

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

MARTINE PICAUVET-L'HERMITTE

Ordres de Gorenstein

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 91, série *Mathématiques*, n° 24 (1987), p. 1-32

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1987__91_24_1_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ORDRES DE GORENSTEIN

Martine PICAUVET-L'HERMITTE

I - Introduction

Ce travail porte essentiellement sur l'obtention de critères pour qu'un ordre soit un anneau de Gorenstein. Nous nous sommes placés dans le cadre de la théorie des ordres commutatifs et intègres, définis au-dessus d'un anneau de Dedekind. Notre principal souci a été l'obtention de critères numériques ou de critères portant sur l'inversibilité de certains idéaux.

Une première partie est consacrée aux définitions et à l'obtention de propriétés des ordres, nécessaires pour la suite. C'est ainsi que sont introduites les notions d'indice d'idéaux fractionnaires (notion due à Fröhlich - Cassels) et de morphismes d'ordres. Dans la partie suivante, apparaissent les notions de complémentaire et différente d'un ordre. Particulièrement importante est la construction d'une base du complémentaire d'un ordre défini

au-dessus d'un anneau principal. Cette construction reprend une technique utilisée par Hilbert dans son livre : Théorie des Corps de Nombres Algébriques.

Nous établissons ensuite certaines propriétés des idéaux fractionnaires, relatives à la divisibilité. Un bon nombre de ces propriétés sont vraies pour des anneaux intègres Noethériens de dimension (de Krull) égale à 1, et le plus souvent de Mori. Nous avons cependant choisi de ne pas alourdir le texte. Toutes ces propriétés sont fortement liées à la notion d'ordre associé à un idéal fractionnaire d'un ordre.

Herzog et Künz ont défini la notion d'idéal canonique, montrant que la caractérisation d'un anneau de Gorenstein s'obtient de manière agréable à partir d'un idéal canonique, du moins dans le cas d'un anneau de Cohen - Macaulay. Nous montrons qu'un idéal canonique d'un ordre est son complémentaire. Ceci nous permet, entre autres caractérisations, de montrer qu'un ordre est de Gorenstein si et seulement si sa différentielle est inversible.

Nous donnons des conditions pour qu'un ordre soit de Gorenstein, à l'aide de la notion d'indice. On termine par des exemples d'ordres qui sont, ou ne sont pas de Gorenstein, ainsi que par une application aux morphismes semi-normaux.

II- Définitions et propriétés élémentaires des ordres d'entiers

Définition 1 :

Soit Z un anneau de Dedekind, de corps des fractions Q et soit K un corps, extension algébrique séparable, de degré fini, de Q . Désignons par \bar{Z} la fermeture intégrale de Z dans K .

Un ordre d'entiers A , dit relatif à l'extension K de Q , est un sous-anneau de K satisfaisant les propriétés suivantes :

- 1) L'anneau A est sur-anneau de Z , et le morphisme $Z \rightarrow A$ est fini.
- 2) L'anneau A contient une base de K sur Q .

On dit que A est un ordre d'entiers algébriques, lorsque A est un ordre et $Z = \mathbb{Z}$.

On dira aussi que l'ordre d'entiers A est défini au-dessus de l'anneau Z .

Il est bien connu que \bar{Z} est un ordre d'entiers. D'autres exemples seront donnés. Tout ordre d'entiers A est contenu dans \bar{Z} . De plus, si un sous-anneau B de \bar{Z} contient un ordre, alors B est lui-même un ordre.

Remarques.

1) Soit A un ordre d'entiers, relatif à une extension de corps $Q \rightarrow K$. Puisque le Z -module A contient une base de K sur Q , le corps des fractions de A est K . On en déduit que la clôture intégrale de A est \bar{Z} .

2) Soit Z un anneau principal, la définition d'un ordre au-dessus de Z peut être alors donnée de la manière suivante : un ordre A est un sous-anneau de K , sur-anneau de Z , tel que le morphisme $Z \rightarrow A$ soit libre de rang d , où d est le degré de l'extension $Q \rightarrow K$.

3) Soit Z un anneau de Dedekind et soit A un ordre d'entiers, défini au-dessus de Z . Il est alors clair que pour tout idéal maximal P de Z , l'anneau A_P est un ordre défini au-dessus de l'anneau principal Z_P .

Nous donnons un exemple important d'ordre. Soit un anneau principal Z de corps des fractions Q et soit $Q \rightarrow K$ une extension algébrique séparable de corps de degré fini d . Il existe un élément primitif t de cette extension, soit $K = Q(t)$. On peut supposer que t appartient à \bar{Z} .

Proposition 2 :

L'anneau $Z[t]$ est un ordre d'entiers pour un élément t de \bar{Z} si et seulement si t est un élément primitif de l'extension.

Preuve :

Il est clair que $Z[t]$ est un ordre si t est un élément primitif. Réciproquement, soit $t \in \bar{Z}$ tel que $Z[t]$ soit un ordre. Le lemme suivant nous montre que $Z[t]$ est isomorphe à $Z[X]/(P(X))$ où $P(X)$ est le polynôme minimal de t sur Q , donc à coefficients dans Z . Si $P(X)$ est de degré p , le Z -module $Z[t]$ est de rang $p = d$ et donc t est un élément primitif.

Lemme 3 :

(H. Seydi [11]) : Soit A un anneau intégralement clos et intègre, soit $A' = A[t]$ une A -algèbre finie et monogène et sans torsion. Soit d le discriminant d'un polynôme unitaire $f(T)$ de degré minimum de t sur A . Alors A' est canoniquement isomorphe à $A[T]/(f(T))$, $f(T)$ est unique et si \bar{A}' est la clôture intégrale de A' , on a $d\bar{A}' \subset A'$.

Dans ce travail, tout idéal d'un ordre, tout idéal fractionnaire de cet ordre apparaissant dans un énoncé est supposé non nul.

Par conséquent, tout idéal (fractionnaire) d'un ordre est un Z -module de type fini, contenant une base de K sur Q . En effet, considérons un idéal fractionnaire I et soit $\{x_i\}$ une base de K sur Q , contenue dans A . Soit aussi un élément x de I , non nul. Alors, le système $\{xx_i\}$ est une base de K sur Q , contenue dans I . En particulier, on a $QI = K$.

On en déduit qu'étant donnés deux idéaux fractionnaires I et I' d'un ordre, il existe un élément c non nul de Z , tel que $cI' \subset I$.

De plus, si un tel idéal I est libre sur Z , toute base de I sur Z est aussi une base de K sur Q : si $\{\omega_i\}$ est une base de I sur Z , pour tout idéal maximal P de Z , la famille $\{\omega_i\}$ est encore une base du module libre I_P sur l'anneau principal Z_P . Or l'idéal fractionnaire I_P contient une base de K sur Q , il est donc de rang égal à d , où d est la dimension de K sur Q . La famille $\{\omega_i\}$ est alors formée de d éléments libres sur Z , et par conséquent sur Q . C'est donc une base de K sur Q .

Définition 4 :

Soit Z un anneau de Dedekind de corps des fractions Q et soit K une extension algébrique séparable de Q de degré fini d . Un morphisme d'anneaux $A \rightarrow A'$ est dit un morphisme d'ordres, relatif à l'extension $Q \rightarrow K$, si les anneaux A et A' sont des ordres d'entiers relatifs à l'extension $Q \rightarrow K$ et si $A \subset A'$.

Il est clair qu'un tel morphisme est fini et que l'anneau A' est un idéal A -fractionnaire.

Définition 5 :

Soit $A \rightarrow A'$ un morphisme d'ordres, le conducteur de ce morphisme, noté $C(A, A')$, est l'annulateur dans A du A -module A'/A . Le conducteur est le plus grand des idéaux communs à A et A' .

On désigne par $C_Z(A, A')$ le conducteur sur Z , c'est-à-dire $C(A, A') \cap Z$, l'annulateur sur Z du Z -module A'/A .

Remarques :

1) Supposons que $A \rightarrow A'$ soit un morphisme d'ordres relatif à un anneau Z principal. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ les facteurs invariants de A dans A' , les ordres étant relatifs à une extension de degré d .

Alors, $Z \alpha_d = C_Z(A, A')$ si l'on a $\alpha_1 | \alpha_2 | \dots | \alpha_d$. En effet, soit $\{\omega_i\}$ une base de A' sur Z telle que $\{\alpha_i \omega_i\}$ soit une base de A . Il est clair que $\alpha_d A' \subset A$, puisque α_i divise α_d , d'où $\alpha_d \in C_Z(A, A')$. Réciproquement si z est un élément de Z dans le conducteur, la relation $z \omega_d \in A$ fournit l'inclusion en sens contraire. On peut montrer que α_1 est un élément inversible de Z .

2) Soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'ordres définis au-dessus d'un anneau de Dedekind Z . Pour tout idéal maximal P de Z , le morphisme $A_P \rightarrow B_P$ est un morphisme d'ordres définis au-dessus de l'anneau Z_P et le conducteur du morphisme localisé est le localisé du conducteur du morphisme $A \rightarrow B$.

La notion de morphisme minimal d'anneaux a été l'objet d'un article de D. Ferrand et J.P. Olivier [5]. Nous donnons ici un résultat essentiel qu'ils ont obtenu, pour servir de référence dans la suite.

Définition 6 :

Un morphisme d'anneaux $f : A \rightarrow B$ est dit minimal s'il est injectif, non surjectif et si pour toute décomposition en morphismes injectifs g et h tels que $f = goh$ alors h ou g est un isomorphisme.

Théorème 7 :

Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme minimal fini. Il existe un idéal maximal M de A tel que pour tout idéal premier $P \neq M$, on ait $A_P \rightarrow B_P$ est un isomorphisme. De plus $C(A, B) = M$.

