

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GUY LOUPIAS

Axiomatique quantique et algèbres normées non associatives

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 97, série *Mathématiques*, n° 27 (1991), p. 59-91

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1991__97_27_59_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**AXIOMATIQUE QUANTIQUE
ET ALGÈBRES NORMEES NON ASSOCIATIVES**

Guy LOUPIAS

1. INTRODUCTION

Il est significatif de noter que le travail historique de Jordan-von Neumann-Wigner [1], qu'il est usuel de considérer comme l'un des tout premiers fondements de la théorie des algèbres de Jordan, est en réalité, comme l'indique son titre, un travail sur les ensembles d'observables en mécanique quantique.

C'est dire que l'intérêt porté par les physiciens théoriciens aux algèbres de Jordan n'est pas nouveau et est en réalité contemporain de la mécanique quantique elle-même. Cela n'a rien de surprenant si l'on se souvient que la théorie quantique d'un système physique se formule par la donnée d'un espace de Hilbert \mathcal{H} sur lequel opèrent les observables du système représentées par des opérateurs self-adjoints. Or il est bien connu que l'ensemble de ces derniers est une algèbre de Jordan pour la loi de composition $A \circ B = 1/2(A \cdot B + B \cdot A)$ dite produit symétrisé du produit des deux opérateurs self-adjoints A et B sur \mathcal{H} . Mais l'importance du rôle des algèbres de Jordan en mécanique quantique va bien au delà de cette simple constatation.

Le travail des trois pionniers cités plus haut est en réalité la première d'une longue série de tentatives destinées à pourvoir la théorie quantique (non relativiste dans un premier temps) d'un système d'axiomes suffisamment riche pour permettre aux mathématiques de jouer un rôle significatif sans être toutefois trop restrictif au point d'éliminer les

situations physiques dignes d'intérêt.

Cette démarche consiste à se départir de la donnée a priori d'un espace de Hilbert pour ne retenir que les concepts primitifs d'ensemble d'observables et d'ensemble d'états, puis de munir ces derniers de structures d'espace ordonné, d'algèbre et d'espace topologique physiquement pertinentes et mathématiquement corrélées, quitte à examiner les circonstances dans lesquelles ces structures acceptent a posteriori des représentations concrètes, et en général diverses, par des opérateurs sur un espace de Hilbert.

Motivé à l'origine par le projet ambitieux d'extirper du formalisme initial les éléments épistémologiquement douteux ou mathématiquement scabreux, ce point de vue, généralement qualifié d'approche axiomatique, a pu prendre son véritable essor lorsque les travaux de I. Segal [2] ont permis de franchir le seuil de la dimension finie, limitation qui privait les résultats de [1] de toute interprétation physique. Mais il a trouvé sa justification la plus solide lorsque R.Hagg et D.Kastler mirent en avant le concept d'équivalence physique [3], auquel conduit naturellement une analyse critique de la formulation conventionnelle de la théorie quantique.

C'est cette analyse que nous présenterons dans une première partie, réservant pour une deuxième partie l'exposé des principes de base de l'approche axiomatique.

Mais cette dernière une fois légitimée, il convient de la concrétiser. C'est pourquoi la troisième partie détaillera une axiomatique quantique conduisant naturellement à une structure de JB-algèbre sur l'ensemble des observables, la dernière partie étant consacrée à quelques développements.

Rappelons qu'une *JB-algèbre* est une algèbre de Jordan \mathcal{A} (algèbre commutative réelle non associative telle que $A^2(BA) = (A^2B)A$ pour tout $A, B \in \mathcal{A}$) qui est un espace de Banach relativement à une norme telle que

- (1) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$
- (2) $\|A^2\| = \|A\|^2, \quad A, B \in \mathcal{A}$
- (3) $\|A^2 + B^2\| \geq \|B^2\|$

Une *JC-algèbre* est une JB-algèbre d'opérateurs self-adjoints bornés sur un espace de Hilbert pour le produit symétrisé. Nous nous référerons à [4] pour les résultats relatifs aux algèbres de Jordan-Banach.

Notre cheminement de la mécanique classique à la théorie quantique

axiomatisée en passant par la mécanique quantique traditionnelle révélera la permanence d'une structure fondamentale constituée par le couple d'un espace à unité d'ordre (les observables) et d'un espace à norme basique (ayant pour base les états) en dualité séparante d'ordre et de norme [5].

Un espace à unité d'ordre est un espace vectoriel réel \mathcal{A} partiellement ordonné possédant une unité d'ordre (c'est-à-dire un élément $\mathbb{1} \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, il existe un réel λ tel que $-\lambda\mathbb{1} \leq A \leq \lambda\mathbb{1}$) et archimédien en ce sens que si $nA \leq \mathbb{1}$ pour tout entier n alors $A \leq 0$. Dès lors la quantité

$$\|A\| = \inf\{\lambda > 0 ; -\lambda\mathbb{1} \leq A \leq \lambda\mathbb{1}\}$$

est une norme sur \mathcal{A} dite *norme d'ordre*. On désignera un espace à unité d'ordre par $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_+, \mathbb{1})$ où \mathcal{A}_+ est le cône convexe propre fermé des éléments positifs, lequel engendre \mathcal{A} selon $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$.

Un espace à norme basique (base-norm space) est un espace vectoriel réel V ordonné par un cône convexe propre V_+ qui engendre V linéairement et possède pour base $S \subset V_+$ (en ce sens que pour tout $0 < \varphi \in V_+$ il existe $\lambda > 0$ tel que $\varphi \in \lambda S$) un sous-ensemble convexe tel que la jauge

$$\|\varphi\| = \inf\{\lambda > 0 ; \varphi \in \lambda \text{conv}(S \cup (-S))\}$$

soit une norme sur V (où conv désigne l'enveloppe convexe). Dès lors il existe une forme linéaire continue strictement positive e sur V définie de manière unique par

$$e(\varphi) = \|\varphi_1\| - \|\varphi_2\| \quad \text{si } \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in V_+ - V_+ = V$$

et telle que

$$S = \{\varphi \in V_+ ; e(\varphi) = 1\}$$

et

$$\|\varphi\| = \inf\{e(\varphi_1 + \varphi_2) ; \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in V_+ - V_+ = V\}$$

On désignera un espace à norme basique par (V, V_+, S) .

Le dual d'un espace à unité d'ordre complet est un espace à norme basique complet, et réciproquement. Plus précisément

$$(\mathcal{A}, \mathcal{A}_+, \mathbb{1})' = (\mathcal{A}', \mathcal{A}'_+ = \{\varphi \in \mathcal{A}' ; \varphi(A) \geq 0 \text{ si } A \in \mathcal{A}_+\}, S = \{\varphi \in \mathcal{A}'_+ ; \varphi(\mathbb{1}) = 1\})$$

tandis que

$$(V, V_+, S)' = (V', V'_+, e).$$

Selon une terminologie empruntée à la physique, l'ensemble S est appelé *ensemble des états* de l'espace à unité d'ordre \mathfrak{A} et constitue un compact faible dont les points extrémaux seront qualifiés *d'états purs*.

C'est ainsi qu'une JB-algèbre à unité $\mathbb{1}$ peut se caractériser comme une algèbre de Jordan à unité qui est également un espace à unité d'ordre complet vérifiant la condition

$$-\mathbb{1} \leq A \leq \mathbb{1} \text{ implique } 0 \leq A^2 \leq \mathbb{1}.$$

Or précisément, une fois formulés sur une base physique transparente les axiomes qui déterminent la structure fondamentale mentionnée plus haut, cette dernière pourra être assortie d'un calcul fonctionnel autorisant l'introduction; au sein des observables, d'un carré induisant à son tour un produit qui, bien que non nécessairement associatif, s'avèrera être un produit de Jordan, la norme d'ordre conférant à l'ensemble des observables une structure de JB-algèbre, associative en mécanique classique, non associative en mécanique quantique, l'ensemble S des états (mathématiques) s'identifiant à l'ensemble des états (physiques).

2. APPROCHE AXIOMATIQUE VERSUS APPROCHE TRADITIONNELLE

En *mécanique classique*, on connaît l'état d'un système matériel à un instant donné dès que l'on peut mesurer, à cet instant, position et vitesse de chacun de ses degrés de liberté. Si n est le nombre de ces derniers, l'état du système à l'instant en question pourra être théoriquement représenté par un élément ω de l'espace des phases, variété symplectique réelle \mathcal{V} de dimension $6n$. Une quantité physique *observable* (ou si l'on préfère une opération de mesure) sera alors une fonction de ces positions et de ces vitesses et pourra donc être représentée par une fonction régulière $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} sur l'espace des phases : c'est par exemple le cas du moment cinétique, de l'énergie, etc... La valeur de l'observable f pour un système se trouvant dans l'état $\omega \in \mathcal{V}$ (ou si l'on préfère le résultat de la mesure de l'observable f dans l'état ω) sera la valeur $f(\omega)$ de cette fonction au point ω de \mathcal{V} . L'observable

énergie (ou hamiltonien) H détermine l'évolution au cours du temps de toute observable f selon $\frac{df}{dt} = \{H, f\}$, crochet de Poisson de H et f .

Si le nombre de degrés de liberté est grand, il est illusoire d'espérer pouvoir déterminer l'état du système (ce sera par exemple le cas d'un état gazeux). Même si ses constituants microscopiques continuent à obéir aux lois déterministes de la mécanique classique, des phénomènes aléatoires s'introduiront dès que l'on procèdera à des mesures macroscopiques sur un échantillon dont la taille sera grande par rapport à celle des constituants microscopiques (mouvement brownien par exemple).

