ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

ABDALLAH BADRA

Sous-catégories pleines d'une catégorie dérivée filtrée

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 91, série *Mathématiques*, n° 24 (1987), p. 105-139

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1987__91_24_105_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 24, pp. 105-139.

SOUS-CATEGORIES PLEINES D'UNE CATEGORIE DERIVEE FILTREE

Abdallah BADRA

Introduction :

Soient C une catégorie, C_S sa localisée par rapport à un ensemble multiplicatif de C et D une sous-catégorie pleine de C telle que $S \cap D$ soit un ensemble multiplicatif de D. La condition (*) suivante : pour toute flèche $s : X \to Y$ de S avec $Y \in D$ il existe $Z \in \mathrm{Obj}(D)$ et $t : Z \to X$ de C tels que $s \circ t \in S$; est suffisante pour que le foncteur $\alpha : D_{S \cap D} \to C_S$ soit pleinement fidèle.

Le cas classique est celui où C est la catégorie $K^-(\mathscr{A})$ des complexes, à composantes dans une catégorie abélienne $\mathscr{A}$, bornés à droite et définis à homotopie près. $S = QIS^-(\mathscr{A})$ est alors l'ensemble des quasi-isomorphismes de $K^-(\mathscr{A})$. Si $D = K^-(\mathscr{P})$ où $\mathscr{P}$ est la sous-catégorie des objets projectifs de $\mathscr{A}$. La condition (*) est réalisée. Dans le § 2, on montre que le foncteur α reste pleinement fidèle pour $D = K^1(\mathscr{B})$ (complexes de longueur 1) où $\mathscr{B}$ est une catégorie additive de $\mathscr{A}$ vérifiant la condition, plus faible que (*), suivante (**) pour tout quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \longrightarrow & M_o \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_1 & \longrightarrow & P_o \end{array}$$

de $K^1(\mathcal{A})$ où P_o et M_1 sont dans $\mathcal{B}$, $M_1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$ ssi $P_o \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$.

Dans l'étude de certains problèmes on est amené à remplacer $\mathcal{A}$ par une catégorie plus générale. Si $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ sont des catégories abéliennes, $T : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ un foncteur additif. Pour définir une catégorie dérivée filtrée, on remplace, dans ce qui précède $\mathcal{A}$, par la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ des objets $(L', L \xleftarrow{i} l)$ où $L' \in \mathrm{Obj}(\mathcal{A}')$ et i une flèche de $\mathcal{A}$ avec $L = T(L')$. Dans le § 3 on montre qu'une condition analogue à (**) sur une sous-catégorie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ entraîne que $D\mathcal{F}^1(\mathcal{B})$ est une sous-catégorie pleine de $D\mathcal{F}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$. Deux exemples sont donnés au § 4.

§ 1 - Catégories localisées

Définition 1 :

Si C est une catégorie et S un ensemble de morphismes de C, une catégorie localisée de C par rapport à S est la donnée d'une catégorie C_S et d'un foncteur $F : C \longrightarrow C_S$ tels que :

1) Pour tout élément $s \in S$, $F(s)$ soit un isomorphisme de C_S.

2) Tout foncteur $F' : C \longrightarrow D$, tel que $F'(s)$ soit un isomorphisme de D, pour tout $s \in S$, se factorise de façon unique par F.

Définition 2 :

Soit C une catégorie et S un ensemble de morphismes de C. On dit que S est un ensemble multiplicatif s'il vérifie les propriétés suivantes :

1) Pour tout élément $s \in S$ et tout $t \in S$, $st \in S$ et pour tout objet M de C, $id_M \in S$.

2) a) Tout diagramme

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "s"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

de C, où $s \in S$, se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & P \arrow[d, "s"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

où $t \in S$.

b) Tout diagramme

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & P \\ M & \end{tikzcd}$$

de C, où $t \in S$, se complète en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "g"] \arrow[d, "t"'] & P \arrow[d, "s"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

où $s \in S$.

3) Si f et $g : M \longrightarrow N$ sont deux morphismes de C, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

a) Il existe $s : P \longrightarrow M$ de S tel que $fs = gs$.

b) Il existe $t : N \longrightarrow Q$ de S tel que $tf = tg$.

On dit que S permet un calcul de fractions bilatère .