On introduit maintenant une généralisation de la notion d'indice qui permet de faire des calculs de «cardinalité» en remplaçant les entiers par les idéaux d'un anneau de Dedekind. Cette généralisation est due à A. Fröhlich, cf. [6].

Soit Z un anneau principal de corps des fractions Q et soit K un corps extension séparable finie de Q de degré d .

Soit A un ordre relatif à l'extension $Q \rightarrow K$, c'est-à-dire un sous-anneau de la fermeture

intégrale de Z dans K tel que $Z \rightarrow A$ soit libre de rang d . Tout idéal A -fractionnaire est libre de rang d sur Z . Soient I et J des idéaux A -fractionnaires, une base de I ou J sur Z est aussi une base de $Q \rightarrow K$.

Puisque I et J sont isomorphes en tant que Z -modules, il existe un Q -automorphisme d'espace vectoriel φ de K tel que $\varphi(I) = J$. Le déterminant de φ est non nul et, à un élément inversible près de Z , dépend seulement de I et J . On pose $[I | J] = Z \det(\varphi)$, indice de I par rapport à J .

Si l'anneau Z est \mathbb{Z} et si $I \subset J$ on retrouve $[J | I] = \text{Card}(J/I) \mathbb{Z}$: en effet, si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les facteurs invariants de I dans J , on a :
 $J/I = \bigoplus \mathbb{Z}/\alpha_i \mathbb{Z}$ et $\text{Card}(J/I) = |\alpha_1 \dots \alpha_n|$; soit l'application $\varphi : J \rightarrow I$ définie par $\varphi(x_i) = \alpha_i x_i$ où $\{x_i\}$ est une base de J telle que $\{\alpha_i x_i\}$ soit une base de I . Alors $\det(\varphi) = \alpha_1 \dots \alpha_n$.

Si Z est un anneau de Dedekind, les idéaux fractionnaires I et J ne sont plus nécessairement libres sur Z . Cependant, pour tout idéal maximal P de Z , les idéaux fractionnaires I_P et J_P sont libres sur l'anneau principal Z_P . On peut alors définir pour tout idéal maximal P de Z , l'indice $[I_P | J_P]$, qui est un idéal fractionnaire de Z_P . Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux P de Z tels que $I_P \neq J_P$, il existe alors un unique idéal fractionnaire de Z , que l'on note $[I | J]$, tel que pour tout idéal maximal P de Z , on ait $[I | J]_P = [I_P | J_P]$.

Proposition 8 :

[6] Soit Z un anneau de Dedekind et soit K une extension finie séparable du corps Q des fractions de Z et soit A un ordre relatif à cette extension.

Si M, N, L sont des idéaux A -fractionnaires $[M | N][N | L] = [M | L]$.

Si $M \supset N$ alors $[M | N]$ est un idéal entier de Z . De plus $[M | N] = Z$ équivaut à $M = N$, et, pour tout idéal maximal P de Z , on a $[M | N]_P = [M_P | N_P]$.

Si φ est un Q -automorphisme de K , alors $[\varphi(M) | \varphi(N)] = [M | N]$.

On a la proposition suivante due à Fröhlich [7] :

Proposition 9 :

Soit A un ordre et soit I un idéal fractionnaire de A .

On a $[\bar{Z}I \mid 1]$ divise $[\bar{Z} \mid A]$ et les deux indices sont égaux si et seulement si I est inversible.

Cette proposition peut en fait se généraliser de la manière suivante :

Proposition 10 :

Soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'ordres d'entiers et soit I un idéal A -fractionnaire inversible, alors $[BI \mid AI] = [B \mid A]$.

Preuve :

Soit P un idéal maximal de Z , la proposition 8 donne $[BI \mid AI]_P = [(BI)_P \mid (AI)_P]$

Puisque le morphisme $Z \rightarrow A$ est entier, il est clair que l'anneau A_P est semi-local.

De plus, l'idéal fractionnaire I_P étant inversible est donc principal, soit $I_P = aA_P$. Il en résulte que $[BI \mid AI]_P = [aB_P \mid aA_P] = [B_P \mid A_P]$, la dernière égalité s'obtenant en considérant le Q -automorphisme de K , défini par la multiplication par a , et en utilisant la proposition 8. Finalement, pour tout idéal maximal P de Z , on a $[BI \mid AI]_P = [B \mid A]_P$, ce qui achève la preuve.

Les ordres d'entiers ont bon nombre de propriétés dont nous citons celles qui nous serviront.

- A- Un ordre d'entier est un anneau Noethérien intègre de dimension (de Krull) égale à 1. L'ordre maximum \bar{Z} est un anneau de Dedekind.
- B- Il résulte de -A- qu'un ordre d'entiers est un anneau de Cohen-Macaulay.

Définition 11 :

Un anneau Noethérien intègre de dimension 1 est dit anneau de Gorenstein si $\text{Dim inj}_A A = 1$. Un anneau intègre Noethérien de dimension 1 est de Gorenstein si et seulement si tout idéal (resp. fractionnaire) est divisoriel, voir [1], théorème 6.3.

III - Rappels et compléments sur les complémentaires, le discriminant, la différentielle

Soit Z un anneau de Dedekind, de corps des fractions Q .

Soit $Q \rightarrow K$ une extension finie séparable de corps, de degré d .

Soit Tr l'application trace définie par l'extension.

Soit A un ordre d'entiers et soit I un idéal fractionnaire de A .

On définit I^* comme étant l'ensemble des éléments x de K tels que $\text{Tr}(xI) \subset Z$; on appelle I^* le complémentaire de I . Les propriétés suivantes sont bien connues :

1) Si I a pour base $\{x_1, \dots, x_d\}$ sur Z , alors I^* a pour base $\{x_1^*, \dots, x_d^*\}$ sur Z , déterminée par $\text{Tr}(x_i x_j^*) = \delta_{i,j}$. La base $\{x_i^*\}$ de I^* est dite base complémentaire.

Les bases $\{x_i\}$ et $\{x_i^*\}$ sont aussi des bases de $Q \rightarrow K$.

2) Si I et J sont des idéaux A -fractionnaires tels que $I \subset J$, alors $J^* \subset I^*$.

3) Si I et J sont des idéaux A -fractionnaires $[I | J] = [J^* | I^*]$.

4) Si I est un idéal de A , alors I est contenu dans I^* .

Lemme 1 :

Soit A un ordre d'entiers et soit I un idéal A -fractionnaire, alors

1) I^* est un idéal A -fractionnaire.

2) $(IA^*)^* = A : I$.

3) $I^{**} = I$.

Si I et J sont des idéaux A -fractionnaires, alors $I^* : J^* = J : I$. En particulier, si $A \rightarrow B$ est un morphisme d'ordres d'entiers, le conducteur C de ce morphisme vérifie $C = A : B = B^* : A^*$.

Preuve :

Montrons 1) soit a un élément de A et soit x un élément de K tel que $\text{Tr}(xI) \subset Z$, alors $\text{Tr}(axI) \subset \text{Tr}(xI) \subset Z$. Donc I^* est un A -module ;

D'autre part, l'idéal I étant A -fractionnaire, contient une base $\{\omega_i\}$ de K sur Q .

Soit J le Z -module de base $\{\omega_i\}$. L'inclusion $J \subset I$ implique $I^* \subset J^*$. Or J^* est un Z -module libre de rang fini, donc I^* étant contenu dans J^* est un Z -module de type

fini, donc aussi un A-module de type fini. Bref, I^* est un idéal A-fractionnaire.

L'assertion 3) se montre facilement en remarquant que pour tout idéal maximal P de Z, on a $(I^*)_P = I^*_P$. De plus, l'idéal fractionnaire I_P est libre de rang fini sur Z_P , la relation 3) est alors dans ce cas bien connue.

Soit x un élément de K tel que $xI \subset A$, alors $\text{Tr}(xIA^*) \subset \text{Tr}(AA^*) \subset Z$, donc x appartient à $(IA^*)^*$. Réciproquement, soit x un élément de K tel que $\text{Tr}(xIA^*) \subset Z$, alors xI est contenu dans $A^{**} = A$, d'où $x \in A : I$.

Soient maintenant I et J deux idéaux A-fractionnaires et soit x un élément de K tel que $xI \subset J$, alors $\text{Tr}(xJ^*I) \subset \text{Tr}(J^*J) \subset Z$, donc $xJ^* \subset I^*$, c'est-à-dire que x appartient à $I^* : J^*$. De $J : I \subset I^* : J^* \subset J^{**} : I^{**} = J : I$, on tire $I^* : J^* = J : I$.

Soit t un élément primitif de l'extension $Q \rightarrow K$, appartenant à \bar{Z} et soit f(X) le polynôme minimal de t.

Posons $f(X)(X-t)^{-1} = \beta_0(t) + \beta_1(t)X + \dots + \beta_{d-1}(t)X^{d-1}$ où $d \circ \beta_i = d-1-i$, il est bien connu que l'ordre $Z[t]$ a pour base $\{1, t, \dots, t^{d-1}\}$ et que le complémentaire $Z[t]^*$ a pour base $\{\beta_0(t)f'(t)^{-1}, \dots, \beta_{d-1}(t)f'(t)^{-1}\}$, et c'est la base complémentaire de la précédente.

Nous allons généraliser ce résultat à un ordre relatif à un anneau principal ; pour cela on exploite un calcul fait par Hilbert, dans la démonstration du théorème 63 de [9], en vue d'un résultat sur le discriminant d'un corps de nombres ; nous obtenons ainsi un calcul explicite d'une base complémentaire.