On passera alors au stade de la *mécanique statistique*. Devant l'impossibilité de pouvoir préciser un point de l'espace des phases (impossibilité qui était en réalité déjà présente dans l'étape antérieure eu égard à l'imprécision des appareils de mesure) on se contentera de déterminer une mesure de probabilité μ sur ce dernier. Elle représentera, sinon l'état microscopique que l'on ne peut connaître avec précision, du moins la connaissance imparfaite que l'on en a, c'est-à-dire un état statistique, lequel s'avèrera suffisant pour décrire les résultats de mesures opérées à l'échelle macroscopique. La situation antérieure se présente alors comme le cas particulier où la mesure de probabilité retenue est une mesure de Dirac δ_ω concentrée au point ω de \mathcal{V} . L'observable f joue par rapport à μ le rôle de variable aléatoire dont la *valeur moyenne* $\langle \mu, f \rangle = \int f(\omega) d\mu(\omega)$ (si du moins cette intégrale existe) constituera la prédiction de la théorie quant au résultat de la mesure de l'observable dans l'état décrit par μ . L'ensemble $\{f(\omega) ; \omega \in \mathcal{V}\} = \{\langle \delta_\omega, f \rangle ; \omega \in \mathcal{V}\}$ représente ce que l'on pourra appeler le *spectre*, ou ensemble des valeurs possibles, de l'observable f . C'est ainsi que l'on convient de décrire un système en équilibre à la température absolue T , d'hamiltonien H , par la mesure de densité $\frac{1}{Z} e^{-H/kT}$ où k est la constante de Boltzmann et Z une constante de normalisation.

Comme conséquence du caractère inévitablement limité des appareils de mesure, seules correspondront à des opérations de mesure effectivement réalisables en laboratoire des observables décrites par des fonctions à valeurs bornées, que l'on qualifiera d'*observables bornées*, et auxquelles on pourra associer une borne, ou norme, selon

$$\|f\| = \text{Sup}\{|f(\omega)|, \omega \in \mathcal{V}\} = \text{Sup}\{|\lambda|, \lambda \in \text{Spectre de } f\}.$$

Pour les mêmes raisons ne pourront être étudiés en laboratoire que des

états du système confinés dans une région Ω de l'espace des phases. Si $C(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions réelles continues à support dans un compact Ω de \mathcal{V} , on vérifie aisément que $\|f^2\| = \|f\|^2$ et $\|f^2 + g^2\| \geq \|g^2\|$ si $f, g \in C(\Omega)$, de sorte que $C(\Omega)$ est une JB-algèbre associative (ou si l'on préfère une C^* -algèbre réelle commutative) qui fournit, selon la théorie de Gelfand, l'exemple le plus général de telles algèbres. Les éléments de $C(\Omega)$ pourront s'interpréter comme une famille d'observables bornées, mesurables dans les états confinés dans la région Ω de l'espace des phases.

On sait que les mesures de probabilité sur Ω s'identifient aux formes linéaires positives (nécessairement continues) de norme 1 sur $C(\Omega)$ et constituent un convexe faiblement compact S dans le dual V de $C(\Omega)$ dont les éléments extrémaux sont précisément les mesures de Dirac. Qui plus est, $(C(\Omega), C(\Omega)_+, \mathbb{1})$ est un espace à unité d'ordre pour la relation d'ordre usuelle entre fonctions réelles (associée à la notion de fonction positive $f \in C(\Omega)_+$), ayant pour unité d'ordre l'unité algébrique qu'est la fonction $\mathbb{1}$ constante et égale à 1 sur Ω , et pour norme d'ordre la norme spectrale mentionnée plus haut :

$$\|f\| = \text{Sup}\{|f(\omega)|, \omega \in \Omega\} = \text{Inf}\{\lambda \geq 0, -\lambda\mathbb{1} \leq f \leq \lambda\mathbb{1}\}$$

Son dual V , espace des mesures de Radon réelles sur Ω , est également ordonné par la notion de mesure (ou de forme linéaire) positive, dont l'ensemble est un cône convexe propre fermé V_+ ayant S pour base, la norme duale sur V étant donnée par

$$\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\| = \langle \mu^+, \mathbb{1} \rangle + \langle \mu^-, \mathbb{1} \rangle$$

où $\mu = \mu^+ - \mu^-$ est la décomposition minimale (unique) de l'élément μ de V comme différence de deux éléments de V_+ . En d'autres termes, (V, V_+, S) est l'espace à norme basique de base S dual de $(C(\Omega), C(\Omega)_+, \mathbb{1})$.

Bien que se situant en rupture avec la mécanique classique, la *théorie quantique*, nous le verrons, conserve, tout en le généralisant, un tel schéma.

Où se situent les ruptures ? Tout d'abord dans le fait que le spectre d'une observable devra pouvoir présenter un caractère au moins partiellement discret (quantification du spectre) afin de rendre compte du phénomène physique de dualité onde-corpuscule qui veut que l'interaction

d'une onde électromagnétique avec la matière s'opère par processus élémentaires indivisibles.

Ensuite dans le fait qu'il n'est pas en général possible de mesurer simultanément et avec une précision aussi grande que l'on veut deux observables quelconques dans un même état, le processus de mesure de l'une conduisant à une modification de l'état initial du système. Dès lors les prédictions de la théorie ne pourront s'exercer que dans un cadre probabiliste, même si le nombre de degrés de liberté est petit.

Ces phénomènes nouveaux furent décelés par des travaux expérimentaux comme l'analyse spectroscopique des raies du spectre d'émission des atomes qui révéla que l'ensemble des fréquences constituant le spectre n'était pas, comme l'aurait laissé prévoir la mécanique classique, un sous-groupe de \mathbb{R} contenant en particulier toutes les harmoniques, mais un groupoïde de la forme

$$\left\{ \omega_{m,n} = \omega_m - \omega_n = \frac{R}{m^2} - \frac{R}{n^2} ; m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

structuré par la loi de Rydberg

$$\omega_{m,n} + \omega_{n,p} = \omega_{m,p}$$

Dès lors les observables ne pourront plus se concevoir comme les éléments de l'algèbre (commutative pour les produits de convolution) du groupe des fréquences, mais comme l'algèbre de convolution du groupoïde ci-dessus, c'est-à-dire une algèbre de matrices self-adjointes infinies, munies soit du produit associatif non commutatif usuel, soit du produit symétrisé, commutatif mais non associatif.

Tout ceci entraîne que les observables ne pourront plus continuer à être représentées par des objets mathématiques se comportant entre eux à la fois de manière commutative et associative, comme c'était le cas pour des fonctions, mais par des objets opérant sur l'ensemble des états et qui devront obéir, relativement à la composition de ces opérations, à des relations de commutation non triviales (dites *relations de commutation canoniques*), ces commutateurs jouant un rôle comparable à celui des crochets de Poisson en mécanique classique. Par exemple, si p et q désignent respectivement les observables impulsion et position d'une particule, alors $[p, q] = \frac{i\hbar}{2\pi} \mathbb{1}$ où h est la constante de Planck tandis que, pour toute observable A , l'évolution au cours du temps est donnée par

l'équation $\frac{dA}{dt} = \frac{2\pi i}{h} [H, A]$ où H est l'observable énergie et où $[,]$ désigne le commutateur par rapport au produit usuel des opérateurs.

D'où l'idée des pères fondateurs de la mécanique quantique de formuler la théorie comme un problème de valeurs propres pour des opérateurs self-adjoints sur un espace de Hilbert. Successivement, Heisenberg, Born et Jordan d'une part, Schrödinger d'autre part, proposèrent des modèles sur des espaces de Hilbert du type ℓ^2 et $L^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ respectivement qui s'avèrent n'être que le siège de deux représentations unitairement équivalentes des relations de commutation canoniques. C'est pourquoi, dans un processus d'abstraction et de simplification conceptuelle, von Neumann propose une synthèse de ces approches ne prenant en compte que la structure abstraite d'espace de Hilbert autour de deux postulats de base que nous allons maintenant examiner.

Postulat 1. A toute observable bornée A d'un système physique donné on peut associer un opérateur self-adjoint borné $\pi(A)$ sur un espace de Hilbert séparable H_π , dont le spectre s'identifiera au spectre (ensemble des valeurs possibles) de l'observable.

Si \mathcal{A} désigne l'ensemble des observables du système on en déduit que $\pi(\mathcal{A})$ est un sous-ensemble de l'espace de Banach $\mathcal{L}(H_\pi)$ des opérateurs linéaires continus sur H_π , qui engendre un espace vectoriel réel normé tel que $\|\pi(A)^2\| = \|\pi(A)\|^2$, $\|\pi(A)^2 + \pi(B)^2\| \geq \|\pi(B)^2\|$, et stable pour la loi de composition

$$\begin{aligned} \pi(A) \circ \pi(B) &= \frac{1}{2} [\pi(A) \cdot \pi(B) + \pi(B) \cdot \pi(A)] \\ &= \frac{1}{2} [(\pi(A) + \pi(B))^2 - \pi(A)^2 - \pi(B)^2] \end{aligned}$$

si, pour toute observable A , $\pi(A)^2$ est l'image d'une observable. Autrement dit $\pi(\mathcal{A})$ engendre une JC-algèbre. On note que ce produit commutatif est non associatif car l'associateur

$$\{\pi(A), \pi(B), \pi(C)\} = (\pi(A) \circ \pi(B)) \circ \pi(C) - \pi(A) \circ (\pi(B) \circ \pi(C)) = \frac{1}{4} [\pi(B), [\pi(A), \pi(C)]]$$

est en général différent de 0. Cette sorte de dualité entre la non-associativité du produit commutatif symétrisé et la non-commutativité du produit associatif usuel peut se mettre en évidence comme suit. La condition $\{\pi(A), \pi(B), \pi(C)\} = 0$ pour tout $B \in \mathcal{A}$ est équivalente, d'après le calcul ci-dessus, à la condition $[\pi(A), \pi(C)] = T$ où T est un élément de $\mathcal{L}(H_\pi)$ appartenant au commutant de $\pi(\mathcal{A})$. Mais par itération cette condition donne $[\pi(A), \pi(C)^n] = n T \pi(C)^{n-1}$ pour tout entier n , soit encore $n\|T\| \leq 2\|\pi(A)\| \|\pi(C)\|$ pour tout n , ce qui n'est possible que si $T = 0$. Nous reviendrons sur ce phénomène dans la dernière partie de cet exposé. Notons également que le calcul ci-dessus montre que les relations de commutation canoniques ne peuvent se réaliser par des opérateurs self-adjoints bornés : l'impulsion, la position, l'énergie ne sont pas des observables bornées. Par contre, comme en mécanique classique, les observables bornées seront généralement des fonctions bornées convenables de la position et de l'impulsion, et obéiront entre elles à des relations algébriques non commutatives qui traduiront en leur sein les relations de commutation vérifiées par ces observables fondamentales que sont la position et l'impulsion.

