au plus une P-mesure de Gibbs qui soit portée par $\mathscr{S}'(\mathbb{Z}^\nu)$.

Démonstration : Décomposons P sous la forme $\frac{m^2}{2}x^2 + Q$ où $m > 0$ et Q est convexe. Soit Δ le laplacien discrétisé sur $\mathbb{Z}^\nu$: $\Delta x\,(u) = \sum_{v\sim u} (x(v)-x(u))$ et Δ_L le laplacien sur L calculé en prolongeant x par 0 en dehors de L. Soit γ la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}^L$ de variance $\sigma^2 = (-\Delta_L + m^2)^{-1}$; on vérifie facilement que la mesure $n_L(dx|0)$ n'est autre que $[\varphi\gamma]$ avec $\varphi = \exp(-\sum_{u\in L} Q(x_u))$.

On va calculer la distance de $n_L(dx|0)$ et de $n_L(dx|z)$, z étant donné : $L^c \longrightarrow \mathbb{R}$, pour une distance convenable ; posons :

$$D^2 = \rho(-\Delta_L + m^2) \ ,$$

où ρ est l'opérateur diagonal $(x(u), u \in L) \longrightarrow (\rho(u)\, x(u),\ u \in L)$ les coefficients $\rho(u)$ étant des nombres strictement positifs choisis plus bas, indépendamment de L. Etudions déjà à quelle condition D^2 est positive et non dégénérée sur $\mathbb{R}^L$:

$$2(x, -\rho\Delta_L(x)) = 2 \sum_{u \in L} x(u)\ \rho(u) \sum_{v \sim u} (x(u) - x(v)) \ \cdot$$

$$= \sum_{u \in L} \rho(u) \sum_{v \sim u} (x(u) - x(V))^2 + \sum_{u \in L} \rho(u) \sum_{v \sim u} x^2(u) - x^2(v) \ ;$$

le premier terme est positif, le second se transforme aisément en $\sum x^2(u)\ (-\ \Delta_L \rho(u))$ (dans les calculs on convient de $x(v) = 0$ pour $v \notin L$). Pour que $D^2 \geq 0$, il suffit donc que l'on ait la condition de surharmonicité : $(-\ \Delta_L + 2\ m^2)\rho \geqq 0$, qui est impliquée par :

$$\text{(S)} \qquad (-\Delta + 2\ m^2)\rho \geqq 0 \ ;$$

la non dégénérescence de D^2 est alors assurée, en supposant L "connexe", par le premier terme.

D'autre part, $n_L(dx|z)$ s'identifie à $\left[\varphi(\gamma+h)\right]$ où h est la solution du problème de Dirichlet suivant :

$$\text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} h_v = z_v \text{ pour } v \notin L \\ \left[(-\Delta + m^2)h\right](u) = 0 \quad \text{pour } u \in L \ ; \end{array} \right.$$

comme $D^2\ \sigma^2$ est la matrice diagonale ρ , la condition de la proposition 3.2 est vérifiée (U" est diagonale et positive) et on a donc :

$$D(n_L(.|0),\ n_L(.|0)) \leq ||h||_D$$

avec

$$||h||_D^2 = \sum_{u \in L} \rho(u)\ h(u) \left[(-\ \Delta_L + m^2)\ h\right](u) =$$

$$= \sum_{u \in L} \rho(u)\ h(u) \left[(\ -\Delta + m^2)\ h\right](u) + \sum_{\substack{v \in \partial L \\ u \in L, u \sim v}} \rho(u) h(u) z(v)$$

$$= \sum_{\text{idem}} \rho(u)\ h(u)\ z(v)$$

∂ L désigne l'ensemble des points de L^c voisin d'un point de L.

Choisissons maintenant pour ρ une fonction vérifiant (S), strictement positive et à décroissance exponentielle sur $\mathbb{Z}^\nu$; un calcul facile montre que c'est possible (voir [20] appendice B), il suffit de prendre

$$\rho(u) = \exp(-\lambda \sum_{i=1}^{\nu} |u_i|) \text{ avec } ch(\lambda) \leq \frac{m^2}{\nu} + 1.$$

Soit μ une P-mesure de Gibbs, f une fonction sur $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^\nu}$ provenant d'une fonction $\mathscr{C}^1$ à support compact sur $\mathbb{R}^M$ où M est une partie finie de $\mathbb{Z}^\nu$, et L_n le "cube" $\{u \; ; \; \forall i \quad |u_i| \leq n\}$. D'après l'équation (D), on a