Soit donc Z un anneau principal, de corps des fractions Q. Soit toujours une extension séparable de corps $Q \rightarrow K$, de degré d, et soit $\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ une base sur Z d'un ordre d'entiers A relatif à cette extension. C'est aussi une base de K sur Q. Soient $\{I_d, s_1, \dots, s_{d-1}\}$ les Q-isomorphismes de K dans une clôture algébrique de K. On définit les matrices suivantes :

$$\omega(A) = \begin{pmatrix} \omega_1 \dots \dots \dots \omega_d \\ s_1(\omega_1) \dots \dots \dots s_1(\omega_d) \\ \dots \dots \dots \\ s_{d-1}(\omega_1) \dots \dots \dots s_{d-1}(\omega_d) \end{pmatrix} \quad \text{et } \Delta(A) = (\text{Tr}(\omega_i \omega_j))$$

la matrice discriminant de la base. On pose $\Omega = \det(\omega(A))$, et $\delta(A) = \det(\Delta(A))$ le discriminant de la base. Il est connu que $\Omega^2 = \delta(A)$.

Proposition 2 :

Soient $\Omega_1, \dots, \Omega_d$ les déterminants mineurs de $\omega(A)$ relatifs à $\omega_1, \dots, \omega_d$; le \mathbb{Z} -module engendré par $\Omega, \Omega_1, \dots, \Omega_d$ est un idéal \mathcal{F} de A de base

$\{\Omega, \Omega_1, \dots, \Omega_d\}$ et $\{(-1)^{k+1} \Omega \Omega_k \delta(A)^{-1}\}_{k=1, \dots, d}$ est la base complémentaire de $\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$. En particulier $A^* = \delta(A)^{-1} \mathcal{F}$.

Preuve :

Considérons la matrice suivante dont le déterminant est visiblement nul :

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \omega_i - \text{Tr}(\omega_1 \omega_i) & \omega_d \omega_i - \text{Tr}(\omega_d \omega_i) \\ s_1(\omega_1 \omega_i) & s_1(\omega_d \omega_i) \\ \dots & \dots \\ s_{d-1}(\omega_1 \omega_i) & s_{d-1}(\omega_d \omega_i) \end{pmatrix}$$

On développe le déterminant de cette matrice suivant la première ligne ;

on obtient : $\sum_k (-1)^k \Omega_k N(\omega_i) \omega_i^{-1} (\omega_k \omega_i - \text{Tr}(\omega_k \omega_i)) = 0$

c'est-à-dire, après simplification :

$$\sum_k (-1)^k \omega_k \omega_i \Omega_k = \sum_k (-1)^k \text{Tr}(\omega_k \omega_i) \Omega_k .$$

Mais par définition :

$$\sum_k (-1)^{k+1} \omega_k \Omega_k = \Omega .$$

On en déduit donc que pour $i = 1, \dots, d$, on a :

$$\Omega \omega_i = \sum_k (-1)^{k+1} \text{Tr}(\omega_k \omega_i) \Omega_k$$

c'est-à-dire un système linéaire d'équations en les inconnues Ω_k .

Son déterminant est au signe près $\delta(A)$ qui est non nul. Le système se résoud alors de la manière suivante, compte tenu que $\Omega^2 = \delta(A)$:

$$\Omega \Omega_k = (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} \text{Tr}(\omega_1 \omega_1) & \omega_1 & \text{Tr}(\omega_d \omega_1) \\ \text{Tr}(\omega_1 \omega_d) & \omega_d & \text{Tr}(\omega_d \omega_d) \end{vmatrix}$$

le déterminant qui intervient dans le second membre est celui définissant $\delta(A)$ dans lequel on a remplacé la k -ième colonne par la colonne des ω_i .

Ceci montre déjà que $\Omega \Omega_k$ appartient à A .

Le calcul de $\text{Tr}(\Omega \Omega_k \omega_i)$ se fait en remplaçant la k -ième colonne du déterminant ci-dessus par la colonne composée des termes $\text{Tr}(\omega_1 \omega_i), \dots, \text{Tr}(\omega_d \omega_i)$.

Il devient alors évident que $\text{Tr}(\Omega \Omega_k \omega_i) = (-1)^{k+1} \delta_{k,i} \delta(A)$. Ainsi le résultat concernant la base complémentaire est démontré.

Pour voir que le Z -module engendré par les éléments $\Omega \Omega_k$ est un idéal de A , il suffit de montrer que $\Omega \Omega_k \omega_i$ est combinaison linéaire des éléments $\Omega \Omega_k$ sur Z .

Soit $\Omega \Omega_k \omega_j$, c'est un élément de A , donc de A^* , on peut donc l'exprimer dans la base complémentaire, on obtient :

$$\Omega \Omega_k \omega_j = \sum_i (-1)^{i+1} \delta(A)^{-1} \Omega \Omega_i z_i, \text{ où } z_i \in Z.$$

On multiplie successivement cette égalité par $\omega_1, \dots, \omega_d$ et on en prend les traces successives, on en déduit que $z_i = \text{Tr}(\Omega \Omega_k \omega_j \omega_i)$.

De plus A est un anneau, on dispose donc d'une table de multiplication de la base :

$$\omega_j \omega_k = \sum_t z_{j,k}^t \omega_t, \quad \text{où } z_{j,k}^t \in Z.$$

Par conséquent $z_i = \sum_t z_{j,i}^t \text{Tr}(\Omega \Omega_k \omega_t)$, mais pour $k \neq t$ la trace est nulle

et pour $k = t$ la trace vaut $(-1)^{k+1} \delta(A)$. En reportant dans l'égalité ci-dessus on obtient :

$$\Omega \Omega_k \omega_j = \sum_i (-1)^{i+k} z_{j,i}^k \Omega \Omega_i$$

c'est-à-dire que $\Omega \Omega_k \omega_j$ est un élément du Z -module engendré par les éléments $\Omega \Omega_i$.

Remarque :

Nous avons obtenu au passage les formules suivantes qui peuvent être utiles :

$$\begin{aligned} 1) \quad \omega_i^* &= (-1)^{i+1} \delta(A)^{-1} \Omega \Omega_i & 2) \quad \omega_j \omega_k &= \sum_t z_{j,k}^t \omega_t \\ 3) \quad \omega_k^* \omega_j &= \sum_i z_{j,i}^k \omega_i^* & 4) \quad \sum_i \omega_i \omega_i^* &= 1 ; \end{aligned}$$

La dernière formule n'est autre que le développement de Ω suivant la première ligne, multiplié ensuite par Ω . L'élément $\sum_i \omega_i \omega_i^*$ s'appelle dans d'autres contextes de la littérature, l'élément de Casimir-Gaschütz.

Remarque :

Le discriminant $\delta(A)$ est défini à un élément inversible près de Z à l'aide de n'importe quelle base de A . Nous appelons idéal discriminant de A , l'idéal $Z \delta(A)$. Si $A \rightarrow B$ est un morphisme d'ordres, nous définissons le discriminant relatif de B sur A par $\delta(A,B) = \delta(A) \delta(B)^{-1}$; soit $\{\omega_i\}$ une base de A sur Z et soit $\{\eta_j\}$ une base de B sur Z , puisque A est contenu dans B , les éléments ω_i sont des combinaisons Z -linéaires des éléments η_j et il existe donc une matrice X à coefficients dans Z qui permet de passer de la base de A à celle de B .

Un calcul classique sur les discriminants montre que $\delta(A) = \delta(B) \det(X)^2$. Ainsi $\delta(A,B)$ est un élément de Z . Compte tenu de la définition, on a une formule de

transitivité pour un composé de morphismes d'ordres d'entiers $A \rightarrow B \rightarrow C$, soit :

$$\delta(A,B) \delta(B,C) = \delta(A,C).$$

De plus, soient $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ les facteurs invariants du morphisme $A \rightarrow B$ d'ordres d'entiers, il est clair que $\delta(A,B) = (\alpha_1 \dots \alpha_d)^2$.

Définition 3 :

Soit A un ordre d'entiers, la différentielle de A est l'idéal de A désigné par $\mathfrak{D}(A)$ et égal à $A : A^*$.

Si $A \rightarrow B$ est un morphisme d'ordres de conducteur C , alors $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(B)$ et $\mathfrak{D}(A) \subset C$.

Prenons un anneau de Dedekind Z , de corps des quotients Q , et soit $Q \rightarrow K$ une extension séparable de corps, de degré fini.

Puisque \bar{Z} est un anneau de Dedekind, \bar{Z}^* est inversible et donc $\mathfrak{D}(\bar{Z})\bar{Z}^* = \bar{Z}$. De même, soit t un élément primitif de l'extension $Q \rightarrow K$, appartenant à \bar{Z} ; soit A l'ordre $Z[t]$; alors $\mathfrak{D}(Z[t]) = f'(t) Z[t]$, où $f(X)$ est le polynôme minimal de t . On a encore $A = \mathfrak{D}(A)A^*$.

Nous montrerons dans V que les ordres A , satisfaisant $A = \mathfrak{D}(A)A^*$ sont exactement les ordres qui sont des anneaux de Gorenstein.

Remarques :

1) Soit A un ordre d'entiers défini au-dessus d'un anneau de Dedekind Z , pour tout idéal maximal P de Z , on a $\mathfrak{D}(A_P) = \mathfrak{D}(A)_P$.

2) Soit Z un anneau principal et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ les facteurs invariants d'un morphisme $A \rightarrow B$ d'ordres d'entiers.

Alors les facteurs invariants de B^* dans A^* sont les facteurs invariants de A dans B .