Signalons, avant de passer au second postulat, que les développements ultérieurs de la théorie ont montré que $\pi(\mathcal{A})$ ne pouvait avoir un commutant réduit aux seuls scalaires (et ne pouvait donc en particulier consister en la totalité des opérateurs self-adjoints sur H_π) : il doit en effet exister des opérateurs non triviaux sur H_π qui commutent avec toutes les observables (règles de supersélection) afin de pouvoir rendre compte des lois de conservation [6].

Postulat 2. A chaque état φ du système physique considéré correspond une matrice densité (opérateur à trace positif de trace 1) $\pi(\varphi)$ sur H_π telle que la valeur moyenne $\langle \varphi, A \rangle$ de l'observable A dans l'état φ soit donnée par $\langle \varphi, A \rangle = \text{Tr } \pi(\varphi) \cdot \pi(A) = \langle \pi(\varphi), \pi(A) \rangle$.

Il découle de ce postulat que l'état φ peut s'interpréter comme une forme linéaire positive continue de norme 1 sur la JC-algèbre engendrée par $\pi(\mathcal{A})$ telle que

$$\|\varphi\| = \varphi(\mathbb{1}) = \text{Tr } \pi(\varphi) = 1$$

Si $\pi(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i$ est la décomposition spectrale d'une observable à spectre discret, $\langle \varphi, A \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \text{Tr } \pi(\varphi) \cdot P_i$ de sorte que $\text{Tr } \pi(\varphi) \cdot P_i = \langle \pi(\varphi), P_i \rangle$ représente la probabilité pour que l'observable A fournisse la valeur possible λ_i lors d'une mesure dans l'état φ .

Une combinaison linéaire convexe de matrices densités étant une matrice densité on conviendra qu'elle représente encore un état (principe de superposition des états [7]) : la combinaison $\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$, $0 < \lambda < 1$, représentera l'état constitué par le mélange, dans les proportions λ et $1-\lambda$, des deux états φ_1 et φ_2 . Ainsi l'ensemble S des états du système est un convexe dont les points extrémaux seront les états purs, non décomposables sous forme d'une superposition d'états.

Si A et B sont deux observables quelconques, la positivité de φ (prolongé linéairement aux nombres complexes) permet d'écrire que

$$0 \leq \text{Tr } \pi(\varphi) \cdot [(\pi(A) - i\lambda \pi(B)) \cdot (\pi(A) + i\lambda \pi(B))] \\ = \langle \pi(\varphi), \pi(A)^2 \rangle + i\lambda \langle \pi(\varphi), [\pi(A), \pi(B)] \rangle + \lambda^2 \langle \pi(\varphi), \pi(B)^2 \rangle$$

pour tout λ réel d'où, puisque $\langle \pi(\varphi), \pi(B)^2 \rangle \geq 0$,

$$\langle \pi(\varphi), \pi(A)^2 \rangle \langle \pi(\varphi), \pi(B)^2 \rangle \geq - \frac{1}{4} \langle \pi(\varphi), [\pi(A), \pi(B)] \rangle^2.$$

Remplaçant A et B par $A - \langle \varphi, A \rangle$ et $B - \langle \varphi, B \rangle$ respectivement, on obtient

$$\langle \pi(\varphi), \pi(A)^2 \rangle - \langle \varphi, A \rangle^2 \langle \pi(\varphi), \pi(B)^2 \rangle - \langle \varphi, B \rangle^2 \geq - \frac{1}{4} \langle \pi(\varphi), [\pi(A), \pi(B)] \rangle^2.$$

Si donc $\sigma_{\varphi}(A)$ et $\sigma_{\varphi}(B)$ désignent les dispersions associées aux valeurs moyennes $\langle \varphi, A \rangle$ et $\langle \varphi, B \rangle$ respectivement, il vient

$$\sigma_{\varphi}(A)\sigma_{\varphi}(B) \geq \left\langle \pi(\varphi), \frac{i}{2} [\pi(A), \pi(B)] \right\rangle$$

pour tout $\varphi \in S$. Cette inégalité, connue sous le nom d'*inégalité de Heisenberg*, met en évidence le fait annoncé plus haut que le non-nullité du commutateur $[\pi(A), \pi(B)]$ détermine une borne inférieure à la précision conjointe des mesures simultanées de A et B dans l'état φ . Or cette non-commutativité, nous l'avons déjà noté, est précisément la caractéristique d'une théorie quantique et traduit la dualité

onde-corpuscule. Un sous-ensemble $\mathbb{B} \subset \mathcal{A}$ d'observables tel que $\pi(\mathbb{B})$ soit constitué d'opérateurs commutant deux à deux est un sous-ensemble d'observables *simultanément mesurables*, et réciproquement (cf. dernière partie de cet exposé). Alors $\pi(\mathbb{B})$ engendrera avec l'opérateur unité, par combinaisons linéaires réelles et produits, une sous-algèbre commutative d'opérateurs dont la fermeture $C(\mathbb{B})$ sera une C^* -algèbre commutative réelle (ou si l'on préfère une JB-algèbre associative), elle-même isomorphe à une algèbre $C(\Omega)$ de fonctions réelles continues sur un espace compact Ω . Ce sera en particulier le cas si \mathbb{B} se réduit à une seule observable $\mathbb{B} = \{A\}$: c'est évident du point de vue mathématique, et clair du point de vue physique car les valeurs possibles de l'observable $p(A)$, où p est un polynôme à coefficients réels, sont données par Spectre $p(A) = p(\text{Spectre } A)$, et calculables à partir de celle de A sans recourir à de nouvelles opérations de mesures susceptibles de perturber le système physique. La collection des $(C(A), A \in \mathcal{A})$ constitue donc au sein des observables une structure locale dont chaque élément a un comportement classique, le comportement quantique n'apparaissant que lorsqu'interviennent plusieurs observables non commutantes.

Notons enfin que les développements ultérieurs de la théorie ont mis en évidence des états qui, tout en restant interprétables comme des formes linéaires positives de norme 1 sur $\pi(\mathcal{A})$, ne peuvent être représentés par des matrices densités sur H_π mais seulement approchées par ces dernières (états d'équilibre en mécanique statistique quantique par exemple, [8]).

Avant de prendre nos distances vis à vis de ce schéma, remarquons que l'espace des opérateurs à trace self-adjoints est un espace à norme basique ayant pour base les opérateurs à trace positifs de trace 1, tandis que l'espace des opérateurs self-adjoints bornés est un espace à unité d'ordre relativement à la notion d'opérateur positif, tous deux en dualité séparante d'ordre et de norme : la structure fondamentale entrevue en mécanique classique se retrouverait donc ici.

En observant le modèle que nous venons de décrire, on constate toutefois que les éléments de l'espace de Hilbert H_π ne semblent pas jouer de rôle déterminant si ce n'est de fournir des états (purs) particuliers par l'intermédiaire de projecteurs de rang 1, sans pour autant les fournir nécessairement tous comme l'a montré I. Segal [2]. On peut donc légitimement se demander si son rôle est intrinsèque ou contingent.

Dans le cadre des systèmes quantiques à nombres fini de degrés de liberté, von Neumann a prouvé qu'il n'existe, à un isomorphisme près et

moyennant une hypothèse de continuité, qu'une seule réalisation concrète des relations de commutation canonique [9]. A l'opposé, dans le cas d'un nombre infini de degrés de liberté (cas dont l'examen s'impose si l'on veut rendre compte du phénomène de transition de phase en mécanique statistique quantique) on sait mettre en évidence une multitude de représentations non unitairement équivalentes [10], l'une d'elles pouvant être mieux adaptée que telle autre à la description d'un système dans un état donné.

Ces deux situations extrêmes laissent donc entrevoir que les relations de commutation qui structurent algébriquement l'ensemble des observables ont un caractère plus fondamental que leurs diverses représentations opératoriennes et les espaces de Hilbert sous-jacents.

Afin de conforter ce point de vue, considérons deux représentations π_1 et π_2 de \mathcal{A} sur deux espaces de Hilbert H_{π_1} et H_{π_2} respectivement, non unitairement équivalentes. Comment, pour un état φ donné, comparer ces deux représentations du point de vue de l'information qu'elles procurent, ou des possibilités de calcul qu'elles offrent ?

Supposons que $\pi_i(\mathcal{A})$ soit la partie self-adjointe d'une C^* -algèbre d'opérateurs sur H_{π_i} et notons S^i l'ensemble de ses états, ensemble que l'on peut, à travers l'application $A \in \mathcal{A} \rightarrow \varphi_i(\pi_i(A))$, $\varphi_i \in S^i$, $i = 1, 2$ considérer comme un sous-ensemble de S . On sait que S^i est la fermeture faible de S_x^i , ensemble des états sur $\pi_i(\mathcal{A})$ représentables par des matrices densité sur H_{π_i} . Il sera alors naturel de considérer π_1 et π_2 comme *physiquement équivalentes* [3] si le résultat des mesures d'un nombre fini d'observables dans un état physique φ peut être approché aussi bien par une matrice densité $\pi_1(\varphi)$ sur H_{π_1} que par une matrice densité $\pi_2(\varphi)$ sur H_{π_2} . Comme toute mesure physique comporte une part d'imprécision, le "aussi bien" doit être compris comme signifiant "à un seuil d'erreur ϵ près, fixé à l'avance". Autrement dit pour toute famille finie $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathcal{A}$ et toute matrice densité $\pi_1(\varphi)$ sur H_{π_1} il doit exister une matrice densité $\pi_2(\varphi)$ sur H_{π_2} telle que

$$|\text{Tr } \pi_1(\varphi) \cdot \pi_1(A_i) - \text{Tr } \pi_2(\varphi) \cdot \pi_2(A_i)| < \epsilon, \quad i = 1, \dots, n.$$

En d'autres termes, cela signifie que, au sein de l'ensemble S des états, ceux qui se trouvent décrits, à travers π_1 , par des matrices densité sur H_{π_1} ont même fermeture faible ou, si l'on préfère, que $S^1 = S^2$. On retrouve là la notion d'équivalence faible des représentations introduites

par J.M.G. Fell [11] dans le contexte des C^* -algèbres, notion beaucoup moins forte que celle d'équivalence unitaire puisque Fell a prouvé que deux représentations d'une même C^* -algèbre sont faiblement équivalentes si et seulement si elles ont le même noyau (d'où l'équivalence faible - ou physique - de toutes les représentations fidèles).