$\int f\, d\mu = \int \Psi_n(f) d\mu$, où $\Psi_n(f)$ est la fonction, ne dépendant que des coordonnées hors de L, définie par :

$$\Psi_n(f,z) = \int_{\mathbb{R}^L} f(x)\, n_{L_n}(dx | z_{L_n^c}),$$

dès que $L_n \supset M$. D'après le théorème des martingales rétrogrades, $\Psi_n(f)$ converge μ-presque sûrement vers une fonction $\Psi_\infty(f)$; pour terminer il nous suffit de montrer que $\Psi_\infty(f)$ est presque sûrement égale à une constante m(f) indépendante de μ puisque $\int f d\mu = \int \Psi_\infty(f) d\mu = m(f)$, équation qui détermine μ, les fonctions f admissibles formant une algèbre qui engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. Notons, de manière plus précise, D_{L_n} la distance sur $\mathbb{R}^{L_n}$;
f s'identifie à une fonction sur $\mathbb{R}^{L_n}$ avec une constante de Lipschitz k, indépendante de n, dès que $L_n \supset M$: en effet sur $\mathbb{R}^M$ la distance D_M s'identifie à D_{L_n} en prolongeant $x \in \mathbb{R}^M$ par 0 en dehors de M.

On obtient donc :

$$|\Psi_n(f|z) - \Psi_n(f|0)| \leq k \Big(\sum_{\substack{v \in \partial L_n \\ u \in L_n}} \rho(u)\, h(u)\, z(v) \Big)^{1/2} \quad ;$$

mais, par le principe du maximum, on a :

$$\sup_{u \in L_n} |h(u)| \leq \sup_{v \in \partial L} |z(v)| ,$$

on peut donc majorer par :

$$k(\exp(-\lambda(n+1)) 2\nu \; n^{\nu-1} \sup_{\partial L_n} |z(v)|)^{1/2}$$

mais, μ-presque sûrement, z est à croissance au plus polynomiale, donc :

$$|\Psi_n(f|z) - \Psi_n(f|0)| \longrightarrow 0 , \quad \mu\text{-p.s} \; \blacksquare$$

La méthode de [19] s'étendait à des polynômes proches d'un polynôme convexe ; le résultat démontré correspond à des intuitions physiques ; sous une forme moins élaborée, voir Dunlop, cité dans [1] .

D - Unicité du champ $P\varphi_1$.

Pour $\nu = 1$, la notion de P-mesure de Gibbs admet facilement un analogue non discret, en considérant des espaces de trajectoires continus ; on se propose d'établir le résultat d'unicité analogue à 3.5. Ceci donne quand P est strictement convexe la solution d'une conjecture de Courrège et Renouard , proposée dans [5] comme un joli problème d'unicité de mesure quasi-invariante (l'équivalence de la propriété de quasi-invariance citée avec la propriété de Gibbs est montrée dans [17]) ; ce résultat est d'autre part assez mal venu, étant donné qu'en dimension 1 toute hypothèse de convexité devait pouvoir être éliminée.

On désigne par $\mathscr{W}_{a,b}^{u,v}$ la mesure sur $\mathscr{C}([a,b])$ définie par le pont brownien assujetti aux contraintes $y(a) = u$, $y(b) = v$; P étant un polynôme borné inférieurement non constant, on considère la mesure sur $\mathscr{C}([a,b])$ suivante :

$$\mathscr{N}_{a,b}^{u,v}(dy) = \left[\exp(-\int_a^b P(y(t))dt)\mathscr{W}_{a,b}^{u,v}\ dy\right] ;$$

une P-mesure de Gibbs est une mesure sur $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, telle que pour tous $a \leqq b$, presque sûrement,

$$\mu(dy|_{[a,b]}\ y|_{\mathbb{R}-[a,b]}) = \mathscr{N}_{a,b}^{y(a),\ y(b)}\ (dy|_{[a,b]}) .$$

3.6 - Théorème

Si $\inf(P'') > 0$, il existe au plus une P-mesure de Gibbs qui soit portée par $\mathscr{C}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

$\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ est l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}$.