En effet, soit $\{\omega'_i\}$ une base de B telle que $\{\omega_i = \alpha_i \omega'_i\}$ soit une base de A . L'expression de la base complémentaire de $\{\omega'_i\}$ de la proposition 2 nous donne :

$$\omega'_i{}^* = (-1)^{i+1} \Omega'_i \Omega'^{-1}, \text{ de même } \omega_i{}^* = (-1)^{i+1} \Omega_i \Omega^{-1}.$$

Pour obtenir ce dernier élément, on met en facteur dans les colonnes du déterminant de $\omega(A)$ les entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_d$; dans Ω_i on peut mettre en facteur les facteurs invariants sauf α_i . Il en résulte que $\omega_i^* = \alpha_i \omega_i^*$, d'où le résultat.

IV - Ordre associé à un idéal fractionnaire. Propriété des idéaux divisoriels

On ne considère dans la suite que des idéaux fractionnaires non nuls.

Définition 1 :

Soit A un ordre et soit I un idéal fractionnaire de A , l'ordre associé à I est l'anneau $I : I$. Cet anneau est un ordre contenant A et contenu dans la clôture intégrale \bar{A} de A dans son corps des fractions K . cf. [2] p. 97.

Lemme 2 :

Soit A un ordre et I un idéal fractionnaire de A . On rappelle que la clôture divisorielle de I est $\tilde{I} = A : (A : I)$, qu'elle contient I , et que, si I est un idéal, alors \tilde{I} est un idéal. Un idéal I fractionnaire de A est dit divisoriel si $I = \tilde{I}$. Il est bien connu que $\widetilde{\tilde{I} \tilde{J}} = \tilde{I} \tilde{J}$ et que $\tilde{I} \tilde{J} \subset \widetilde{IJ}$.

Soit A un ordre et I un idéal de A fractionnaire, on désigne par I^{-1} l'idéal fractionnaire $A : I$, alors :

- a) On a $(I.I^{-1})^{-1} = I^{-1} : I^{-1} = \tilde{I} : \tilde{I}$
- b) Si, de plus, I est divisoriel, alors : $(I.I^{-1})^{-1} = I : I$.

Preuve :

Laissée au lecteur, en tenant compte du fait que $\tilde{I}^{-1} = I^{-1}$.

Proposition 3 :

Soit A un ordre et soit I un idéal A -fractionnaire et soit C_I le conducteur du morphisme d'ordres $A \rightarrow I : I$.

Si les idéaux fractionnaires I et $I.I^{-1}$ sont divisoriels, alors $C_I = I.I^{-1}$. Il en résulte que si I et $I.I^{-1}$ sont divisoriels, alors, $A = I : I$ si et seulement si I est inversible.

Preuve :

Si l'idéal I est divisoriel, le lemme précédent montre que $I : I = (I.I^{-1})^{-1}$ et, par conséquent, utilisant la divisiorialité de $I.I^{-1}$ que l'on a $C_I = I.I^{-1}$. Le reste est clair.

La proposition de Fröhlich [7] , citée dans la proposition 9 du paragraphe II, donne aussi :

Proposition 4 :

Soit A un ordre d'entiers et soit I un idéal A -fractionnaire. L'idéal I est inversible dans $I : I$ si et seulement si $[\bar{Z} \ I^2 \ | \ I^2] = [\bar{Z} \ I \ | \ I]$.

Lemme 5 :

Soit A un ordre d'entiers et soit M un idéal maximal de A . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $M : M = A$ - b) l'anneau A_M est de valuation discrète - c) l'idéal M est inversible dans A -
- d) $C(A, \bar{A}) \not\subset M$ - e) $C_M \neq M$ - f) $M : M < A : M$.

Preuve :

Supposons que $M : M = A$, alors $A_M = \text{End}_{A_M}(MA_M)$; dans ces conditions, puisque un ordre est un anneau de Cohen-Macaulay, donc de profondeur 1, le lemme 4.7.1 de [5] montre que A_M est un anneau de valuation discrète. Si l'anneau A_M est de valuation discrète, il est intégralement clos et par suite $C(A, \bar{A}) \not\subset M$. La réciproque est claire. On a donc montré a) \Rightarrow b) \Leftrightarrow d). D'autre part, b) implique a) : il suffit de localiser en tout idéal maximal et de remarquer que, sous l'hypothèse b), MA_M est un idéal inversible. Que c) \Rightarrow a) est clair, ainsi que a) \Rightarrow e) : en effet on a $M \subset C_M$ et si $M : M = A$, le conducteur C_M est égal à A .

Réciproquement, si $M < C_M$, par maximalité, $C_M = A$ et donc $A = M : M$. Si M est inversible, de $M \subset M.M^{-1} = A$, on déduit que $M.M^{-1} \not\subset M$, donc que $M : M < A : M$, c'est-à-dire f). Réciproquement, si f) est vrai, alors de $M.M^{-1} \not\subset M$, on déduit $M.M^{-1} = A$, c'est-à-dire c). Enfin b) entraîne c) par localisation.

Lemme 6 :

Soit A un ordre d'entiers et soit I un idéal A -fractionnaire. L'idéal I est inversible si et seulement si I^{-1} est inversible.

Preuve :

Il est clair que l'inversibilité de I entraîne celle de I^{-1} . Supposons $A : I$ inversible. On peut supposer A local et le A -module $A : I$ libre de rang 1. Soit k sa base sur A . Alors kI est un idéal de A et $A : kI = A : I$: en effet, si x appartient à $A : kI$, on obtient $xk \in A : I$; par suite, $xk = ak$, où a est un élément de A , on en déduit que x est dans A . Supposons $kI = A$, alors I est inversible. Si kI est différent de A , alors kI est contenu dans l'idéal maximal M de A ; on obtient donc $A : M \subset A : kI = A$ et ensuite que $A : M = A$. Mais alors, le lemme précédent montre que A est un anneau de valuation discrète, dans ce cas, kI est inversible, donc aussi I .

Théorème 7 :

Soit A un ordre d'entiers et soit I un idéal fractionnaire divisoriel, alors, I est inversible si et seulement si $I : I = A$.

Preuve :

Il suffit de montrer que $I : I = A$ entraîne I est inversible. Par le lemme 2) b), on a $(I.I^{-1})^{-1} = A$, le lemme précédent montre que $I.I^{-1}$ est inversible, donc I est inversible.

Pour obtenir des idéaux fractionnaires divisoriels, on peut utiliser la proposition suivante.

Proposition 8 :

a) Soit A un ordre et soient I un idéal A -fractionnaire et J un idéal A -fractionnaire inversible, alors $\widetilde{I.J} = \widetilde{J.I}$.

b) Soit $A \rightarrow A'$ un morphisme d'ordres tel que A' soit A -divisoriel, pour tout idéal I' divisoriel de A' , l'idéal $I' \cap A$ est divisoriel.

c) Soit A un ordre d'entiers, alors \bar{A} est A -divisoriel, tout idéal I de A tel que $I + C(A, \bar{A}) = A$ est divisoriel, tout idéal maximal de A est divisoriel.

d) Soit $A \rightarrow A'$ un morphisme d'ordres, alors $C(A, A') = A : A'$ est divisoriel.

Preuve :

Pour montrer a), il suffit de localiser, J devient alors principal et on utilise la formule évidente $\tilde{x}I = x\tilde{I}$; notons qu'on a utilisé le fait que localisation et clôture divisorielle commutent.

Dans le cas de b), soit $I = P \cap A$ et soit $\tilde{I} = A : (A : I)$. On a de toute évidence, $A' : \tilde{I} \subset A' : I$; soit x un élément du corps des fractions K de A , tel que $xI \subset A'$, alors, on a $x\tilde{I} \subset \tilde{A}' = A'$, en vertu de a). Par suite $A' : \tilde{I} = A' : I$. On en déduit que $\tilde{I} \subset A' : (A' : \tilde{I}) = A' : (A' : I) \subset A' : (A' : P) = P$, puisque P est divisoriel. Il en résulte que $\tilde{I} \subset P \cap A = I$, c'est-à-dire I est divisoriel.

Prenons les hypothèses de c). L'anneau \bar{A} étant A -fractionnaire, une relation du lemme 2 montre que $\tilde{\bar{A}} \cdot \bar{A} \subset \tilde{\bar{A}}$. Il en résulte que $\tilde{\bar{A}}$ est une A -algèbre finie, donc entière. On en déduit que $\tilde{\bar{A}} \subset \bar{A} \subset \tilde{\bar{A}}$, et donc $\bar{A} = \tilde{\bar{A}}$, ainsi \bar{A} est A -divisoriel.

Or, dans \bar{A} , tout idéal est inversible, donc divisoriel, il en résulte que tout idéal de A contracté d'un idéal de \bar{A} est divisoriel. On contrôle aisément que tout idéal I de A tel que $I + C(A, \bar{A}) = A$ est un idéal obtenu par contraction.

V - Ordres de Gorenstein

§ 1 - Idéal canonique.

Rappelons la définition suivante adaptée au cas d'un anneau intègre.

Définition 1 :

[8] Soit A un anneau de Cohen-Macaulay intègre de dimension 1. Un idéal canonique de A est un idéal fractionnaire de A désigné par $K(A)$ tel que pour tout idéal fractionnaire F de A , on ait $F = K(A) : (K(A) : F)$.

Un ordre A est de Gorenstein si et seulement si A est un idéal canonique.

Proposition 2 :

Soit A un ordre d'entiers, alors A possède un idéal canonique qui est A^* .

Preuve :

On sait qu'un ordre d'entiers est un anneau de Cohen-Macaulay, de dimension 1.