Soient C une catégorie, S un ensemble multiplicatif pour tout objet P on considère la catégorie I_P dont les objets sont les éléments de S de but P et les morphismes sont les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "s_1"'] & & Q \arrow[dl, "s_2"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

f est un morphisme de C.

De même, on définit la catégorie J_P dont les objets sont les éléments de S, de source P, et les morphismes sont les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "t_1"'] \arrow[dr, "t_2"] & \\ E \arrow[rr, "g"'] & & Q \end{tikzcd}$$

Remarque :

Les catégories I_P et J_P vérifient les axiomes L_1, L_2 et L_3 de [1] Ch 1 § 1. En particulier, I_P et J_P sont cofiltrant et filtrant respectivement.

Soient C une catégorie et S un ensemble multiplicatif dans C.
On définit la catégorie C_S comme la catégorie dont les objets sont les objets de C et les morphismes sont définis de la façon suivante :

$$\mathrm{Hom}_{C_S}(P,Q) = \varinjlim_{\substack{E \xrightarrow[s]{} P \\ s \in I_P}} \mathrm{Hom}_C(E,Q)$$

Proposition 1 :

La catégorie C_S ainsi définie est une catégorie localisée de C par rapport à S.

Preuve :

Cf. [7] ch. 1 §3, prop. 3.1.

Remarque :

On peut définir C_S en posant

$$\mathrm{Hom}_{C_S}(Q,P) = \varinjlim_{\substack{P \xrightarrow{t} E \\ t \in J_P}} \mathrm{Hom}_C(Q,E)$$

Proposition 2 :

Soient C une catégorie, S un ensemble multiplicatif de C et D une sous-catégorie pleine de C telle que $S \cap D$ soit un ensemble multiplicatif de D.

Supposons que l'une des deux propriétés suivantes soit vérifiée :

a) pour tout morphisme $s : M \longrightarrow N$ de S où N est un objet de D, il existe un objet P de D et un morphisme $f : P \longrightarrow M$ de C tel que sf soit un élément de S.

b) Pour tout morphisme $t : M \longrightarrow N$ de S où M est un objet de D, il existe un morphisme $g : N \longrightarrow P$ de C, avec P un objet de D, tel que gt soit un élément de S.

Alors $D_{S \cap D}$ est une sous-catégorie pleine de C_S.

Preuve :

Découle des définitions.

§ 2 - Sous-catégorie pleine de la catégorie dérivée d'une catégorie abélienne

Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne. On note $C(\mathscr{A})$ la catégorie des complexes d'objets de $\mathscr{A}$ et $K(\mathscr{A})$ la catégorie dont les objets sont les objets de $C(\mathscr{A})$ et les morphismes sont les classes de morphismes à homotopie près. On considère $QIS(\mathscr{A})$ l'ensemble des quasi-isomorphismes de $K(\mathscr{A})$ (i.e. l'ensemble des morphismes qui induisent un isomorphisme en cohomologie).

Proposition 1 :
$QIS(\mathscr{A})$ est un ensemble multiplicatif de $K(\mathscr{A})$.
Cf [7] ch. 1 § 4 prop. 4.1.

Définition 1 :
La catégorie dérivée de $\mathscr{A}$, $D(\mathscr{A})$ est la catégorie localisée $K(\mathscr{A})_{QIS(\mathscr{A})}$ de $K(\mathscr{A})$ par rapport à l'ensemble des quasi-isomorphismes $QIS(\mathscr{A})$.

On définit de la même façon $D^-(\mathscr{A})$ (resp. $D^+(\mathscr{A})$, resp. $D^b(\mathscr{A})$) en remplaçant $K(\mathscr{A})$ par la sous-catégorie pleine $K^-(\mathscr{A})$ (resp. $K^+(\mathscr{A})$, resp. $K^b(\mathscr{A})$) formée des complexes bornés à droite (resp. à gauche, resp. à droite et à gauche).

Proposition 2 :
Soit $\mathscr{P}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{A}$ formée par les objets projectifs. Le foncteur naturel $D^-(\mathscr{P}) \xrightarrow{\alpha} D^-(\mathscr{A})$ est pleinement fidèle, et si $\mathscr{A}$ contient suffisamment de projectifs, alors α est une équivalence de catégories.

Preuve :
La première assertion découle de la proposition 2 § 1 et de [7] ch. 1 prop. 4.2.
La seconde assertion se démontre en remarquant que pour tout complexe $M.$ de $K^-(\mathscr{A})$ il existe un quasi-isomorphisme $s. : P. \longrightarrow M.$ où $P.$ est un objet de $K^-(\mathscr{P})$.