Considérons les objets suivants : un nombre strictement positif m et le potentiel de Green $\rho_{a,b}$ solution des équations

$$-\rho'' + m^2\rho = \delta_{a+b/2}\ ,\ \rho(a) = \rho(b) = 0 ;$$

si $a = -b$, ρ est donnée par $k\, sh(m(x+b))$ pour $-b \leq x \leq 0$ et $k\, sh(m(b-x))$ pour $0 \leq x \leq b$, avec $k = (2\, m\, ch(mb))^{-1}$; une "norme généralisée" sur sur $\mathscr{C}([a,b])$, notée $||.||_{a,b}$ définie par :

$$||f||^2 = \int_a^b (f'(t))^2\, dt + \frac{1}{4}\, (f((a+b)/2))^2,$$

si f est intégrale indéfinie d'une fonction L^2, et $||f|| = +\infty$ sinon.

3.7 - Proposition

Soit P tel que $\inf(P'') > m$; il existe une constante r telle que pour tout, a,b,u,v avec $a \leq b$, existe une mesure α sur $(\mathscr{C}([a,b]))^2$ vérifiant :

1° α admet les marginales $\mathscr{N}^{u,v}_{a,b}$ et $\mathscr{N}^{0,0}_{a,b}$

2° $\int ||y-z||_{a,b}\ \alpha(dy,dz) \leq r \exp(\frac{m}{2}\,(a-b))\, \sup(|u|,|v|)$.

On va se ramener aux mêmes méthodes que dans la démonstration du théorème 3.5, par un procédé de discrétisation ; nous ferons quelques majorations assez grossières qui nous empêcherons de bien contrôler la constante r ; on supposera que $a = -b$; soit n pair et $x_0 = a$, x_i, $x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ en n intervalles égaux (de longueur $2b/n$) ; y étant donné dans $\mathscr{C}([a,b])$, soit $\tilde{y}$ la fonction affine par morceaux et continue qui prend les mêmes valeurs que y aux points x_i, $1 \leq i \leq n-1$, valeurs notées y_i, et qui est constante sur les intervalles $[a,x_1]$, $[x_{n-1},b]$; l'espace de ces fonctions $\tilde{y}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$.

Désignons par w_n, la mesure sur $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\left[\exp\left(-\frac{n}{4b}\left((y_1-u)^2 + (y_{n-1}-v)^2 + \sum_{i=2}^{n-1} (y_n - y_{n-1})^2\right)\right)\right],$$

par w_n^o la mesure analogue obtenue quand $u=v=0$, par μ_n et μ_n^o les mesures définies par :

$$\mu_n = \left[\exp\left(-\sum_{i=2}^{n-1} P(y_i)/n\right)\ w_n(dy)\right] \quad (\text{resp} : w_n^o\ ,\ \mu_n^o)\ ;$$

on désignera par les mêmes lettres les mesures sur $\mathscr{C}([a,b])$, obtenues en identifiant y_i, $2 \leq i \leq n-1$ à une fonction "ligne brisée" y ; notons qu'on n'a <u>pas</u> $\tilde{y}(0) = u$, presque sûrement par rapport à μ_n.

3.8 - <u>Lemme</u>

La mesure μ_n converge vers $\mathscr{N}^{u,v}_{a,b}$ pour la convergence étroite associée à la topologie de $\mathscr{C}([a,b])$.

<u>Démonstration</u> : Soit p_n l'application de $\mathscr{C}$ dans lui-même qui à y associe la ligne brisée en n morceaux y ; on note que $w_n = p_n \mathscr{W}^{u,v}$; d'autre part, pour tout y, $p_n(y)$ converge vers y quand $n \longrightarrow \infty$ pour la topologie de $\mathscr{C}$ (convergence uniforme) ; ces deux propriétés impliquent par un calcul immédiat la convergence étroite de w_n vers $\mathscr{W}^{u,v}$. Soit $U_n(y) = \sum_{i=2}^{n} P(y_i)/n$ et sa limite $U_\infty(y) = \int_a^b P(y(t))dt$. Comme ci-dessus, on voit facilement que $\left[\exp(-U_\infty)\, w_n\right]$ converge vers $\left[\exp(-U_\infty)\mathscr{W}\right] = \mathscr{N}$, puisque U_∞ est continue sur $\mathscr{C}$.