Il en est de même pour tout anneau A_P , où P est un idéal maximal de Z et le morphisme $Z_P \rightarrow A_P$ est libre de rang fini. Il suffit de montrer que A_P^* est un idéal canonique de A_P , comme la suite le montre. Soit, en effet, I un idéal A -fractionnaire, on a $I \subset A^* : (A^* : I)$. Si, pour tout idéal maximal P de Z , on a $I_P = A_P^* : (A_P^* : I_P) = (A^* : (A^* : I))_P$, on en déduit que $I = A^* : (A^* : I)$: le complémentaire A^* est un idéal canonique. Supposons donc désormais que Z soit un anneau principal. Le Satz 2.9 de [8] page 22 affirme que, dans ces conditions, l'idéal canonique de A existe : $K(A)$ est l'image canonique de $\text{Hom}_Z(A, Z)$ dans le corps K des fractions de A . Considérons la suite de morphismes

$$\text{Hom}_Z(A, Z) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}_Z(A, Z) \otimes_Z Q \xrightarrow{\beta} \text{Hom}_Q(K, Q) \xrightarrow{\gamma} K$$

avec les définitions suivantes :

$$\alpha(\Psi) = \Psi \otimes 1, \quad \beta(\Psi \otimes r) = r \Psi' \quad \text{où } \Psi' : K \rightarrow Q \text{ est définie par}$$

$$\Psi' \left(\frac{a}{s} \right) = \frac{\Psi(a)}{s} \quad \text{où } \frac{a}{s} \text{ est un élément de } K \text{ tel que } s \in Z : \text{ en effet } A \otimes_Z Q = K.$$

Définissons γ : soit $\{\omega_i\}$ base de A sur Z et soit $\{\omega_i^*\}$ la base duale de A^* ; on a montré dans III que $\sum \omega_i \omega_i^* = 1$. D'autre part, il est clair que pour un élément x de A , on a $x = \sum \text{Tr}(x \omega_j) \omega_j^*$, on obtient le même résultat avec un élément $x' = as^{-1}$ de K où $a \in A$ et $s \in Z$. On en déduit dans la terminologie de De Meyer [4] que $\{\omega_i, \omega_i^*, \text{Tr}\}$ est une base séparable de K sur Q . Dans ce cas, on sait que le K -espace $\text{Hom}_Q(K, Q)$ a pour base Tr . Toujours, d'après [4], on en déduit une application $\gamma : \text{Hom}_Q(K, Q) \rightarrow K$ définie par $\gamma(\varphi) = \sum \omega_i \varphi(\omega_i^*)$, qui est un isomorphisme de K -espaces vectoriels.

Soit $\{\rho_i\}$ la base duale de $\{\omega_i\}$ de $\text{Hom}_Z(A, Z)$ sur Z , soit $\rho_i = \beta(\alpha(\rho_i))$

définie par $\rho_i \left(\frac{a}{s} \right) = \frac{\rho_i(a)}{s}$, alors $K(A)$ est le Z -module engendré par les éléments

$$x_j = \sum \omega_i \rho_j(\omega_i^*). \text{ Mais (III), } \omega_i^* = (-1)^{i+1} \frac{\Omega \Omega_i}{\delta(A)} \text{ donne}$$

$$\rho_j(\omega_i^*) = (-1)^{i+1} \rho_j(\Omega \Omega_i) \delta(A)^{-1}.$$

Soit $\Delta(A)$ la matrice $(\text{Tr}(\omega_i \omega_j))$, matrice discriminant. Mais on sait que $\Omega \Omega_i$ est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans $\Delta(A)$ la i -ème colonne par la colonne des ω_i , multiplié par $(-1)^{i+1}$. On en déduit que $\rho_j^*(\omega_i^*)$ est égal à $(-1)^{i+j} \delta(A)_{i,j} \delta(A)^{-1}$ où $\delta(A)_{i,j}$ est le mineur de la matrice $\Delta(A)$ désigné par le couple (i,j) . Il en résulte que :

$$x_j = \delta(A)^{-1} \sum_i \omega_i \delta(A)_{i,j} (-1)^{i+j}.$$

Finalement, on obtient $x_j = \delta(A)^{-1} (-1)^{j+1} \Omega \Omega_j^* = \omega_j^*$.

Par conséquent, $K(A) = A^*$.

Remarque :

Le A -module A^* est isomorphe au A -module $\text{Hom}_Z(A,Z)$.

Remarquons que le résultat est clair quand Z est un anneau principal, comme il résulte de la démonstration précédente. Supposons pour l'instant que l'anneau Z soit principal. L'isomorphisme précédent permet de montrer de manière directe que A^* est un idéal canonique. On sait qu'étant donnés deux idéaux A -fractionnaires I et J , on peut identifier les A -modules $I : J$ et $\text{Hom}_A(J : I)$ et donc $A^* : (A^* : I)$ à $\text{Hom}_A(\text{Hom}_A(I, A^*), A^*)$, pour tout idéal I qui est A -fractionnaire. De plus, il existe un isomorphisme canonique de Z -modules $\text{Hom}_Z(A \otimes_A I, Z) \rightarrow \text{Hom}_A(I, \text{Hom}_Z(A, Z))$, d'où finalement un isomorphisme $\text{Hom}_Z(I, Z) \rightarrow \text{Hom}_A(I, A^*)$. En répétant l'opération, on obtient une bijection $\text{Hom}_Z(\text{Hom}_Z(I, Z), Z) \rightarrow \text{Hom}_A(\text{Hom}_A(I, A^*), A^*) = A^* : (A^* : I)$. Mais I est un Z -module libre de rang fini, il est donc isomorphe à son bidual. On en déduit que l'inclusion $I \rightarrow A^* : (A^* : I)$ est une bijection : donc A^* est un idéal canonique.

Nous calculons maintenant l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme $\gamma \circ \beta \circ \alpha$ de $\text{Hom}_Z(A, Z)$ sur A^* , ce qui permettra de démontrer la remarque dans le cas où Z est un anneau de Dedekind. Soit l'application $\varphi : A^* \rightarrow \text{Hom}_Z(A, Z)$ définie par $\varphi(a) = f_a$, où f_a est le morphisme de Z -modules $A \rightarrow Z$, défini par $f_a(x) = \text{Tr}(xa)$. Il est facile de voir que les applications $f_{\omega_i^*}$ et ρ_i^* coïncident sur une base de A .

Par suite, on voit que $\varphi(\omega_i^*) = \rho_i$: l'application φ est la réciproque de $\gamma \circ \beta \circ \alpha$.

Supposons finalement que Z soit un anneau de Dedekind. Il est toujours possible de définir l'application $\varphi : A^* \rightarrow \text{Hom}_Z(A, Z)$, comme précédemment. Elle est (A, Z) -linéaire. Puisque le Z -module A est de présentation finie sur Z , toutes les données se localisent bien, en un idéal maximal P de Z . On obtient alors pour tout idéal maximal P de Z , un morphisme localisé φ_P , bijectif, ce qui achève la preuve.

Remarques :

1) Soient $I \supset J$ des idéaux fractionnaires d'un ordre d'entiers A , alors $\text{long}_A(I/J) = \text{Long}_A(A^* : J/A^* : I)$: il suffit d'appliquer la remarque 2.5 de [8] page 19.

2) La même remarque s'applique à un ordre de Gorenstein A et à un morphisme d'ordres $A \rightarrow B$ de conducteur C : on obtient $\text{Long}_A(B/A) = \text{Long}_A(A/C)$.

§ 2 - Définition et caractérisation des ordres de Gorenstein.

Rappelons qu'un anneau intègre Noethérien de dimension 1 est dit de Gorenstein si tout idéal fractionnaire (resp. entier) est divisoriel. Dans ce cas, la proposition 3 du IV montre que l'on a :

Proposition 3 :

Soit A un ordre d'entiers de Gorenstein et soit I un idéal A -fractionnaire. Le conducteur de $A \rightarrow I : I$ est I^{-1} et I est inversible si et seulement si $I : I = A$.

Proposition 4 :

Soit A un ordre d'entiers, relatif à une extension $Q \rightarrow K$ de degré d , les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) L'anneau A est de Gorenstein
- 2) La différentielle $\mathcal{D}(A)$ vérifie $\mathcal{D}(A)A^* = A$
- 3) La différentielle $\mathcal{D}(A)$ est inversible
- 4) Le module complémentaire A^* est divisoriel
- 5) Le module complémentaire A^* est inversible
- 6) Pour tout idéal I fractionnaire inversible de A , le A -module $\text{Hom}_Z(I, Z)$ est projectif

- 7) Tout idéal B-fractionnaire I d'un ordre B tel que $I : I = A$ est inversible dans A
 8) Si C est le conducteur de $A \rightarrow \bar{Z}$, alors $[\bar{Z} | A] = [A | C]$.

Preuve :

D'après [8], Corollaire 3.4 page 27, un ordre est de Gorenstein si et seulement si un idéal canonique est inversible ou divisoriel. On a ainsi l'équivalence de 1), 4) et 5), puisque un idéal canonique est A^* . Il est clair que 2) entraîne 3) et que 3) est équivalent à 5) puisque $\wp(A) = A : A^*$ et puisque le lemme 6 du IV montre que $A : A^*$ est inversible si et seulement si A^* est inversible. De plus 5) implique 2) est une évidence. Supposons que A soit de Gorenstein et soit A^* qui est A-isomorphe à $\text{Hom}_Z(A, Z)$. Puisque A est de Gorenstein, on sait par [8] loc. cit. que A et A^* sont des idéaux canoniques. Donc, il existe un idéal inversible K de A tel que $A^* = KA$ (proposition 2.8, page 20 de [8]) donc A^* est A-projectif et 6) est démontré pour $I = A$. Un argument standard donne le résultat pour tout idéal fractionnaire projectif I. La réciproque est évidente : on prend $I = A$ et A^* est A-projectif. Soit I un idéal fractionnaire de B tel que $I : I = A$, alors I est A-fractionnaire car $IA = I(I : I) = I$; si l'on suppose A de Gorenstein, la proposition 3 montre que I est A-inversible. Ainsi 1) entraîne 7). Supposons 7) réalisé, de $A^* : A^* = A$, on tire que A^* est inversible, d'où A est de Gorenstein. Enfin, 8) est équivalent à 5) : la proposition 9 du II montre que A^* est inversible si et seulement si $[\bar{Z}A^* | A^*] = [\bar{Z} | A]$. Mais on a $(\bar{Z} : A^*)^* = A : \bar{Z} = C$, puisque \bar{Z} est A-fractionnaire, en vertu du lemme 1, III. D'autre part, le début du III assure que $[\bar{Z} : A^* | A^*] = [A^{**} | (\bar{Z} : A^*)^*] = [A | C]$.