L'approche axiomatique se trouve donc légitimée dès que l'on prend en compte ce concept d'équivalence physique qui porte à conclure que l'ensemble des observables et la collection des états doivent posséder des structures assez riches pour contenir déjà toute l'information utile, structures qu'une représentation concrète ne fera qu'explicitier dans un processus de modélisation approprié à l'état considéré. Elle se situe dans la droite ligne de la démarche entreprise par von Neumann et la généralise tout en conservant ses qualités : l'introduction des algèbres d'observables et des ensembles d'états permettra d'englober à la fois le cas de la mécanique statistique quantique ou des théories à règles de supersélection, tandis que la puissance des techniques d'opérateurs sur un espace de Hilbert sera préservée à travers le jeu d'une théorie des représentations.

3. LES APPROCHES AXIOMATIQUES

A côté de la tentative de Jordan-von Neumann-Wigner mentionnée plus haut et ouvrant la voie à ce que l'on peut qualifier d'approche algébrique, un travail presque contemporain de Birkhoff et von Neumann [12] amorçait une voie parallèle dite logique quantique ou calcul des propositions. Après s'être développées de manière indépendante au cours des décennies suivantes, ces deux approches se sont depuis suffisamment interpénétrées pour que commencent à se dessiner les contours d'une axiomatique synthétisant ces deux points de vue.

L'approche algébrique constitue à postuler qu'au sein de l'ensemble \mathcal{A} des observables bornées peuvent se définir deux opérations : d'une part la combinaison linéaire à coefficients réels $\alpha A + \beta B$, $A, B \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de deux observables, d'autre part le carré A^2 d'une observable. La première opération ne peut se définir à partir des processus de mesure mais on peut lui donner un sens si l'on admet que le système possède suffisamment d'états pour séparer l'ensemble des observables en ce sens que la donnée des valeurs moyennes d'une observable pour tous les états du système permet de la caractériser : il suffit alors de définir $\alpha A + \beta B$ comme l'unique observable dont la valeur moyenne obéit à $\langle \varphi, \alpha A + \beta B \rangle = \alpha \langle \varphi, A \rangle + \beta \langle \varphi, B \rangle$ et

d'appeler observable 0 celle pour laquelle $\langle \varphi, 0 \rangle = 0$ pour obtenir sur \mathcal{A} une structure d'espace vectoriel réel. L'observable A^2 pourra de son côté se concevoir comme celle dont le spectre (ensemble des valeurs possibles) sera constitué par l'ensemble des carrés des valeurs possibles de l'observable A. La valeur moyenne $\langle \varphi, A \rangle$ d'une observable A dans un état n'étant autre que celle de la distribution de probabilité obtenue en procédant à une suite de mesures de A sur une collection de systèmes physiques identiques, chaque fois que cette distribution sera concentrée sur le nombre $\langle \varphi, A \rangle$ on pourra qualifier φ d'état ayant une dispersion nulle sur A [13]. Si l'on admet qu'une observable possède suffisamment d'états à dispersion nulle, on pourra également donner un sens à A^2 par l'équation $\langle \varphi, A^2 \rangle - \langle \varphi, A \rangle^2 = \sigma_\varphi(A)^2 = 0$ pour tout état φ à dispersion nulle sur A.

Une fois admis ces préliminaires, ces deux opérations permettent de définir sur \mathcal{A} une loi de composition commutative que, par abus de langage, nous appellerons produit, selon $A \circ B = \frac{1}{2} [(A+B)^2 - A^2 - B^2]$, et qui s'avère a priori non associative et non distributive.

Si l'on assortit ces postulats des axiomes suivants :

- 1°) Il existe une observable unité $\mathbb{1}$ pour le produit \circ ;
- 2°) $A^2 \circ A^2 = (A^2 \circ A) \circ A = A^4$ (puissance associative) ;
- 3°) $\sum_{\text{finie}} A_i^2 = 0$ implique $A_i = 0$ (réalité formelle) ;
- 4°) $A \circ (-B) = -(A \circ B)$ (distributivité) ;
- 5°) dimension de \mathcal{A} finie ;

on se retrouve dans le cadre du travail de Jordan-von Neumann-Wigner qui montre que \mathcal{A} est une algèbre de Jordan formellement réelle et détermine leur classification : \mathcal{A} est somme directe d'algèbres simples, chacune d'elles appartenant à l'un ou l'autre des types suivants :

- a) $\mathcal{A} = \mathbb{R}$,
- b) $\mathcal{A} = \{A_0 = \mathbb{1}, A_1, \dots, A_{n-1}\}$ où les A_i , $i = 0, \dots, n-1$ sont une base de \mathcal{A} telles que $A_i \circ A_j = \delta_{ij} \mathbb{1}$ (facteurs de spin),
- c) $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{K})$, algèbre des matrices hermitiennes $n \times n$ sur le corps \mathbb{K} des réels, des complexes ou des quaternions,

d) $\mathcal{A} = M_3(\mathbb{O})$, algèbre exceptionnelle des matrices hermitiennes 3×3

sur les octaves de Cayley, algèbres qui, à l'exception de la dernière, sont toutes spéciales en ce sens qu'elles peuvent s'obtenir à partir d'une algèbre associative non nécessairement commutative par symétrisation de son produit.

Le caractère rudimentaire du spectre des observables dans ce cadre-là (fini et simple), conséquence de l'axiome 5), rendant ce modèle inapte à décrire des situations physiques même fort simples, il fallait passer à la dimension infinie et introduire une structure topologique.

A cet effet, puisque l'on convient de ne travailler qu'avec des observables bornées, Segal [2] proposa d'abandonner les axiomes 3°) et 5°) au profit de l'introduction d'une norme $\|A\|$ sur l'espace vectoriel \mathcal{A} obéissant aux conditions :

- $\alpha)$ $\|A^2\| = \|A\|^2$
- $\beta)$ $\|A^2 - B^2\| \leq \max(\|A^2\|, \|B^2\|)$;
- $\gamma)$ $A \rightarrow A^2$ est continue ;
- $\delta)$ \mathcal{A} est complet ;

et d'affaiblir l'axiome 4°) selon

$$4'°) A^m \circ (-A^n) = -A^{m+n}$$

ce qui revient à n'exiger la distributivité qu'au sein des puissances d'une même observable.

Cette structure, que nous avons appelée *système de Banach à puissance associative* [14], jouit de la propriété que le carré permet de définir une notion de positivité, et donc une relation d'ordre, telle que la donnée de \mathcal{A} est équivalente à celle d'un espace à unité d'ordre $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_+, \mathbb{1})$ muni d'un carré convenable vérifiant en particulier :

$$-1 \leq A \leq 1 \quad \text{implique} \quad 0 \leq A^2 \leq 1$$

Qui plus est, le sous-système $C(A)$ engendré par une observable quelconque A est une JB-algèbre associative (et s'identifie donc à l'algèbre $C(\Omega)$ des fonctions réelles continues sur un espace compact Ω), et cette propriété est en fait caractéristique des systèmes de Banach à

puissance associative.

Si l'on préfère conserver l'axiome 4°), la condition γ) devient superflue et l'on obtient la classe de ce que nous avons appelé les *algèbres de Banach* (non nécessairement associatives) à *puissance associative* dont nous avons montré l'identité avec celle des JB-algèbres, étendant ainsi à la dimension infinie le travail de Jordan-von Neumann-Wigner.

La structure des JB-algèbres est maintenant bien connue [15] : elles possèdent un idéal de Jordan J unique tel que \mathcal{A}/J possède une représentation de Jordan fidèle comme JC-algèbre, tandis que toute représentation irréductible de \mathcal{A} qui s'annule par J se réalise sur l'algèbre exceptionnelle $M_3(\mathbb{O})$. En d'autres termes, il existe une famille d'homomorphismes Φ de \mathcal{A} dans \mathbb{B}_Φ qui sépare les points de \mathcal{A} , où \mathbb{B}_Φ est soit une JC-algèbre, soit $M_3(\mathbb{O})$. Par ailleurs les JC-algèbres irréductibles sont soit des facteurs de spin, soit assez proches de la partie self-adjointe d'une C^* -algèbre [16], pour que la situation en dimension infinie ne diffère pas essentiellement de celle obtenue en dimension finie.

Tout ceci semble donc conforter la thèse de I. Segal [17] selon laquelle il est naturel de prendre pour algèbre d'observables la partie self-adjointe d'une C^* -algèbre, thèse reprise avec succès par Haag et Kastler, et développée depuis par de nombreux chercheurs (cf. Bibliographie de [13]), à une époque où la théorie des JB-algèbres en était à ses débuts.

C'est pourquoi, si l'on accepte d'abandonner le cadre des algèbres associatives et si l'on désire également préserver l'intérêt éventuel des algèbres exceptionnelles en physique, l'approche algébrique se caractérisera plus généralement par la convention que l'algèbre des observables est une JB-algèbre, ou du moins un système de Banach à puissance associative.

Dans tous les cas on notera la permanence du schéma de base : $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_+, \mathbb{1})$ et $(V = \mathcal{A}', V_+, S)$ constituent le couple d'un espace à unité d'ordre et d'un espace à norme basique respectivement, en dualité séparante d'ordre et de norme.

En dépit de ses aspects séduisants, l'approche algébrique souffre de quelques défauts : la difficulté épistémologique de définir conjointement la somme et le carré au sein des observables, le caractère ad hoc des axiomes de distributivité, ou le fait que l'algèbre des observables peut ne pas contenir d'idempotents (défaut qui peut toutefois être dépassé en

plongeant \mathcal{A} dans son bidual).

Or les idempotents de \mathcal{A} apparaissent comme des observables fondamentales (dites *propositions*) conduisant à des résultats de mesure fournissant uniquement des valeurs 0 ou 1 et qui, par des combinaisons du type décomposition spectrale, doivent permettre de reconstruire les autres.