Soit K une partie de $\mathscr{C}$ composée de fonctions uniformément bornées et uniformément höldériennes d'exposant 1/4, c'est à dire :

$$\exists\, r \quad \forall y \in K \quad \forall s,t \qquad |y(t)-y(s)| \leq r\, |t-s|^{1/4} \quad .$$

Un calcul simple montre que $U_n(p_n(y))$ converge uniformément vers $U_\infty(y)$ pour $y \in K$. D'autre part, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, existe une telle partie K portant à ε près $\mathscr{W}$; on écrit pour f continue et bornée :

$$\int f \exp(-U_n) dw_n = \int f \exp-(U_n \circ p_n) d\mathscr{W} = \int_K + \int_{\mathscr{C}-K}$$

et des estimations immédiates donnent la limite $\int f \exp(-U_\infty) d\mathscr{W}$ ∎

<u>Démonstration de 3.7</u> : On va estimer la distance de Fortet-Mourier pour la norme $||.||$ entre μ_n et μ_n^o en essayant d'obtenir une majoration indépendante de n.

Sur l'espace des fonctions affines par morceaux envisagées, la norme prend la forme :

(1) $$y_i^2(n/2)/4 + \sum_{i=2}^{n-1} (n/2b)^2(y_i-y_{i-1})^2, \text{ où : } q_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \rho(t)dt \ ;$$

un calcul facile donne :

$$q_i = K_n \ \mathrm{sh}(m((x_i + x_{i-1})/2) + b), \text{ pour } 1 \leqq i \leqq n/2,$$

$$q_i = - K_n \ \mathrm{sh}(m((x_i + x_{i-1})/2)-b), \text{ pour } 1 + n/2 \leqq i \leqq n \ ,$$

avec : $K_n = (2k/n)\ \mathrm{sh}(mb/n)$;

soit Δ l'opérateur laplacien discret sur $\{2,\dots,n-1\}$ avec condition extérieure nulle :

$$(\Delta y)_i = \frac{n^2}{4b^2}(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i) \text{ où } y_1 = y_n = 0 \ ;$$

on vérifie en général la condition d'harmonicité avec une constante m_n tendant vers m : $(\Delta q_i) = m_n q_i$ en posant :

(2) $$m_n = \frac{n^2}{4b^2}\left(\mathrm{ch}\left(\frac{2mb}{n}\right) - 1\right), \text{ sauf}$$

pour i=2, n-1, n/2 et n/2 + 1 ; dans ces cas :

(3) $$\Delta q_2 \leqq m_n q_2 \quad \text{et idem pour} \quad q_{n-1} \ ;$$

l'égalité eût été valable si nous n'avions pas remplacé q_1 et q_n par 0 ;

(4) $$-\Delta q(n/2) = - \Delta q(1+n/2) = (n/mb)^2 \ \mathrm{sh}^2(mb/n)\ \mathrm{ch}(mb(1-2/n))/2\mathrm{ch}(mb).$$

$\geqq$ 1/4 pour n assez grand.

Si $(\circ,\circ)$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n-1}$, on a :

$$2(y,q\ (-\Delta + m_n^2)y) = \sum_{i=2}^{n-1} y_i^2\left[(-\Delta + m_n^2)q\right]_i$$
$$+ \sum_{i=2}^{n-1} (n/2b)^2\ ((x_i - x_{i-1})^2 + (x_i - x_{i+1})^2) \geqq ||y||^2 \ ,$$

compte tenu des formules (1), (2), (3), (4) (avec des majorations grossières).

Ainsi on a trouvé une norme majorant $||.||$; mais pour cette dernière, on connaît une majoration de la distance de μ_n et μ_n^o ; en effet si γ_n est la gaussienne :

$$\left[\exp(- \sum (m_n^2/2)\, y_i^2)\, w_n^o\right],$$

pour n assez grand $\mu_n^o = \left[\varphi .\ \gamma_n\right]$ et $\mu_n = \left[\varphi(\gamma_n + h_{u,v})\right]$ avec φ log-concave (dès que $m_n < \inf(P'')$) et h solution de $(-\Delta + m_n^2)\, h = 0$ avec valeurs au bord $h_1 = u$, $h_n = v$. On peut appliquer le théorème 3.3 comme en 3.5 et on obtient une mesure α_n de marginales μ_n et μ_n^o vérifiant :

$$A_n = \int ||y-z||\ \alpha_n(dy,dz) \leq (2(h,q(-\Delta + m_n^2)h))^{1/2}$$

$$= (\frac{n}{2b})\ (2(q_2\, h_1\, u + q_{n-1}\, h_{n-1} v))^{1/2}\ ;$$

$q_2 = q_{n-1}$ et, par le principe du maximum, $|h_1|$ et $|h_2| \leq \sup(|u|, |v|)$; donc $A_n \leq (n/b)\ \sqrt{q_2}\ \sup(|u|,|v|)$; $q_2 = K_n\ \mathrm{sh}(m\,\frac{3b}{n})$, ce qui donne en utilisant l'inégalité $\mathrm{sh}(\varepsilon) \leq 2\varepsilon$ pour ε petit :