Remarque :

Il est clair que \bar{Z} est un ordre de Gorenstein.

§ 3 - Propriétés des ordres de Gorenstein.

Proposition 5 :

Soit A un ordre de Gorenstein et soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'ordres. On a les égalités : $C(A, B) = \wp(A)B^*$ et $C(A, B) : A^* = B^*$.

Preuve :

On a $(\wp(A)B^*)A^* = \wp(A)A^* : B^* \subset AB^* \subset B^*$, la dernière inclusion provenant du fait que B^* est un B-module (cf. Lemme 1, III), on en déduit que

$\mathfrak{D}(A)B^* \subset B^* : A^* = C(A,B)$ lemme 1, loc. cit. Réciproquement, si $x \in C(A,B) = B^* : A^*$, alors $x \in xA = x \mathfrak{D}(A)A^*$, mais puisque $xA^* \subset B^*$, on obtient $x \in \mathfrak{D}(A)B^*$. La deuxième égalité se déduit de la première par multiplication par A^* .

Proposition 6 :

Soit A un ordre de Gorenstein et soit $A \rightarrow A'$ un morphisme d'ordres. Si $\mathfrak{D}(A) \subset C_Z(A,A') \mathfrak{D}(A')$, alors, A' est un ordre de Gorenstein.

Preuve :

Pour montrer que l'anneau A' est de Gorenstein, il suffit de montrer qu'il en est ainsi pour tout localisé A'_P en un idéal maximal de Z (on utilise la caractérisation d'un ordre de Gorenstein par A est un idéal canonique). D'autre part, différentielle et conducteur se localisent bien, donc l'hypothèse est encore vraie dans A_P . On peut donc supposer Z principal. Soient $\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \dots \mid \alpha_d$ les facteurs invariants de A_P dans A'_P , on sait que $C_Z(A,A') = \alpha_d Z$. On a la suite de relations : $\alpha_d Z \subset C(A,A') = \mathfrak{D}(A)A'^* \subset \mathfrak{D}(A')A'^* \alpha_d$. Il en résulte que Z est contenu dans $\mathfrak{D}(A')A'^*$ et donc $\mathfrak{D}(A')A'^* = A'$.

Remarque :

La proposition 9 du II montre que si A est un ordre, $[\bar{Z} A^* \mid A^*]$ divise $[\bar{Z} \mid A]$, et dans la preuve de la proposition 4, on a vu que $[\bar{Z} A^* \mid A^*] = [A \mid C]$, par conséquent, si $C = C(A,\bar{Z})$, on obtient que $[A \mid C]$ divise $[\bar{Z} \mid A]$. D'autre part, il est clair que $[\bar{Z} \mid C] = [\bar{Z} \mid A][A \mid C]$. De plus, les idéaux $[\bar{Z} \mid C]$, $[\bar{Z} \mid A]$ et $[A \mid C]$ ne sont pas indépendants : si un idéal maximal divise l'un d'entre eux, il divise les autres ; soit P un idéal maximal de Z . Si C est le conducteur de $A \rightarrow \bar{Z}$, il est clair que C_P est le conducteur de $A_P \rightarrow \bar{Z}_P$; la proposition 8 du paragraphe II affirme que $[X_P \mid Y_P] = [X \mid Y]_P$ et ce dernier est un idéal de Z_P ; un des trois indices est divisible par P si et seulement si son localisé en P est contenu dans l'idéal maximal de Z_P , c'est-à-dire est différent de Z_P ; or, si l'un des trois indices localisés est égal à Z_P , il en est de même pour les autres, puisque C_P est un conducteur.

Proposition 7 :

Soit A un ordre d'entiers.

- 1) Si $[\bar{Z} | A]$ est sans facteur carré, alors A est un ordre de Gorenstein.
- 2) Si A est un ordre de Gorenstein, $[\bar{Z} | C]$ est un carré. Réciproquement, si $[\bar{Z} | C] = (P_1 \dots P_n)^2$, où P_1, \dots, P_n sont des idéaux maximaux distincts, alors A est un ordre de Gorenstein.
- 3) Soit $A \rightarrow \bar{Z}$ un morphisme d'ordres d'entiers algébriques, de conducteur maximal C , alors h étant la dimension de l'espace vectoriel \bar{Z}/C sur A/C , on a $[\bar{Z} | A] = [A | C]^{h-1}$. Par conséquent A est ordre de Gorenstein si et seulement si $h = 2$.

Preuve :

Montrons 1). Si l'indice $[\bar{Z} | A]$ est sans facteur carré, alors $[\bar{Z} | A] = P_1 \dots P_n$, où P_i désigne un idéal maximal de Z et P_i est différent de P_j si $i \neq j$. La remarque précédente montre que chaque idéal P_i divise $[A | C]$, donc $P_1 \dots P_n$ divise $[A | C]$. Ce dernier divisant $[\bar{Z} | A]$, on en déduit que $[A | C] = [\bar{Z} | A]$.

Pour montrer la première partie de 2), on remarque que $[\bar{Z} | C] = [\bar{Z} | A][A | C]$, et si A est un ordre de Gorenstein, que $[\bar{Z} | A] = [A | C]$.

Supposons maintenant que $[\bar{Z} | C] = (P_1 \dots P_n)^2$, la remarque précédente montre que $[\bar{Z} | A]$ et $[A | C]$ sont contenus dans les mêmes idéaux maximaux P_1, \dots, P_n ; compte tenu de l'égalité $[\bar{Z} | C] = [\bar{Z} | A][A | C]$, on obtient $[\bar{Z} | A] = [A | C]$.

La partie 3) est claire, en effet $[\bar{Z} | C] = [A | C]^h$.

Proposition 8 :

Soit A un ordre de Gorenstein et soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'ordres de conducteur $C(A, B) = C$, alors $[B | A] = [A | C]$ et $\text{Long}_A(B/A) = \text{Long}_A(A/C)$.

Preuve :

On a les égalités successives :

$$[A | C] = [A | A : B] = [A^{**} | (BA^*)^*] = [BA^* | A^*] = [B | A], \text{ puisque } A^* \text{ est inversible.}$$

L'assertion sur les longueurs est mise pour mémoire, voir la remarque 2)

suivant la proposition 2.

Proposition 9 :

Soit A un ordre de Gorenstein et soit $A \rightarrow B$ un morphisme entre ordres d'entiers, de conducteur C . Alors, ce morphisme est minimal si et seulement si le conducteur C est un idéal maximal de A . Dans ce cas, $\text{Long}_A(B/A) = 1$ et $[B/C : A/C] = 2$.

Preuve :

La partie directe est évidente. Réciproquement, si le conducteur est maximal, alors $\text{Long}_A(B/A) = 1$ et le morphisme $A \rightarrow B$ est minimal.

Puisque A/C est un corps, on voit que $\text{Long}_A(B/A) = \text{Long}_{A/C}(B/C/A/C) = [B/C : A/C] - 1$.

Proposition 10 :

Soit A un ordre de Gorenstein et soit $A \rightarrow B \rightarrow C$ un composé de morphismes d'ordres.

La correspondance $I \rightarrow I : I$ est une bijection entre l'ensemble des idéaux I de A qui sont des conducteurs satisfaisant $C(A,C) \subset I \subset C(A,B)$ et l'ensemble des ordres d'entiers D tels que $B \subset D \subset C$.

Preuve :

Soient les correspondances $D \rightsquigarrow C(A,D)$ et $I \rightsquigarrow I : I$. Si l'on a $B \subset D \subset C$, il est clair que $C(A,C) \subset C(A,D) \subset C(A,B)$.

Réciproquement, soit I un idéal de A tel que $C(A,C) \subset I \subset C(A,B)$ si $I = C(A,D)$, puisque $C^* = C(A,C)A^*$ en vertu de la proposition 5, on obtient que $C^* \subset IA^* \subset B^*$, ou encore $B \subset A : I = (IA^*)^* \subset C$. Mais $A : I = A : (A : D) = D$, puisque l'anneau A est de Gorenstein. D'où finalement $B \subset D \subset C$. Les correspondances ci-dessus sont effectivement réciproques en vertu du lemme suivant.

Lemme 11 :

Soit A un ordre de Gorenstein et soit I un idéal de A . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) $A : I$ est un anneau
- 2) $I^{-1} = I$

- 3) $A : I = I : I$
- 4) $C(A, I : I) = I$
- 5) I est le conducteur d'un morphisme $A \rightarrow B$.

Preuve :

Les implications suivantes sont évidentes :

1) implique 4) et 3) implique 1). On a 1) implique 5) :

$C(A, A : I) = I^{-1}I = I$. Si 5) est réalisée, alors $I = C(A, B)$, donc $IA^* = B^*$, ce qui entraîne que $B = (IA^*)^* = A : I$, c'est-à-dire 1). Supposons : $A : I$ est un anneau, alors

$A : I \subset I^{-1} : I^{-1} = I : I$, par le lemme 2 du IV puisque I est divisoriel, donc 1) entraîne 3).