L'approche dite de la logique quantique consiste précisément à réduire l'investigation du couple (\mathcal{A}, S) à celle de (\mathbb{P}, S) où \mathbb{P} désigne l'ensemble des propositions du système. Dans le cas de la mécanique classique, les éléments de \mathbb{P} s'identifieront aux boréliens de l'espace des phases ordonnés par inclusion, passage au complémentaire et disjonction ; dans le cas de la mécanique quantique traditionnelle, au treillis des projecteurs sur l'espace de Hilbert ordonnés par l'inclusion des sous-espaces fermés, passage au projecteur complémentaire et orthogonalité.

Par analogie avec ces situations particulières, on fera de \mathbb{P} un ensemble ordonné et orthocomplémenté à l'aide des notions d'implication logique, de passage à la proposition contraire et de disjonction des propositions (deux propositions sont disjointes si l'une implique le contraire de l'autre).

Cette approche, inspirée des idées de [12], a tout d'abord été développée par Mackey [18] en supposant que \mathbb{P} pouvait s'identifier à l'ensemble des sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert séparable. Dès lors les observables bornés s'identifient aux opérateurs self-adjoints continus et, grâce au théorème de Gleason [19], les états aux matrices densité, si bien que le schéma conventionnel de la mécanique quantique est ainsi restauré.

De nombreux chercheurs ont donc tenté de généraliser l'axiomatique de Mackey, tout en essayant de rejoindre le point de vue algébrique. On en trouvera un bon nombre dans la bibliographie du travail cité en référence [20], travail dont nous allons exposer l'essentiel car il offre une bonne unification des deux approches, et montre combien les travaux mathématiques contenus dans les références [21] et [22] et élaborant une théorie spectrale non commutative présentent un intérêt pour l'axiomatique quantique (voir appendice).

4. PLAIDOYER EN FAVEUR DES JB-ALGÈBRES

Nous allons donc présenter ici, sans entrer dans les détails des preuves, l'axiomatique proposée par W. Guz [20]. Nous n'en retiendrons que

les lignes concernant directement l'ensemble des observables \mathcal{A} et nous nous contenterons de mentionner qu'elle permet également une investigation détaillée de la structure de l'ensemble S des états.

Les ensembles \mathcal{A} et S sont donc considérés comme des concepts premiers, et l'on désignera par $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ la σ -algèbre des boréliens de la droite réelle \mathbb{R} . On admettra tout d'abord les quatre postulats suivants :

Postulat 1. Il existe une fonction

$$p : \mathcal{A} \times S \times \mathbb{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

qui, pour $A \in \mathcal{A}$ et $\varphi \in S$ fixés, est une mesure de probabilité sur $\mathbb{B}(\mathbb{R})$ telle que $p(A, \varphi, E)$ représente la probabilité pour que la mesure de l'observable A dans l'état φ conduise à une valeur appartenant au borélien E . On dira que $p(A, \varphi, \cdot)$ est *la distribution de probabilité de l'observable A dans l'état φ* ;

Postulat 2. Si $p(A_1, \varphi, \cdot) = p(A_2, \varphi, \cdot)$ pour tout $\varphi \in S$, alors $A_1 = A_2$, ce qui signifie que deux observables différentes doivent avoir des distributions de probabilité différentes dans au moins un état ;

Postulat 3. Si $p(A, \varphi_1, \cdot) = p(A, \varphi_2, \cdot)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, alors $\varphi_1 = \varphi_2$ ce qui signifie qu'un état est complètement déterminé par la connaissance de la distribution de probabilité de toutes les observables dans cet état, et peut donc s'identifier à l'application $p_\varphi : A \rightarrow p(A, \varphi, \cdot)$ de \mathcal{A} dans les mesures de probabilité sur \mathbb{R} , bornée puisque $\|p(A, \varphi, \cdot)\|_1 = 1$ (où $\|\cdot\|_1$ désigne la norme usuelle sur les mesures bornées) ;

Postulat 4. Pour toute suite $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset S$ et toute suite $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$

telle que $\sum_i t_i = 1$, Il existe un état $\varphi \in S$ tel que

$$p(A, \varphi, E) = \sum_i t_i p(A, \varphi_i, E).$$

On posera

$$\varphi = \sum_i t_i \varphi_i$$

et φ s'interprétera comme l'état obtenu par "mélange", ou superposition, des états φ_i dans des proportions t_i . Un état φ sera qualifié de pur s'il ne peut être décomposé de cette manière.

A la lumière de la formulation traditionnelle de la théorie quantique, le fondement physique de ces postulats est clair.

Ils permettent d'identifier tout couple $(A, E) \in \mathcal{A} \times \mathbb{B}(\mathbb{R})$ avec la proposition (vérifiable expérimentalement) "la mesure de l'observable A fournit une valeur appartenant à E ", proposition dont la probabilité de vérification dans l'état φ sera représentée par le nombre $p(A, \varphi, E)$. La condition $p(A, \varphi, E) = p(B, \varphi, E)$ (resp. $p(A, \varphi, E) \leq p(B, \varphi, F)$) pour tout $\varphi \in S$ permet d'introduire une relation d'équivalence (resp. une relation d'ordre) au sein des propositions. La relation d'ordre représente l'implication logique des propositions, tandis que le passage de (A, E) à $(A, \mathbb{R} - E) = (A, E)'$ est une involution représentant le passage à la proposition contraire. Enfin deux propositions (A, E) et (B, F) seront dites *exclusives*, ou *disjointes*, ou *orthogonales*, si $(A, E) \leq (B, F)'$ (ou de manière équivalente si $(B, F) \leq (A, E)'$). On appellera *logique* du système physique, ou *logique des propositions*, l'ensemble partiellement ordonné à involution \mathcal{L} , quotient de $\mathcal{A} \times \mathbb{B}(\mathbb{R})$ par la relation d'équivalence mentionnée plus haut. On notera I et 0 les classes des propositions (A, \mathbb{R}) et (A, \emptyset) .

Désignons par $V = V_+ \oplus V_-$, où $V_+ = \mathbb{R}^+ S$, l'espace vectoriel réel engendré par S à travers l'identification $\varphi \rightarrow p_\varphi$. Il peut être muni de la relation d'ordre induite par la notion de mesure positive et de la norme

$$\|\varphi\| = \inf \left\{ \lambda_1 + \lambda_2 ; \varphi = \lambda_1 \varphi_1 - \lambda_2 \varphi_2 ; \varphi_1, \varphi_2 \in S ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+ \right\}$$

pour devenir un espace à norme basique (V, V_+, S) .

Appelant spectre de l'observable A le plus petit sous-ensemble fermé F de \mathbb{R} tel que $p(A, \varphi, F) = 1$ pour tout $\varphi \in S$, on caractérisera les observables bornées comme étant celles pour lesquelles F lui-même est borné.

Il sera alors possible de définir la valeur moyenne de l'observable bornée A dans l'état φ selon

$$\langle \varphi, A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} t p(A, \varphi, dt) \leq \|A\|$$

si l'on pose

$$\|A\| = \text{Sup}\{|t|, t \in \text{spectre de } A\}$$

et d'assimiler A à une forme linéaire sur V par prolongement linéaire de l'application $\varphi \in S \rightarrow \langle \varphi, A \rangle$. Si S est assez grand en ce sens que pour toute proposition $\{A, E\}$ il existe un état φ tel que $p(A, \varphi, E) = 1$ toute observable bornée sera alors une forme linéaire continue sur l'espace à norme basique V dont la norme coïncidera avec $\|A\|$.

Cette hypothèse sur S permet en outre, comme nous l'avons vu dans la partie précédente, de définir sur l'ensemble \mathcal{A}_b des observables bornées une structure d'espace vectoriel réel, une notion d'observable unité notée $\mathbb{1}$, et une relation d'ordre en définissant la positivité de l'observable A par la condition $\langle \varphi, A \rangle \geq 0$ pour tout $\varphi \in S$. Dès lors \mathcal{A}_b devient un espace à unité d'ordre comme sous-espace du dual V' de l'espace à norme basique V .

Nous avons souligné plus haut le phénomène quantique selon lequel toute mesure effectuée dans un état modifiait ce dernier. En d'autres termes, la mesure de probabilité $p(A, \varphi, \cdot)$ va se trouver modifiée dès que l'on aura procédé à la vérification de la validité de la proposition $\{A, E\}$ dans l'état φ , selon un processus qui évoque le passage d'une mesure de probabilité à la mesure de probabilité conditionnelle associée à la réalisation d'un événement en théorie des probabilités.

Le postulat suivant est précisément destiné à formaliser ce point fondamental de la théorie.

Postulat 5. A toute proposition $\{A, E\}$ on associera une application $P_{\{A, E\}}$ de S dans lui-même définie sur le domaine $D_{\{A, E\}} = \{\varphi \in S ; p(A, \varphi, E) > 0\}$ et telle que

- a) $p(A, P_{\{A, E\}}\varphi, E) = 1$ pour tout $\varphi \in D_{\{A, E\}}$;
- b) $P_{\{A, E\}}\varphi = \varphi$ si $p(A, \varphi, E) = 1$.

L'interprétation physique est claire : si une mesure réalisée sur un

ystème dans l'état initial φ révèle que la proposition (A,E) est vraie, alors le système se retrouve dans l'état $P_{(A,E)}\varphi$, état du système conditionné par la réalisation de la proposition (A,E) . Le nombre $p(B, P_{(A,E)}\varphi, F)$ fournit la *probabilité conditionnelle* pour que la proposition (B,F) soit vraie, sachant que la proposition (A,E) s'est avérée vraie dans l'état φ du système. On vérifiera aisément que si (A,E) implique (B,F) (resp. est orthogonale à (B,F)) alors

$$P_{(B,F)}P_{(A,E)}\varphi = P_{(A,E)}\varphi \quad (\text{resp. } p(B, P_{(A,E)}\varphi, F) = 0)$$

On en déduit alors une application $P_{(A,E)}$ de V_+ dans V_+ selon

$$P_{(A,E)}(\lambda\varphi) = \lambda p(A, \varphi, E) P_{(A,E)}\varphi, \quad \varphi \in S, \quad \lambda \geq 0.$$

Si l'élément $x = \lambda\varphi$ de V_+ ($\lambda \geq 0$) est interprété comme un faisceau (état non normalisé) d'intensité $\|x\| = \lambda$, $P_{(A,E)}$ le transforme en un nouveau faisceau $P_{(A,E)}x$ d'intensité $\|P_{(A,E)}x\| = \lambda p(A, \varphi, E)$, de sorte que le rapport des intensités des deux faisceaux n'est autre que la probabilité $p(A, \varphi, E)$ pour les particules du faisceau x de posséder la propriété (A,E) . Autrement dit, $P_{(A,E)}$ représente un filtre, associé à la proposition (A,E) , qui, appliqué à un faisceau x , le transforme en un faisceau $P_{(A,E)}x$ dont les particules qui le constituent ont la propriété (A,E) . Le nombre $p(A, \varphi, E) p(B, P_{(A,E)}\varphi, F)$ fournira la probabilité pour que la proposition (A,E) puis la proposition (B,F) se révèlent successivement vraies, sachant que le système est initialement dans l'état φ , et dépend donc de manière cruciale de l'ordre de vérification de ces propositions. Les $P_{(A,E)}$ sont des idempotents et l'implication (resp. l'orthogonalité) des propositions se traduira par l'inclusion (resp. l'orthogonalité) des projecteurs associés.