$$q_2 \leq 12\, b^2 / n^2\ \mathrm{ch}(mb)$$

pour n grand, et $A_n \leq C$ où :

$$C = 4\ (\mathrm{ch}(mb))^{-1/2}\ \sup(|u|,|v|)\ ;$$

l'ensemble $||y|| \leq M$ est fermé (et même compact) dans $\mathscr{C}([a,b])$, donc par le même raisonnement qu'au théorème 3.3, les mesures α_n convergent vers une mesure α pour laquelle l'intégrale de la distance $||y-z||$ est majorée par C ■

Fin de la démonstration du théorème.

Etant donnée une trajectoire z de $\mathscr{C}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ il n'est pas sûr qu'elle soit à croissance (moins que) polynomiale à l'infini ; ceci nous empêche de terminer la démonstration de manière aussi directe que dans le cas discret ; soit une fonction positive, lisse, à support inclus dans $[0,1]$, d'intégrale 1 ; $z * \varphi$ est à croissance polynômiale :

$$(1) \qquad \left|\int_n^{n+1} \varphi(n-t)\ z(t)\ dt\right| \leq C_1\ n^d + C_2\ ;$$

il existe donc un point $b_n \in [n, n+1]$ avec $|z(b_n)| \leq C_1\, n^d + C_2$ (si z admet un zéro dans l'intervalle, c'est évident sinon on utilise (1)). Posons $a_n = b_{-n}$; pour $n > 0$, on a :

$$(2) \qquad 0 \leq a_n + b_n/2 \leq 2\ .$$

On sait d'après [18], ou d'après une théorie générale [16], que toute P-mesure de Gibbs s'obtient comme combinaison d'extrêmales. Il suffit donc d'examiner l'unicité de ces mesures de Gibbs extrêmales ; une telle mesure est triviale, comme on le vérifie sans peine, sur la tribu $\bigcap_{a \leq b} \mathscr{F}_{\mathbb{R} - [a,b]}$, où $\mathscr{F}_I$ désigne la tribu des parties de $(\mathbb{R})$ engendrée par les fonctions $y \longrightarrow y(t)$, $t \in I$; si f est une fonction sur $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ provenant d'une fonction $\tilde{f}$ de $\mathscr{C}([-M, M])$ et μ extrêmale portée par $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ il existe par le théorème des martingales un $z \in \mathscr{C}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ tel que :

(3) $$\int f d\mu = \lim_n \int \tilde{f}\, d\mathscr{N}^{z(a_n),\, z(b_n)}_{a_n,\, b_n}$$

(puisque l'égalité est valable p.s.). Choisissons f de la forme :

$$f(y) = \tilde{f}(y(t_1), \ldots , y(t_k))$$

où $\tilde{f}$ est une fonction $\mathscr{C}^1$ a support compact donnée sur $\mathbb{R}^k$ et les t_i sont fixés.

Dans ce cas, pour n grand, f s'identifie à une fonction "lipschitzienne" pour $||.||$ sur $\mathscr{C}([a_n,b_n])$:

$$|\int f(y) - f(z)| \leq C_3 \; ||y-z||_{a_n,b_n}$$

avec une constante C_3 indépendante de n ; en effet, par exemple :

$$y(t_1) = y((a_n + b_n)/2) + \int_{(a_n + b_n)/2}^{t_1} y'(s)\, ds$$

(4) $$|y(t_1)| \leq |y(.)| + C_4(\int (y'(s))^2 \, ds)^{1/2}$$; d'après (1), on peut toujours supposer que $(a_n + b_n)/2$ converge vers α ; alors ρ_{a_n,b_n} converge vers la solution ρ de $-\rho'' + m^2\rho = \delta$ avec $\rho(\infty) = \rho(-\infty) = 0$, uniformément sur tout intervalle compact (utiliser la formule :

$$G(x,t) = sh(m(x-a))\; sh(m(b-t)/m\; sh(b-a), \qquad x \leq t$$

du noyau de Green sur $[a,b]$; comme ρ est continue et strictement positive la formule (4) donne :

$$|y(t_1)| \leq C_5 \; ||y||_{a_n,b_n} .$$

La proposition 3.7 donne :

$$|\int f\, d\mathcal{N}^{z(a_n),z(b_n)}_{a_n,b_n} - \int f\, d\mathcal{N}^{o,o}_{a_n,b_n}|$$

$$\leqq C_3\, r \exp(\tfrac{m}{2}(a_n - b_n))\ (C_1\, n^d + C_2),$$

comme $a_n - b_n \leqq - 2n+1$, on a nécessairement d'après (3) :

$$\int f d\mu = \lim_n \left(\int f\, d\mathcal{N}^{o,o}_{a_n,b_n} \right) ;$$

comme l'ensemble des fonctions f admissible est assez riche, l'équation précédente détermine μ de manière unique ∎