Supposons que $C(A, I : I) = I$, la proposition 3 du IV montre que $I.I^{-1} = I$, puisque tous les idéaux fractionnaires de A sont divisoriels. Ainsi 4) implique 2). Enfin 2) implique 1) puisque $I = I.I^{-1}$ donne $I^{-1} \subset I : I$, d'où $A : I = I : I$.

Corollaire 12 :

Soit A un ordre de Gorenstein, il n'existe qu'un seul morphisme $A \rightarrow B$ de conducteur I .

On a alors, $B = I : I$ et $\mathcal{O}(I : I) = \mathcal{O}(A) : I^2$.

Preuve :

Puisque $I = A : B$, on a $B = A : I = I : I$. De plus $(I : I)^* = (A : I)^* = (IA^*)^{**} = IA^*$.

Par conséquent, $(I : I) : IA^* = (A : A^*) : I^2$, montre que $\mathcal{O}(I : I) = \mathcal{O}(A) : I^2$.

Proposition 13 :

Soit A un ordre de Gorenstein et soit I un idéal de A , alors $I : I$ est un ordre de Gorenstein si et seulement si l'une des conditions suivantes (équivalentes) est réalisée :

On désigne par C le conducteur de $A \rightarrow I : I$.

- 1) $C = C^2 : C$. 2) C est inversible dans $I : I$. 3) I et I^{-1} sont inversibles dans $I : I$.
- 4) $[\bar{Z} \ I^2 \ | \ I^2] = [\bar{Z}I \ | \ I]$ et $[\bar{Z}(I^{-1})^2 \ | \ (I^{-1})^2] = [\bar{Z} \ I^{-1} \ | \ I^{-1}]$
- 5) $[\bar{Z} \ C^2 \ | \ C^2] = [\bar{Z}C \ | \ C]$.
- 6) Il existe un idéal fractionnaire J de A inversible tel que $I : I = CJ^{-1}$.

Preuve :

2) est équivalent à 3) puisque $C = 1.I^{-1}$ en vertu de la proposition 3, on remarque de plus que $A : I$ est $I : I$ fractionnaire. Posons $B = I : I$, les formules $C = \varnothing(A) B^*$ et $CA^* = B^*$ de la proposition 5 montrent que B est un anneau de Gorenstein si et seulement si C est inversible dans B : en effet, B est de Gorenstein si et seulement si B^* est B -inversible. Le corollaire 12 montre que $I : I = C : C$ par suite C est inversible dans $I : I$ si et seulement si $C.(C : C^2) = C : C$. Or $A : C = C : C$ (lemme 11), on obtient donc la condition équivalente $C.(A : C^2) = A : C$. Cette dernière relation équivaut à la relation obtenue par passage à l'inverse, puisque A est un ordre de Gorenstein, c'est-à-dire à $C = C^2 : C$. Ainsi 1) est équivalent à 2). La proposition 2.1.11 de [3], montre que l'application $I' \rightsquigarrow I'B$ est une surjection entre l'ensemble des idéaux fractionnaires inversibles de A et l'ensemble des idéaux fractionnaires inversibles de $B = I : I = C : C$. Donc C est inversible dans $I : I$ équivaut à l'existence d'un idéal fractionnaire J de A inversible tel que $J(I : I) = C$, ce qui montre que 6) est équivalent à 2). Les conditions 4) et 5) ne sont que des traductions respectives de 3) et 2) compte tenu de la proposition 4 du IV et du lemme 2 du IV.

Proposition 14 :

Soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'ordres d'entiers, de conducteur C .

a) Si A est un ordre de Gorenstein, alors B est un ordre de Gorenstein si et seulement si le conducteur C est inversible dans B .

b) Si l'ordre B est de Gorenstein, et l'idéal C est maximal dans A , alors l'ordre A est de Gorenstein si et seulement si $\text{Long}_A(B/A) = 1$, et C est inversible dans B .

Preuve :

Nous avons vu la preuve de a) au cours de la démonstration précédente. Si l'ordre A est de Gorenstein, on sait que $\text{Long}_A(B/A) = 1$. Supposons que B soit un ordre de Gorenstein et que C soit maximal dans A et inversible dans B et que $\text{Long}_A(B/A) = 1$.

On peut supposer A local d'idéal maximal C . De $C : C = B$, on déduit que $\text{Long}_A(C : C/A) = 1$. De plus, l'anneau A est de Cohen-Macaulay de dimension un, donc de profondeur 1. Il en résulte du lemme 4.7 de [5], que A est un ordre de Gorenstein.

Nous allons en déduire un résultat qui permet de construire des ordres d'entiers dont on peut savoir s'ils sont de Gorenstein ou non.

Proposition 15 :

Soit Z un anneau de Dedekind, de corps des fractions Q . Soit K une extension algébrique, séparable de degré fini de Q . Soit \bar{Z} la fermeture intégrale de Z dans K . Soit I un idéal propre de \bar{Z} , contenant un idéal maximal P de Z . Alors l'anneau $Z + I$ est un ordre d'entiers relatif à l'extension $Q \rightarrow K$. Cet ordre est de Gorenstein si et seulement si $[\bar{Z}/I : Z/P] \leq 2$.

Preuve :

Posons $A = Z + I$, puisque I est un idéal de \bar{Z} , A est un sous- Z -module de type fini de \bar{Z} , contenant une base de K sur Q , et un anneau. C'est donc un ordre d'entiers. De plus I étant un idéal commun à A et \bar{Z} est contenu dans le conducteur $C(A, \bar{Z})$. On remarque que $P = I \cap Z$, parce que I est propre ; il en résulte la suite d'isomorphismes $A/I = Z + I/I = Z/I \cap Z = Z/P$, ce dernier anneau étant un corps, l'idéal I est maximal dans A . D'autre part, \bar{Z} est un ordre de Gorenstein et l'idéal I est inversible dans \bar{Z} . De plus, I étant un idéal maximal de A est égal à $C(A, \bar{Z})$ si et seulement si $A \neq \bar{Z}$. Ainsi, l'égalité $A = \bar{Z}$ a lieu si et seulement si $[\bar{Z}/I : Z/P] = 1$, et dans ce cas, l'anneau A est de Gorenstein. Si l'on a $A \neq \bar{Z}$, la proposition précédente, b) montre alors que A est un ordre de Gorenstein si et seulement si $\text{Long}_A(\bar{Z}/A) = 1$. Mais on a les égalités : $\text{Long}_A(\bar{Z}/A) = \text{Long}_{A/I}(\bar{Z}/I/A/I) = [\bar{Z}/I : A/I] - 1$. Il en résulte que l'ordre A est de Gorenstein si et seulement si $[\bar{Z}/I : A/I] = [\bar{Z}/I : Z/P] = 2$.

§ 4 - Application à des exemples d'ordres d'entiers.

La caractérisation des ordres de Gorenstein par l'inversibilité du module complémentaire nous permet d'obtenir des exemples d'ordres de Gorenstein. Soit Z un anneau de Dedekind, de corps des fractions Q .

Soit $Q \rightarrow K$ une extension finie séparable de corps de degré d et soit t un élément primitif de l'extension appartenant à \bar{Z} . On a vu dans II que $Z[t]$ est un ordre. D'autre part, il est bien connu que $Z[t]^* = f'(t)^{-1} Z[t]$, où $f(X)$ est le polynôme minimal de t . On a alors $Z[t]^*$ idéal $Z[t]$ -fractionnaire inversible. Ainsi $Z[t]$ est un

ordre de Gorenstein. Ce résultat peut être déduit du lemme de Kummer : si l'on montre que tous les localisés de $Z[t]$ en un idéal maximal P de Z sont de Gorenstein, il en sera de même de $Z[t]$. Il est clair que $(Z[t])_P = Z_P[t]$. On peut donc supposer que l'anneau Z est principal. Mais alors, l'anneau $Z[t]$ est isomorphe à $Z[X]/(f(X))$, puisque Z est un anneau intégralement clos (lemme de H. Seydi, paragraphe II). On sait que les idéaux maximaux de $A = Z[X]/(f(X))$ sont du type $pA + g(t)A$, où p est un élément extrémal et $g(X)$ est un facteur irréductible de $f(X)$ dans $Z/pZ[X]$.

Les idéaux maximaux de A sont donc engendrés par deux éléments. Il en est de même dans tout localisé de A en un idéal maximal. La proposition 13.2 de [10] montre que dans ces conditions, tout localisé en un idéal maximal de Z , est de Gorenstein, donc A est un anneau de Gorenstein.

On a vu dans la proposition 15 qu'il existe des ordres d'entiers qui ne sont pas de Gorenstein. Ces ordres sont construits à partir de l'ordre maximum \bar{Z} . On donne maintenant un exemple d'ordres d'entiers algébriques qui n'est pas de Gorenstein, construit à partir d'un ordre de Gorenstein de la forme $Z[t]$.

Ces exemples montrent qu'il existe des anneaux intègres Noethériens de dimension 1, dans lesquels tout idéal maximal est divisoriel, cf. la proposition 8 de IV, et qui ne sont pas de Gorenstein. E. Matlis a donné un exemple en dimension 2. Soit $\mathbb{Q}(t)$ une extension de \mathbb{Q} de degré 3, définie par le polynôme $f(X) = X^3 - X - 1$. L'anneau $\mathbb{Z}[5t]$ est un ordre de Gorenstein, puisque $u = 5t$ est primitif pour l'extension. Le polynôme minimal de u est $X^3 - 5^2X - 5^3$. L'ordre maximum de l'extension est $\mathbb{Z}[t]$: en effet, le discriminant de $f(X)$ est -23 , si l'on considère le morphisme $\mathbb{Z}[t] \rightarrow \bar{\mathbb{Z}}$, on a $\delta(\mathbb{Z}[t]) = \delta(\mathbb{Z}[t], \bar{\mathbb{Z}}) \delta(\bar{\mathbb{Z}}) = -23$, ce qui montre que les facteurs invariants sont tous égaux à 1.