Soit $K^1(\mathscr{A})$ la sous-catégorie pleine de $K(\mathscr{A})$ formée des complexes de longueur 1. On notera $QIS^1(\mathscr{A}) = QIS(\mathscr{A}) \cap K^1(\mathscr{A})$.

Soit $\mathscr{B}$ une sous-catégorie additive pleine de A vérifiant la propriété suivante :

i) Pour tout élément de $QIS^1(\mathscr{A})$

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \longrightarrow & P_o \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_1 & \longrightarrow & M_o \end{array}$$

où P_1 et M_o sont des objets de $\mathscr{B}$, alors M_1 est un objet de $\mathscr{B}$ si et seulement si P_o est un objet de $\mathscr{B}$.

Proposition 3 :

Soit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} P. \arrow[dr, "t."'] & & R. \arrow[dl, "u."] \\ & E. & \end{tikzcd}$$

dans $K(\mathscr{A})$, où P. et R. sont des objets de $K^1(\mathscr{B})$, t. un quasi-isomorphisme. Il existe un objet Q. de $K^1(\mathscr{B})$, des quasi-isomorphismes $s.: P. \longrightarrow Q.$, $q. : Q. \longrightarrow N.$, $h. : E. \longrightarrow N.$ et un morphisme $v. : R. \longrightarrow Q.$ tels que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} P. \arrow[d, "t."'] \arrow[dr, "s."] & R. \arrow[dl, "u."'] \arrow[d, "v."] \\ E. \arrow[dr, "h."'] & Q. \arrow[d, "q."] \\ & N. \end{tikzcd}$$

commute dans $K(\mathscr{A})$.

Preuve :

On construit le quasi-isomorphisme p. : M. $\longrightarrow$ E.

$$\begin{tikzcd} M. = \cdots \arrow[r] & E_2 \arrow[r, "\gamma_2"] \arrow[d, "1"] & E_1 \times_{E_0} (P_0 \times R_0) \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "p_1"] & P_0 \times R_0 \arrow[d, "p_o"] & & \\ E. = \cdots \arrow[r] & E_2 \arrow[r, "\delta_2"] & E_1 \arrow[r, "\delta_1"] & E_0 \arrow[r, "\delta_o"] & E_{-1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

où $p_o = (t_o , u_o)$, p_1 et γ_1 sont les applications canoniques du produit fibré et

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} \delta_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On définit le morphisme

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P_1 & \xrightarrow{\quad d \quad} & P_o \\ & & & & {\scriptstyle r_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r_o} \\ \cdots & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & E_1 \times_{E_0} (P_o \times R_o) & \longrightarrow & P_o \times R_o \end{array}$$

de la façon suivante : r_o est l'injection canonique et r_1 est définie par la propriété universelle du produit fibré et découlant de la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{(d,o)} & P_o \times R_o \\ {\scriptstyle t_1}\downarrow & \delta_1 & \downarrow{\scriptstyle p_o} \\ E_1 & \longrightarrow & E_o \end{array}$$

On a $p_o r_o = t_o$ et $p_1 r_1 = t_1$. Comme p. et t. sont des quasi-isomorphismes r. : P. $\longrightarrow$ M. est un quasi-isomorphisme.

On pose Q. = $t_{[1}$ M. : $M_{1/\mathrm{Im}(\gamma_2)} \longrightarrow M_o$ et g. : M. $\longrightarrow$ Q.

le quasi-isomorphisme composé

M. $\xrightarrow{p.}$ E. $\xrightarrow{h.}$ $t_{[1}$ E. = N. se factorise par Q.

$$\begin{array}{ccc} M. & \xrightarrow{h.\ p.} & N. \\ & {\scriptstyle g.}\searrow \quad \nearrow{\scriptstyle q.} & \\ & Q. & \end{array}$$

où q. est un quasi-isomorphisme. D'autre part, g. r. est un quasi-isomorphisme. Comme P_1, P_o et Q_o sont des objets de $\mathscr{B}$, Q_1 est un objet de $\mathscr{B}$. On définit f. : R. $\longrightarrow$ M. de façon analogue à celle de r. et on obtient le diagramme commutatif cherché en posant g. f. = v., g. r. = s.