BIBLIOGRAPHIE

[1] H.Van Beijeren, G.S. Sylvester : Phase transitions for continuous spin Ising ferromagnets. J. Funct. Anal. 28^2, p. 145-167 (1978).

[2] R. Bellmann , A. Hoffman : On a theorem of Ostrowski and Taussky. . Arch. der. Math. 5. p 123-127 (1954).

[3] A. Bensoussan, R. Temam : Equations aux dérivées partielles non linéaires. Israel J. Math. 11 p. 95 (1972).

[4] S. Chevet : Notes de séminaire (1981).

[5] P. Courrège, P. Renouard : Oscillateur anharmonique, mesures quasi-invariantes sur $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et théorie quantique des champs en dimension d=1. Astérisque 22 (1975).

[6] R.L. Dobrushin : Prescribing a system of random variables by conditional distributions. Theor. Prob. Appl. 15^3 p. 458 (1970).

[7] W. Doeblin, R. Fortet : Sur les chaînes à liaisons complètes. Bull. S.M.F. 65, p. 132-148, (1937).

[8] R.M. Dudley : Probabilities and metrics. Lectures notes Séries 45, Aarhus universitet.

[9] X. Fernique : Sur le théorème de Kantorovitch Rubinstein dans les espaces polonais. Sem. Proba. Strasbourg 15. Lectures notes in math. 850.

[10] R.Fortet, E. Mourier : Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. Ser 3.70 p. 266-285 (1953).

[11] L. Kantorovitch - G. Rubinstein : On a space of completely additive functions ; en russe Vestmik Leningrad Univ. 13^7 p. 52-59 (1958).

[12] E. Lepage : Théorème des grands écarts et théorème de la limite centrale pour certains produits de matrices aléatoires. C.R. Acad. Sc. Paris 290 (1980) p. 559-562.

[13] H.J. Brascamp, E.H. Lieb : On extensions of the Brunn-Minkowski and Prekopa - Leindler Theorems, including inequalities for log-concave functions and with an application to diffusion equation.
J. Funct. Anal. 22 p. 366-389 (1979).

[14] L. Mailhot : en préparation.

[15] J. Moulin-Ollagnier, D. Pinchon : Un problème de minimum pour le couplage de deux probabilités. C.R. Acad. Sc. Paris (1978).

[16] C. Preston : Random fields. Lect. notes. Math. 534 (1976).

[17] G. Royer : Unicité de certaines mesures quasi-invariantes sur $\mathscr{C}(\mathbb{R})$.
Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série 8. p. 319-388 (1975).

[18] G. Royer, M. Yor : Représentation intégrale de certaines mesures quasi-invariantes sur $\mathscr{C}(\mathbb{R})$; mesures extrêmales et propriétés de Markov.
Ann. Inst. Fourier 26^2 (1976).

[19] G. Royer : Etude des champs euclidiens sur un réseau $\mathbb{Z}^\nu$. J. Math. pures. appl. 56 p. 455-478 (1977).

[20] G. Royer : Processus de diffusion associé à certains modèles d'Ising à spins continus. Z.F. Wahr. 46 p. 107-124 (1978).

[21] E. Pardoux : Equations aux dérivées partielles stochastiques non linéaires monotones. Thèse. Univ. Paris Sud (1975).

[22] D. Ruelle : Thermodynamic formalism. Encyclopedia of mathematics 5. Addison-Wesley (1978).

[23] B. Simon : Functional integration and quantum physics. Academic Press (1979).

[24] C. Sunyach : Une classe de chaînes de Markov récurrentes sur un espace métrique complet. Ann. Inst. Poincaré 11^4 p. 325-343 (1975).

[25] A. Prekopa : On logarithmic concave measures and functions.
Act. Scien. Math. 34 p. 335-345 (1973).

G. ROYER
Université de Clermont II
Complexe Scientifique des Cézeaux
Département de Mathématiques Appliquées
B.P. n° 45
63170 AUBIERE

Reçu en Février 1984