On assortira enfin ce postulat de la condition selon laquelle, pour toute observable bornée B et toute proposition (A,E) , il existe une observable bornée $Q_{(A,E)}B$ telle que

$$\langle \varphi, Q_{(A,E)}B \rangle = \langle P_{(A,E)}\varphi, B \rangle$$

pour tout $\varphi \in S$. Ceci n'est autre que le classique passage du schéma de Heisenberg à celui de Schrödinger et consiste à demander que l'action de $P_{(A,E)}$ sur V_+ puisse se décrire de manière duale par une action $Q_{(A,E)}$

sur \mathcal{A}_b . Ceci permet en particulier d'associer à toute observable bornée A sa mesure spectrale canonique définie comme l'application

$$E \in \mathbb{B}(\mathbb{R}) \rightarrow Q_{\{A,E\}} \mathbb{1}.$$

Il s'avère alors que $(\mathcal{A}_b, \mathcal{A}_b^+, \mathbb{1})$ et (V, V_+, S) sont respectivement un espace à unité d'ordre et un espace à norme basique en dualité séparante d'ordre et de norme pour la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prolongeant la notion de valeur moyenne, si bien que $P_{\{A,E\}}$ se prolonge linéairement en un projecteur sur V et que $Q_{\{A,E\}} = P_{\{A,E\}}^*$, où $*$ désigne l'adjoint.

Nous avons également insisté précédemment sur le fait que, dans la formulation traditionnelle, la possibilité de mesurer simultanément deux observables avec précision était liée à la commutation des opérateurs. Afin de traduire ce phénomène, il convient d'introduire une notion de *compatibilité*, qu'il suffira pour les besoins de la cause de définir entre observables positives et filtres $Q_{\{A,E\}}$, par l'une ou l'autre des affirmations ci-dessous dont l'équivalence constitue le postulat suivant :

- Postulat 6.
- a) $A \geq 0$ et $Q_{\{B,F\}}$ sont compatibles ;
 - b) $Q_{\{B,F\}} A \leq A$;
 - c) $A \geq 0$ et $Q_{\{B,F\}}'$ sont compatibles ;
 - d) $Q_{\{B,F\}} A + Q_{\{B,F\}}' A = A$.

Dès lors les $P_{\{A,E\}}$ (resp. $Q_{\{A,E\}}$) sont des P-projections sur V (resp. sur \mathcal{A}_b) au sens de [21] : dans le cadre de la formulation traditionnelle, cela signifie qu'il existe un projecteur $P_{\{B,F\}}$ dans l'espace de Hilbert H_π tel que

$$Q_{\{B,F\}} A = P_{\{B,F\}} \cdot \pi(A) \cdot P_{\{B,F\}}$$

pour toute observable bornée A . Mais alors le point d) ci-dessus s'exprime par la condition

$$P_{\{B,F\}} \cdot \pi(A) \cdot P_{\{B,F\}} + (I - P_{\{B,F\}}) \cdot \pi(A) \cdot (I - P_{\{B,F\}}) = \pi(A)$$

dont on vérifie immédiatement qu'elle est équivalente à la nullité du commutateur $[P_{\{B,F\}}, \pi(A)]$, d'où le bien fondé de cette notion de compatibilité. De plus les espaces ordonnés \mathcal{A}_b et V sont alors en dualité

spectrale, ce qui signifie, pour parler brièvement, que l'ensemble ordonné \mathbb{Q} (respectivement \mathbb{P}) des P-projections sur \mathcal{A}_b (respectivement sur V) est "assez riche".

Il suffit alors de supposer que \mathcal{A}_b jouit de la propriété que pour toute suite croissante $\{A_i\} \subset \mathcal{A}_b$ bornée supérieurement il existe $A \in \mathcal{A}_b$ telle que $\langle \varphi, A \rangle = \sup \langle \varphi, A_i \rangle$ pour tout $\varphi \in S$, pour conclure, en suivant la théorie développée en [21], que \mathcal{A}_b est complet en norme et possède un calcul fonctionnel pour les fonctions boréliennes bornées relativement à la mesure spectrale canoniquement associée à chaque observable.

On notera que l'hypothèse ci-dessus, bien que sans fondement physique, est purement technique et qu'il est toujours possible de plonger \mathcal{A}_b dans un espace à unité d'ordre possédant cette propriété (par exemple sont bidual).

Dès lors le calcul fonctionnel permet de définir dans \mathcal{A}_b une opération carré $A \rightarrow A^2$ qui fera de \mathcal{A}_b un système de Banach à puissance associative si elle est continue, et en tout cas une algèbre de Banach à puissance associative (et donc une JB-algèbre) si le produit associé est distributif. Or il est montré dans [22] que cette distributivité sera garantie par le postulat suivant :

Postulat 7. Soient $\{A,E\}$ et $\{B,F\}$ deux propositions, P_1 et P_2 les P-projections associées, P'_1 et P'_2 les P-projections associées aux propositions contraires. Alors, pour tout φ dans S , l'égalité

$$\|P'_2 P_1 \varphi\| + \|P_2 P'_1 \varphi\| = \|P'_1 P_2 \varphi\| + \|P_1 P'_2 \varphi\|$$

est vraie.

L'interprétation de ce postulat et son contenu physique sont également clairs : il indique que la probabilité dans l'état φ de la proposition

$$[\{A,E\} \text{ et } \{B,F\}' \text{ ou } \{A,E\}' \text{ et } \{B,F\}]$$

disjonction exclusive des propositions $\{A,E\}$ et $\{B,F\}$, est indépendante de l'ordre des deux propositions, ce qui est trivialement vérifié dans le schéma traditionnel où $QA = p.\pi(A).p$.

Ainsi se trouve légitimé, à partir de postulats dont le fondement physique est transparent, le choix d'une JB-algèbre comme algèbre des

observables d'un système quantique.

5. QUELQUES DEVELOPPEMENTS

Supposons donc que \mathcal{A} , algèbre des observables bornées, soit une JB-algèbre. L'ensemble S des états du système coïncide alors avec celui des états de \mathcal{A} , formes linéaires positives φ (automatiquement continues) sur \mathcal{A} telles que $\|\varphi\| = \varphi(\mathbb{1}) = 1$. Toute sous-algèbre fermée à unité $C(A)$ engendrée par une observable $A \in \mathcal{A}$ est associative et assimilable à $C(\Omega)$ algèbre des fonctions réelles continues sur un espace compact Ω . L'interprétation de la mesure de probabilité $p(A, \varphi, \cdot)$ est alors claire : c'est la mesure de probabilité obtenue par restriction de φ à $C(A) \sim C(\Omega)$. Inversement tout état (resp. tout état pur) sur $C(A)$ se prolonge en un état (resp. un état pur) sur \mathcal{A} tout entière.

La décomposition de Peirce est un outil essentiel dans l'étude des JB-algèbres [4]. Elle découle du fait que l'opérateur L_P de multiplication dans \mathcal{A} par un idempotent $P^2 = P \in \mathcal{A}$ a pour valeurs propres $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ ce qui conduit à la décomposition en somme directe $\mathcal{A} = N_0(P) \oplus N_{1/2}(P) \oplus N_1(P)$ où les sous-espaces propres associés $N_i(P)$, $i = 0, \frac{1}{2}, 1$, obéissent à la table de multiplication ci-dessous

$$\begin{aligned} N_0(P) N_0(P) &\subseteq N_0(P) \\ N_1(P) N_1(P) &\subseteq N_1(P) \\ N_0(P) N_1(P) &= 0 \\ N_{1/2}(P) N_{1/2}(P) &\subseteq N_0(P) \oplus N_1(P) \\ N_{1/2}(P) (N_0(P) \oplus N_1(P)) &\subseteq N_{1/2}(P) \end{aligned}$$

et où les projecteurs spectraux sont $2L_P^2 - 3L_P + I$, $-4L_P^2 + 4L_P$ et $2L_P^2 - L_P$ sur $N_0(P)$, $N_{1/2}(P)$ et $N_1(P)$ respectivement. En particulier les projecteurs $U_P = 2L_P^2 - L_P$ sur $N_1(P)$ associés aux idempotents de \mathcal{A} s'identifient aux P-projections de \mathcal{A} , et se réduisent à $U_P A = P.A.P$ dans le cas des JC-algèbres. A toute proposition $\{A, E\}$ on peut donc associer un idempotent $P_{\{A, E\}}$ de \mathcal{A} tel que $Q_{\{A, E\}} = U_{P_{\{A, E\}}}$.

Comme nous l'avons déjà remarqué, diverses notions peuvent prétendre exprimer, au sein de \mathcal{A} , le fait que des observables sont simultanément mesurables (commutativité des opérateurs dans la formulation

traditionnelle). Afin de clarifier cette situation, introduisons quelques définitions.