Proposition 4 :

Soit le diagramme

(1)
$$\begin{array}{ccc} & E. & \\ {\scriptstyle t.}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle u.} \\ P. & & R. \end{array}$$

dans $K(\mathcal{A})$, où P. et R. sont des objets de $K^1(\mathcal{B})$ et t. est un quasi-isomorphisme.

Il existe un objet Q. de $K^1(\mathcal{B})$, des quasi-isomorphismes q. : M. $\longrightarrow$ Q. et r. : M. $\longrightarrow$ E., et un morphisme v. : Q. $\longrightarrow$ R. de $K(\mathcal{A})$ tels que le diagramme suivant :

$$
(2) \qquad
\begin{tikzcd}
 & M. \arrow[dl, "r."'] \arrow[dr, "q."] & \\
E. \arrow[d, "t."'] \arrow[drr, "u." near end] & & Q. \arrow[d, "v."] \arrow[dll, "s." near end] \\
P. & & R.
\end{tikzcd}
$$

commute dans $K(\mathcal{A})$.

Preuve :

On construit le quasi-isomorphisme p. : E. $\longrightarrow$ N. suivant

$$
(3) \qquad
\begin{tikzcd}
E. = \dots \arrow[r] & E_2 \arrow[r, "\delta_2"] & E_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "p_1"'] & E_o \arrow[rr, "\delta_o"] \arrow[d, "p_o"'] & & E_{-1} \arrow[d] & \\
N. = 0 \arrow[rr] & & P_1 \times R_1 \arrow[r, "\gamma_1"] & (P_1 \times R_1) \underset{E_1}{\sqcup} E_o \arrow[rr, "\gamma_o"] & & E_{-1} \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}
$$

où $p_1 = (t_1, u_1)$, p_o et γ_1 sont les applications canoniques de la somme amalgamée.

D'autre part, on définit g. : N. $\longrightarrow$ P. de la façon suivante :

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_1 \times R_1 \arrow[r] \arrow[d, "g_1"'] & (P_1 \times R_1) \underset{E_1}{\sqcup} E_o \arrow[r, "\gamma_o"] \arrow[d, "g_o"] & E_{-1} \arrow[r] & \dots \\
 & P_1 \arrow[r, "d"] & P_o & &
\end{tikzcd}
$$

g_1 est la projection sur le premier facteur et g_o est définie par la propriété universelle de la somme amalgamée et découlant de la commutativité du diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "p_1"'] & E_o \arrow[d, "t_o"] \\
P_1 \times R_1 \arrow[r, "\binom{d}{o}"'] & P_o
\end{tikzcd}
$$

On a alors $g.p. = t.$, ce qui entraîne que $g.$ est un quasi-isomorphisme.
On construit $f. : N. \longrightarrow R.$ de façon analogue à celle de g. On pose $Q. = t_{o]} N.$
et $w. : Q. \longrightarrow N.$ le quasi-isomorphisme canonique. On obtient un quasi-isomorphisme $s. = g.w. : Q. \longrightarrow P.$. Or, P_o , Q_1 et P_1 sont des objets de $\mathscr{B}$ donc Q_o est un objet de $\mathscr{B}$, ce qui entraîne que $Q.$ est un objet de $K^1(\mathscr{B})$.

De plus, le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & Q. \arrow[d, "w."] \\ E. \arrow[r, "p."] & N. \end{tikzcd}$$

se complète, dans $K(\mathscr{A})$, en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} M. \arrow[r, "q."] \arrow[d, "r."'] & Q. \arrow[d, "w."] \\ E. \arrow[r, "p."'] & N. \end{tikzcd}$$

où $M. = t_{o]} E.$ et $r.$ et $q.$ sont les quasi-isomorphismes canoniques.
Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} M. \arrow[r, "q."] \arrow[d, "r."'] & Q. \arrow[d, "w."] \\ E. \arrow[r, "p."] \arrow[d, "t."'] \arrow[dr, "u."] & N. \arrow[d, "f."] \arrow[dl, "g."] \\ P. & R. \end{tikzcd}$$

est donc commutatif. D'où le résultat cherché.