Lemme 16 :

Soit Z un anneau principal de corps des fractions Q , et soit $Q \rightarrow Q(t)$ une extension séparable déterminée par le polynôme $f(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$ de $Z[X]$, irréductible dans Q , et un zéro $t \in \bar{Z}$ de ce polynôme. Soit p un élément extrémal de Z et soit $u = tp$, alors $C_Z(Z[u], Z[t]) = p^{d-1}Z$ et $C(Z[u], Z[t]) = p^{d-1}Z[t]$.

Le seul idéal maximal de $Z[u]$, contenant $C(Z[u], Z[t])$ est $M = (p, u)$.

Preuve :

Il est clair que les facteurs invariants de $Z[u]$ dans $Z[t]$ sont $1, p, \dots, p^{d-1}$, on a donc immédiatement le résultat concernant le conducteur sur Z . Il est clair que $p^{d-1}Z[t]$ est contenu dans le conducteur. Soit

$$c = \sum_{i=0}^{d-1} z_i p^i t^i, z_i \in Z, \text{ un élément du conducteur. Posons}$$

$$P(t) = t^d = -a_{d-1}t^{d-1} - \dots - a_0. \text{ Nous avons } ct^j \in Z[pt], \text{ pour tout } j = 1, \dots, d-1.$$

$$\text{Pour } j = 1, \text{ on obtient } ct = \sum_{i=0}^{d-2} z_i p^i t^{i+1} + z_{d-1} p^{d-1} P(t) \in Z[pt],$$

or, $p^{d-1}P(t) \in Z[pt]$ entraîne que $z_{d-2} p^{d-2} \in Zp^{d-1}$, c'est-à-dire $z_{d-2} \in Zp$.

En poursuivant de proche en proche, on voit que $z_{d-i} \in Zp^{i-1}$, ce qui démontre l'inclusion en sens contraire. Soit M un idéal maximal de $Z[u]$ contenant le conducteur, alors $p^{d-1}Z[t] \subset M$ entraîne que $M \cap Z = pZ$. Le polynôme minimal de pt est $X^d + pa_{d-1}X^{d-1} + \dots + p^{d-1}a_1X + p^d a_0$, dans $Z/pZ[X]$, son image est X^d .

Le lemme de Kummer nous montre que $M = (p, u)$.

Revenons à l'exemple ci-dessus, nous avons donc $C(\mathbb{Z}[u], \bar{\mathbb{Z}}) = 5\bar{\mathbb{Z}}$, et l'idéal $M = (5, u)$ de $\mathbb{Z}[u]$ est le seul à contenir le conducteur. Soit le \mathbb{Z} -module B engendré par $\{1, u, 5^{-1}u^2\}$. On contrôle que c'est un anneau, donc un ordre. En fait $B = M : M$: d'une part, B est contenu dans $M : M$, le calcul se fait sans peine. D'autre part, on a un morphisme composé $\mathbb{Z}[u] \rightarrow B \rightarrow M : M$ et B est différent de $\mathbb{Z}[u]$, puisque $5^{-1}u^2$ n'appartient pas à $\mathbb{Z}[u]$. Par conséquent, le conducteur de $\mathbb{Z}[u] \rightarrow M : M$ est M , donc maximal. Mais $\mathbb{Z}[u]$ est un ordre de Gorenstein, donc ce morphisme est minimal. Il en résulte que $B = M : M$. Le conducteur de $B \rightarrow \bar{\mathbb{Z}}$ est $5\bar{\mathbb{Z}}$: il est clair que

$5\bar{\mathbb{Z}}$ est contenu dans le conducteur et le morphisme $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rightarrow B/5\bar{\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme, donc $5\bar{\mathbb{Z}}$ est maximal dans B . Or $5\bar{\mathbb{Z}}$ n'est pas maximal dans $\bar{\mathbb{Z}}$: le lemme de Kummer montre que $5\bar{\mathbb{Z}}$ se décompose dans $\bar{\mathbb{Z}}$, puisque, dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, on a $f(X) = (X-\bar{2})(X^2 + \bar{2}X + \bar{3})$. Si B était un ordre de Gorenstein, puisque $5\bar{\mathbb{Z}}$ est le conducteur de $B \rightarrow \bar{\mathbb{Z}}$ et un idéal maximal de B , ce morphisme serait minimal. On devrait avoir $[\bar{\mathbb{Z}}/5\bar{\mathbb{Z}} : B/5\bar{\mathbb{Z}}] = 2$, alors que $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rightarrow \bar{\mathbb{Z}}/5\bar{\mathbb{Z}}$ est de degré 3. Ainsi, B n'est pas un ordre de Gorenstein.

§ 5 - Le cas des morphismes semi-normaux.

Dans le cas d'un morphisme d'ordres semi-normal, on peut donner des hypothèses plus agréables dans l'énoncé de la proposition 14. La semi-normalisation a été introduite par C. Traverso dans [13] et l'étude achevée par R. Swan dans [12].

Rappelons les résultats qui nous serviront.

1) Soit $A \rightarrow B$ un morphisme entier injectif, on dit que c'est une extension sub-entière si les extensions résiduelles sont isomorphes et si le morphisme est spectralement bijectif. On notera qu'un tel morphisme est radiciel.

2) Soit $A \rightarrow B$ un morphisme entier injectif, il existe une plus grande sous-extension ${}_{+B}A$ de B telle que $A \rightarrow {}_{+B}A$ soit sub-entière.

L'anneau ${}_{+B}A$ est dit semi-normalisé de A dans B .

Si $A = {}_{+B}A$, on dit que le morphisme $A \rightarrow B$ est semi-normal.

3) Le morphisme $A \rightarrow B$ est semi-normal seulement si le conducteur du morphisme est semi-premier dans B (ici les anneaux sont Noethériens).

4) La semi-normalisation commute aux localisations.

5) Si A est un anneau intègre, l'anneau A est dit semi-normal si $A \rightarrow \bar{A}$, le morphisme clôture intégrale, est semi-normal.

Proposition 17 :

Soit $A \rightarrow B$ un morphisme d'ordres semi-normal de conducteur C tel que $\text{Card}(V_A(C)) = c$.

On suppose que B est un ordre de Gorenstein et que C est inversible dans B ,

alors A est un ordre de Gorenstein si et seulement si $\text{Long}_A(B/A) = c$.

Dans ce cas, $\text{Long}_A(A/C) = \text{Card}(V_A(C))$.

Preuve :

Le morphisme étant semi-normal, le conducteur est semi-premier dans B .

La formule de localisation des longueurs donne :

$$\sum_{P \in V_A(C)} \text{Long}_{A_P}((B/A)_P) = \text{Long}_A(B/A)$$

Aucune des longueurs figurant dans la somme n'est nulle.

Par conséquent, la somme de ces longueurs est égale à c si et seulement si chacune d'entre elle est égale à 1.

D'autre part, si $P \in V_A(C)$, le conducteur de $A_P \rightarrow B_P$ est PA_P qui est inversible dans B_P , bref tout se localise bien. Pour achever, il suffit de refaire la même preuve que celle de la proposition 14, b).

Remarque :

Ceci s'applique en particulier avec $B = \bar{Z}$, alors A est semi-normal, \bar{Z} est de Gorenstein et C est inversible dans \bar{Z} . On voit donc que si A est un ordre semi-normal, il est de Gorenstein si et seulement si $\text{Long}_A(B/A) = \text{Card}(V_A(C))$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Bass H. : On the ubiquity of Gorenstein rings. *Math. Zeitschr.* 82, 8-28 (1963).
- [2] Borevitch Z.I. et Chafarevitch I.R. : *Théorie des Nombres*, Gauthier-Villars, Paris (1967).
- [3] Dade E.C., Taussky O. and Zassenhaus H. : On the theory of orders, in particular on the semi-group of ideals classes and genera of an order in an algebraic number field. *Math Annalen* 148, 31-64 (1962).
- [4] Demeyer F.R. : The trace map and separable algebras. *Osaka J. Math.* 3, 7-11 (1966).
- [5] Ferrand D. et Olivier J.P. : Homomorphismes minimaux d'anneaux. *J. Algebra.* 16, 461-471 (1970).
- [6] Fröhlich A. and Cassels J.W.S. : *Algebraic number theory*, Academic Press, London and New-York (1967).
- [7] Fröhlich A. : Invariants for modules over commutative separable orders. *Quart. J. Math. Oxford* (2), 16, 193-232 (1965).
- [8] Herzog J. und Kunz E. : *Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay Rings*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin. Heidelberg New-York (1971).
- [9] Hilbert D. : *Théorie des corps de nombres algébriques*, Hermann, Paris (1913).
- [10] Matlis E. : *1-Dimensional Cohen-Macaulay rings*. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, New-York (1973).
- [11] Seydi H. : *La théorie des anneaux Japonais*. Colloque d'Algèbre commutative, Pub. Sémin. Math. Univ. Rennes (1972).
- [12] Swan R.G. : On seminormality. *J. Algebra* 67, 210-229 (1980).
- [13] Traverso C. : Seminormality and Picard group. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 24, 585-595 (1970).

Université de Clermont II, U.F.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 Aubière, France.

Reçu en juin 1986.