1°) Un sous-ensemble $\mathbb{B} \subset \mathcal{A}$ sera dit constitué d'observables *simultanément mesurables* s'il existe une collection séparante $S_{\mathbb{B}} \subset S$ d'états sans dispersion sur les éléments de $C(\mathbb{B})$, la sous-algèbre fermée à unité engendrée par \mathbb{B} . Dès lors $C(\mathbb{B})$ elle-même sera constituée d'observables simultanément mesurables. Rappelons que cela signifie que, pour tout $A, B, C \in C(\mathbb{B})$ et tout $\varphi \in S_{\mathbb{B}}$, $\langle \varphi, A^2 \rangle = \langle \varphi, A \rangle^2$, soit encore

$$\langle \varphi, AB \rangle = \frac{1}{2} \langle \varphi, (A+B)^2 - A^2 - B^2 \rangle = \frac{1}{2} [\langle \varphi, (A+B)^2 \rangle - \langle \varphi, A^2 \rangle - \langle \varphi, B^2 \rangle] = \langle \varphi, A \rangle \langle \varphi, B \rangle$$

et donc

$$\langle \varphi, (AB)C \rangle = \langle \varphi, A \rangle \langle \varphi, B \rangle \langle \varphi, C \rangle = \langle \varphi, A(BC) \rangle$$

On notera plus généralement que si φ est un état sans dispersion sur $A \in \mathcal{A}$, il découle de l'inégalité de Schwarz que,

$$\langle \varphi, (A - \langle \varphi, A \rangle)B \rangle \leq \langle \varphi, (A - \langle \varphi, A \rangle)^2 \rangle \langle \varphi, B^2 \rangle = 0$$

soit

$$\langle \varphi, AB \rangle = \langle \varphi, A \rangle \langle \varphi, B \rangle$$

quel que soit $B \in \mathcal{A}$.

2°) Un sous-ensemble $\mathbb{B} \subset \mathcal{A}$ sera dit *associatif* si $C(\mathbb{B})$ est associative, et donc identifiable à $C(\Omega)$, algèbre des fonctions réelles continues sur un espace compact Ω (c'est toujours le cas si \mathbb{B} se réduit à une seule observable). La restriction de tout état $\varphi \in S$ à $C(\mathbb{B})$ sera donc une mesure de probabilité μ_{φ} . Si, de plus, $\varphi \in S_{\mathbb{B}}$ alors $\langle \varphi, AB \rangle = \langle \varphi, A \rangle \langle \varphi, B \rangle$ pour tout $A, B \in C(\mathbb{B})$ de sorte que μ_{φ} sera une mesure de Dirac, et donc un état pur sur $C(\mathbb{B})$. La réciproque étant évidente, on en conclura donc que $\varphi \in S$ est sans dispersion sur un ensemble associatif \mathbb{B} si et seulement si sa restriction à $C(\mathbb{B})$ est un état pur.

Il est alors clair que les définitions 1°) et 2°) sont équivalentes puisque, dans le premier cas, $S_{\mathbb{B}}$ est séparant, tandis que, dans le second $C(\mathbb{B})$ possède une collection séparante d'états purs.

La notion de spectre et de norme spectrale pour une observable A

coïncident alors avec les concepts usuels au sein de $C(A)$. A travers les identifications classiques $C(A) \sim C(\Omega) \sim C(\text{Sp}A)$ les définitions suivantes sont donc équivalentes :

- Sp A = plus petit fermé F de \mathbb{R} tel que $p(A, \varphi, F) = 1$ pour tout $\varphi \in S$
- $\{\lambda \in \mathbb{R}, (1-\lambda I)^{-1} \text{ n'existe pas dans } C(A)\}$
 - $\{\langle \varphi, A \rangle, \varphi \in S_A\}$
 - $\{\langle \varphi, A \rangle, \varphi \text{ état pur sur } C(A)\}$
 - $\{\langle \varphi, A \rangle, \varphi \text{ état pur sur } C(B), A \in C(B), B \text{ famille associative d'observables}\}$
 - $\{\hat{A}(x), x \in \Omega, \text{ où } \hat{A} \text{ est la fonction de } C(\Omega) \text{ représentant } A\}$,

et la valeur moyenne $\langle \varphi, A \rangle$ se calcule à l'aide des intégrales équivalentes

$$\langle \varphi, A \rangle = \int_{\Omega} A(\omega) d\mu_{\varphi}(\omega) = \int_{\text{Sp}A} \lambda d\mu_{\varphi}(\lambda)$$

où μ_{φ} est la mesure de probabilité déterminée par restriction de φ , à $C(\Omega)$ (resp. $C(\text{Sp}A)$).

3°) Un sous-ensemble $B \subset \mathcal{A}$ sera dit *fortement associatif* si l'associateur $\{A, C, B\} = 0$ pour tout $A, B \in C(B)$ et tout $C \in \mathcal{A}$. Cette condition peut s'interpréter comme la commutativité des opérateurs L_A et L_B de multiplication par A et B respectivement.

4°) Un sous-ensemble $B \subset \mathcal{A}$ sera dit constitué d'observables *compatibles* si, pour tout $A, B \in C(B)$, $U_A B = 2A(AB) - A^2 B = A^2 B$ (ou encore $A(AB) = A^2 B$, ce qui signifie que $C(B)$ est alternative). Dans le cas où $A = P = P^2$ est un idempotent, cette condition est équivalente au point d) du Postulat 6.

Dans le cas où $B = \{A, B\}$ est une paire d'observables, les quatre définitions ci-dessus sont équivalentes [23], [24], [25].

Montrons d'abord que 4) implique 2). Il découle du théorème de Shirshov-Cohn dans les JB-algèbres [4] que $C(B) = C(A, B)$ est spéciale. Il existe donc un isomorphisme Φ de $C(A, B)$ dans une algèbre d'opérateurs self-adjoints bornés sur un espace de Hilbert tel que, si $C, D \in C(A, B)$,

$$\Phi(CD) = \Phi(C) \circ \Phi(D) = \frac{1}{2} [\Phi(C) \cdot \Phi(D) + \Phi(D) \cdot \Phi(C)].$$

Un calcul simple montre alors que la condition énoncée en 4) s'écrit $[\Phi(C), [\Phi(C), \Phi(D)]] = 0$ relativement au commutateur des opérateurs. Mais le théorème de Kleineke-Shirokov [26] implique $[\Phi(C), \Phi(D)] = 0$, soit $\Phi(C) \circ \Phi(D) = \Phi(C) \cdot \Phi(D)$. Par conséquent $C(\Phi(A), \Phi(B)) = \Phi(C(A, B))$ est associative pour le produit de Jordan, et donc aussi $C(A, B)$.

Montrons maintenant que 4) implique 3). D'après le théorème de structure mentionné page 74 il suffit de le faire successivement dans le cas où B_Φ est une JC-algèbre, puis où $B_\Phi = M_3(\mathbb{O})$.

Supposons donc d'abord que B_Φ est une JC-algèbre, et que l'associateur $\{C, F, D\} \neq 0$ pour $C, D \in C(A, B)$ et un certain $F \in \mathcal{A}$. D'après la démonstration précédente, $\Phi(C) \cdot \Phi(D) = \Phi(D) \cdot \Phi(C)$ et un calcul simple montre alors que $\Phi(C) \circ (\Phi(F) \circ \Phi(D)) = (\Phi(C) \circ \Phi(F)) \circ \Phi(D)$, d'où une contradiction.

Supposons maintenant que $B_\Phi = M_3(\mathbb{O})$. Puisque cette dernière est de dimension finie, elle est engendrée par ses éléments idempotents [1] et il suffit donc d'établir une contradiction à partir de la condition $\{C, F, P\} \neq 0$ où $C, P \in C(A, B)$ avec $P^2 = P$ et F est un élément de \mathcal{A} . Or par hypothèse $\Phi(P) \circ \Phi(C) = \Phi(P) \circ (\Phi(P) \circ \Phi(C))$ de sorte que, si $\Phi(C) = \Phi(C)_0 + \Phi(C)_{1/2} + \Phi(C)_1$ désigne la décomposition de Peirce de $\Phi(C)$ par rapport à l'idempotent $\Phi(P)$,

$$\Phi(C)_{1/2} = (-4L_{\Phi(P)}^2 + 4L_{\Phi(P)}) \Phi(C) = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \Phi(P) \circ (\Phi(C) \circ \Phi(F)) &= \Phi(P) \circ ((\Phi(C)_0 + \Phi(C)_1) \circ (\Phi(F)_0 + \Phi(F)_{1/2} + \Phi(F)_1)) \\ &= \Phi(P) \circ (\Phi(C)_0 \circ \Phi(F)_0 + (\Phi(C)_0 + \Phi(C)_1) \circ \Phi(F)_{1/2} + \Phi(C)_1 \circ \Phi(F)_1) \\ &= \frac{1}{2} (\Phi(C)_0 + \Phi(C)_1) \circ \Phi(F)_{1/2} + \Phi(C)_1 \circ \Phi(F)_1 \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} \Phi(C) \circ (\Phi(P) \circ \Phi(F)) &= (\Phi(C)_0 + \Phi(C)_1) \circ (1/2 \Phi(F)_{1/2} + \Phi(F)_1) \\ &= \frac{1}{2} (\Phi(C)_0 + \Phi(C)_1) \circ \Phi(F)_{1/2} + \Phi(C)_1 \circ \Phi(F)_1 \end{aligned}$$

d'où la même contradiction que précédemment.

Comme il est clair que 3) entraîne 2) et que 2) entraîne 4), l'équivalence annoncée est bien établie.

APPENDICE.

P-projections, dualité spectrale et théorie spectrale non commutative.

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_+)$ un espace partiellement ordonné et P, Q deux projecteurs sur \mathcal{A} . Ils seront dits *quasicomplémentaires* si

$$(\text{Im } P) \cap \mathcal{A}_+ = (\text{Ker } Q) \cap \mathcal{A}_+ \quad \text{et} \quad (\text{Ker } P) \cap \mathcal{A}_+ = (\text{Im } Q) \cap \mathcal{A}_+.$$

Si $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_+)$ et $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_+)$ sont deux espaces partiellement ordonnés mis en dualité d'ordre séparante par l'intermédiaire d'une forme bilinéaire non dégénérée, on dira que deux projecteurs positifs P et Q sur \mathcal{A} faiblement continus sont *complémentaires* s'ils sont quasicomplémentaires et s'il en est de même des projecteurs duaux P^* et Q^* sur \mathcal{B} . On montre alors que chaque membre de la paire (P, Q) est déterminé par l'autre de sorte que l'on écrira $Q = P'$.