Proposition 5 :

Soit $u. : Q. \longrightarrow P.$ un morphisme de $K^1(\mathscr{A})$.

a) s'il existe un élément $s'. : E. \longrightarrow Q.$ de $QIS(\mathscr{A})$ tel que $u.s'.$ soit nul dans $K(\mathscr{A})$ alors $u.$ est nul dans $K^1(\mathscr{A})$

b) s'il existe un élément $t.' : P. \longrightarrow E.$ de $QIS(\mathscr{A})$ tel que $t'.u.$ soit nul dans $K(\mathscr{A})$ alors $u.$ est nul dans $K^1(\mathscr{A})$.

Preuve :

a) Soit $\iota.: t_{o]}E. \longrightarrow E.$ le quasi-isomorphisme canonique. On pose

$s. = s.'\iota.$, $u.s.$ est alors nul dans $K(\mathscr{A})$. Ce qui signifie que le morphisme de complexes $u.s.: t_{o]}E. \longrightarrow P.$ est homotope à zéro.

Il existe un opérateur d'homotopie h qui fait commuter le diagramme suivant :

$$(1)\qquad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & E_2 \arrow[r] & E_1 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "s_1"'] & E'_o = \mathrm{Ker}(E_o \longrightarrow E_1) \arrow[r] \arrow[d, "s_o"] \arrow[dll, "h"'] & 0 \\ & & Q_1 \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "u_1"'] & Q_o \arrow[d, "u_o"] \arrow[dl, dashed, "k"'] & \\ & & P_1 \arrow[r, "d"'] & P_o & \end{tikzcd}$$

comme s. est un quasi-isomorphisme , Q_o est isomorphe à la somme amalgamée $Q_1 \coprod_{E_1} E'_o$.

Par la propriété universelle de la somme amalgamée, il existe une application $k: Q_o \longrightarrow P_1$ telle que $k\gamma = u_1$ et $dk = u_o$. $u.$ est donc homotope à zéro.

b) La démonstration est analogue à celle de a).

Proposition 6 :

$QIS^1(\mathscr{B})$ est un ensemble multiplicatif.

Preuve :

L'axiome 1) de la définition 2 du § 1 est évident.

L'axiome 3) découle de la proposition 5). Vérifions l'axiome 2).

a) Soit le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P. \arrow[d, "s."] \\ M. \arrow[r, "f."'] & N. \end{tikzcd}$$

de $K^1(\mathscr{B})$ où s. est un quasi-isomorphisme. On peut le compléter dans $K^b(\mathscr{A})$ en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E. \arrow[r, "g'."] \arrow[d, "t'."'] & P. \arrow[d, "s."] \\ M. \arrow[r, "f."'] & N. \end{tikzcd}$$

avec t'. un quasi-isomorphisme (§ 2. prop. 1).

On montre, en utilisant la proposition 4, qu'il existe un objet Q. de $K^1(\mathscr{B})$, des quasi-isomorphismes $q. : E. \longrightarrow Q.$ et $t. : Q. \longrightarrow M.$ et un morphisme $g. : Q. \longrightarrow P.$ tels que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E. \arrow[rr, "g'."] \arrow[dr, "q."] \arrow[dd, "t'."'] & & P. \\ & Q. \arrow[ur, "g."'] \arrow[dl, "t."] & \\ M. & & \end{tikzcd}$$

commute dans $K^{\cdot}(\mathscr{A})$. On conclut en remarquant que le diagramme de $K^1(\mathscr{B})$ suivant :

$$\begin{tikzcd} Q. \arrow[r, "g."] \arrow[d, "t."'] & P. \arrow[d, "s."] \\ M. \arrow[r, "f."'] & N. \end{tikzcd}$$

commute. En effet, on a $f.t'. = f.t.q. = s.g'. = s.g.q.$ dans $K(\mathscr{A})$, et comme q. est un quasi-isomorphisme, la proposition (5) entraîne que $f.t. = s.g.$ dans $K^1(\mathscr{B})$.

On vérifie d'une façon analogue l'axiome 3) b).

Proposition 7 :

On note $D^1(\mathscr{B}) = K^1(\mathscr{B})_{QIS^1(\mathscr{B})}$. Le foncteur naturel $D^1(\mathscr{B}) \longrightarrow D(\mathscr{A})$ est pleinement fidèle.

$D^1(\mathscr{B})$ est une sous-catégorie pleine de $D(\mathscr{A})$.

Preuve :
Découle des propositions 3), 4) et 5).