Soient maintenant $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_+, \mathbb{1})$ et (V, V_+, S) un espace à unité d'ordre et un espace à norme basique respectivement en dualité séparante d'ordre et de norme. Etant donné un projecteur positif faiblement continu P sur \mathcal{A} ou V tel que $\|P\| \leq 1$, on dira que P est une *P-projection* s'il possède un complémentaire P' tel que $\|P'\| \leq 1$ (dès lors P' est aussi une P-projection). Il est équivalent de demander que P^* soit une P-projection sur l'autre espace, et alors $P^{**} = P'$.

En particulier, si P est une P-projection sur V , $\|P\varphi\| + \|P'\varphi\| = \|\varphi\|$ pour tout $\varphi \in V_+$ et réciproquement, tandis que si $\|P\varphi\| = \|\varphi\|$ pour un certain $\varphi \in V_+$, alors $P\varphi = \varphi$.

Si P est une P-projection sur \mathcal{A} , $P\mathbb{1} + P'\mathbb{1} = \mathbb{1}$ et réciproquement. L'élément $P\mathbb{1}$ de \mathcal{A} appartient à l'intervalle ordonné $[0, \mathbb{1}]$ et est dit *unité projective* de \mathcal{A} associée à P . L'ensemble $F_P = (\text{Im } P^*) \cap S$ est une face du convexe S dite *face projective* de S associée à P . On montre que $F_P = \{\varphi \in S ; \varphi(P\mathbb{1}) = P^*\varphi(\mathbb{1}) = 1\}$ tandis que $F_{P'} = \{\varphi \in S ; \varphi(P\mathbb{1}) = P^*\varphi(\mathbb{1}) = 0\}$. Dès lors, pour tout $A \in \mathcal{A}_+$, $PA = A$ sur F_P et $PA = 0$ sur $F_{P'}$.

Il existe un isomorphisme d'ordre entre l'ensemble \mathcal{P} des P-projections sur \mathcal{A} (ou l'ensemble \mathcal{P}^* des P-projections sur V), l'ensemble \mathcal{U} des unités projectives de \mathcal{A} et l'ensemble \mathcal{F} des faces projectives de S , chacun étant muni de son ordre naturel, et respectant les complémentations

$P \rightarrow P', P\mathbb{1} \rightarrow \mathbb{1} - P\mathbb{1} = P'\mathbb{1}, F_P \rightarrow F_{P'}$.

C'est ainsi que si \mathcal{A} est l'ensemble des opérateurs self-adjoints bornés sur un espace de Hilbert H et S celui des opérateurs à trace positifs de norme 1, alors \mathcal{U} est l'ensemble des projecteurs self-adjoints sur H , \mathcal{F} celui des faces fermées en norme du convexe S et \mathcal{P} celui des applications $a \rightarrow pap$ où $a \in \mathcal{A}$, $p \in \mathcal{U}$. Si \mathcal{A} est une JB-algèbre et S l'ensemble de ses états, \mathcal{U} est l'ensemble des idempotents de \mathcal{A} , \mathcal{F} celui des faces fermées en norme du convexe S et \mathcal{P} celui des applications $a \rightarrow 2p(pa) - pa$ où $a \in \mathcal{A}$, $p \in \mathcal{U}$.

On dira qu'une P -projection P sur \mathcal{A} est compatible avec un élément $A \in \mathcal{A}$ si $PA + P'A = A$. Si $A \in \mathcal{A}_+$, il est équivalent de demander que $PA \leq A$. La face projective F_P est alors dite compatible avec A . Dans le cas où \mathcal{A} est l'ensemble des opérateurs self-adjoint bornés sur un espace de Hilbert H , il est clair d'après le paragraphe ci-dessus que cette condition est équivalente à $[p, a] = 0$, où $a \in \mathcal{A}$ et $p \in \mathcal{U}$, et traduit donc une relation de commutation. De même, dans le cas où \mathcal{A} est une JB-algèbre, cette condition est équivalente à $p(pa) = pa$ ou à $p(ab) = a(pb)$ pour tout $b \in \mathcal{A}$.

Les espaces \mathcal{A} et V seront dits en dualité spectrale si pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ il existe une face projective unique F_P compatible avec A telle que $\varphi(a) \leq t$ pour $\varphi \in F_P$ et $\varphi(a) > t$ pour $\varphi \in F_{P'}$.

On dira enfin que \mathcal{A} est monotonelement σ -complet point par point si pour toute suite croissante $\{A_i\} \subseteq \mathcal{A}$ bornée supérieurement il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\varphi(A) = \sup \varphi(A_i)$ pour tout $\varphi \in S$.

Si $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_+, 1)$ et (V, V_+, S) sont en dualité séparante d'ordre et de norme, en dualité spectrale, et si \mathcal{A} est monotonelement σ -complète point par point, alors les ensembles $\mathcal{P}, \mathcal{U}, \mathcal{F}$ sont des treillis orthomodulaires σ -complets isomorphes, \mathcal{A} et V sont complets en norme, et tout $A \in \mathcal{A}$ possède une résolution spectrale unique, à savoir une famille $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ d'unités projectives telles que

- i) $e_\lambda \leq e_\mu$ si $\lambda \leq \mu$;
- ii) $e_\lambda = \bigwedge_{\mu > \lambda} e_\mu$;
- iii) $\bigwedge_{\lambda \in \mathbb{R}} e_\lambda = 0$;
- iv) $\bigvee_{\lambda \in \mathbb{R}} e_\lambda = \mathbb{1}$;
- v) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, F_{e_λ} est l'unique face projective

intervenant dans la définition du concept de dualité spectrale.

Alors $A = \int \lambda de_\lambda$ au sens d'une intégrale de Reimann-Stieltjes convergente en norme et $\varphi(A) = \int \lambda d\varphi(e_\lambda)$ pour tout $\varphi \in S$.

Dès lors \mathcal{A} possède un calcul fonctionnel pour les fonctions boréliennes bornées f sur \mathbb{R} avec les propriétés usuelles, à savoir que $\int f(\lambda) d\varphi(e_\lambda) = \varphi(B)$ pour tout $\varphi \in S$ définit un élément unique $B = f(A)$ de \mathcal{A} . En particulier, pour tout borélien $E \subset \mathbb{R}$, la fonction $E \rightarrow P_E \in \mathcal{U}$ définie par $\varphi(P_E) = \int_E d\varphi(e_\lambda)$ est appelée *mesure spectrale* de A et son support (intersection des fermés $F \subset \mathbb{R}$ tels que $P_{\mathbb{R} \setminus F} = 0$) le *spectre* de A .

REFERENCES

1. P. JORDAN, J. von NEUMANN and E. WIGNER, On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Ann. of Math. t.35, 1934, p. 29-64.
2. I.E. SEGAL, Postulates for a general quantum mechanic. Ann. of Math. T. 48, 1947, p. 930-948.
3. R. HAAG and D. KASTLER, An algebraic approach to quantum field theory. J. Math. Phys. t.5, 1964, p. 848-861.
4. H. HANCHE-OLSEN and E.STORMER, Jordan operator algebras. Pitman, Boston, 1984.
5. E.M. ALFSEN, Compact convex sets and boundary integrals. Ergebnisse der Math. t. 57, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
6. G.C. WICK, A.S. WIGHTMAN and E.P. WIGNER, Intrinsic parity of elementary particles, Phys. Rev. t. 88, 1952, p. 101-105.
7. C. COHEN-TANNOUJJI, B. DIU et F. LALOE, Mécanique quantique. Hermann, Paris, 1973.
8. R. HAAG, N.M. HUGENHOLTZ and M. WINNINK, On the equilibrium states in quantum statistical mechanics. Commun. Math. Phys. t. 5, 1967, p. 215-236.
9. J. von NEUMANN, Die eindentigkeit der Schrödingerschen operatoren. Math. Ann. t. 104, 1931, p. 570-578.
10. R. HAAG, On quantum field theories. Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk, t. 29, 1955, p. 1-37.
11. J.M.G. FELL, The dual space of C^* -algebras. Trans. Amer. Math. Soc., t. 94, 1960, p. 365-403.
12. G. BIRKHOFF and J. von NEUMANN, The logic of quantum mechanics. Ann. of Math., t. 37, 1936, p. 823-843.

13. G.G. EMCH, Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory. Wiley-Interscience, New-York, 1972.
14. B. IOCHUM and G. LOUPIAS, Banach power associative algebras and JB-algebras. Ann. Inst. H. Poincaré, t. 43, 1985, p. 211-225.
15. E.M. ALFSEN, F.W. SHULTZ and E. STOMER, A Gelfand-Neumark theorem for Jordan algebras. Adv. Math., t. 28, 1978, p. 11-56.
16. E. STOMER, Jordan algebras versus C^* -algebras. Acta Phys. Aust. t. XVI, 1976, p. 1-14.
17. I. SEGAL, Mathematical problems in relativistic physics. Amer. Math. Society, Providence, 1963.
18. G.W. MACKEY, Mathematical foundations of quantum mechanics. Benjamin, New-York, 1963.
19. A.M. GLEASON, Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. J. Rat. Mech. Analysis, t. 6, 1957, p. 885-894.
20. W. GUZ, Conditional probability in quantum axiomatic. Ann. Inst. H. Poincaré, t. 33, 1980, p. 63-119.
21. E.M. ALFSEN and F.W. SHULTZ, Non commutative spectral theory for affine functions spaces on convex sets. Mem. Amer. Math. Soc. t. 172, 1976.
22. E.M. ALFSEN and F.W. SHULTZ, On non commutative spectral theory and Jordan algebras. Proc. London Math. Soc., t. 38, 1979, p. 497-526.
23. M.A. YOUNGSON, Hermitian operators on Banach Jordan algebras. Proc. Edinburgh Math. Soc., t. 22, 1979, p. 169-180.
24. H.N. BOYADJIEV and M.S. YOUNGSON, Alternators on Banach Jordan algebras. Comptes Rendus Academie Bulgare des Sciences, t. 33, 1980, p. 1589-1590.

25. L.J. BUNCE, On compact action in JB-algebras. Proc. Edinburgh Math. Soc. t. 26, 1983, p 353-360.

26. B. AUPETIT, Propriétés spectrales des algèbres de Banach. Lecture Notes in Math., t. 735, 1979.

Département de Physique Mathématique
Université des Sciences et Techniques du Languedoc
34060 MONTPELLIER Cedex (France)