Remarque :
Les propositions 3), 4), 6) et 7) restent vraies si on remplace $\mathcal{B}$ par la catégorie $\mathcal{P}$ des objets projectifs de $\mathcal{A}$.

§ 3 - Catégories dérivées filtrées

Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne et $r \in \mathbb{N}$. On appelle $\mathscr{F}_r(\mathscr{A})$ la catégorie suivante :

Un objet de $\mathscr{F}_r(\mathscr{A})$ est la donnée de $r+1$ objets de $\mathscr{A}$ $l_o, l_1, l_2, \dots, l_r$ et de r flèches $i_j : l_j \longrightarrow l_{j-1}$ de $\mathscr{A}$, il sera noté :

$\underline{L} = (l_o \xleftarrow{i_1} l_1 \xleftarrow{i_2} l_2 \longleftarrow \dots \xleftarrow{i_r} l_r)$. Un morphisme $\underline{\varphi} : \underline{L} \longrightarrow \underline{M}$ de $\mathscr{F}_r(\mathscr{A})$ est la donnée de $r+1$ flèches $\varphi_k : l_k \longrightarrow m_k$ commutant aux i_k et $j_k : m_k \longrightarrow m_{k-1}$.

Proposition 1 :
Un morphisme $\underline{\varphi} : \underline{L} \longrightarrow \underline{M}$ de $\mathscr{F}_r(\mathscr{A})$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme) si et seulement si, pour tout k, $0 \leq k \leq r$. φ_k est un monomorphisme (resp. un épimorphisme).

Preuve :
Supposons que $\underline{\varphi} : \underline{L} \longrightarrow \underline{M}$ est un monomorphisme de $\mathscr{F}_r(\mathscr{A})$.
Soit $\Psi : p \longrightarrow l_k$ un morphisme de $\mathscr{A}$ tel que $\varphi_k \circ \Psi_k = 0$.

On considère l'objet $\underline{P} : (p \xleftarrow{id} p \xleftarrow{id} \dots \underset{k^{ième}}{p} \longleftarrow 0 \dots)$

et on définit $\underline{\Psi} : \underline{P} \longrightarrow \underline{L}$ en posant

$\Psi_j = 0$ si $j > k$, $\Psi_k = \Psi$ et $\Psi_j = i_{j+1} \circ i_{j+2} \circ \dots \circ i_k \circ \Psi$ pour $j < k$.

On a alors : $\varphi_j \circ \Psi_j = \varphi_j \circ i_{j+1} \dots i_k \circ \Psi = j_{j+1} \circ j_{j+2} \circ \dots \circ \varphi_k \circ \Psi = 0.$

On en déduit que Ψ est nul car φ est un monomorphisme, ce qui entraîne que Ψ est nul. La réciproque est évidente. La seconde assertion se démontre de façon analogue.

Corollaire 1 :
La catégorie $\mathscr{F}_r(\mathscr{A})$ est abélienne.

Soit $F_r(\mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ des objets

$(l_o \xleftarrow{i_1} l_1 \longleftarrow l_2 \longleftarrow \cdots \xleftarrow{i_r} l_r)$ tels que i_j soit un monomorphisme pour tout $j \leq r$. On dira qu'un objet de $F_r(\mathcal{A})$ est un objet l_o de $\mathcal{A}$ muni d'une filtration à r-crans, ou r-filtrés.

Proposition 2 :

Pour tout objet $\underline{L}$ *de* $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ *il existe un objet M de* $F_r(\mathcal{A})$ *et un épimorphisme* $\underline{\varphi} : \underline{M} \longrightarrow \underline{L}$ *de* $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$.

Preuve :

On dit que L est le cran 0 de la filtration et on le note l_o :

On pose $m_j = \prod_{k=j}^{r} l_k$ pour tout $j \in \{0, \ldots, r\}$.

On définit $x_j : l_j \times m_{j+1} \longrightarrow l_{j-1} \times l_j \times m_{j+1}$ par

$$x_j = \begin{pmatrix} i_j & 0 \\ id_{l_j} & 0 \\ 0 & id_{m_{j+1}} \end{pmatrix}$$; c'est un monomorphisme pour tout $j \in \{1,\ldots,r\}$

$\underline{M} = (m_o \xleftarrow{x_1} m_1 \xleftarrow{x_2} m_2 \longleftarrow \cdots \xleftarrow{x_r} m_r)$ est un objet de $F_r(\mathcal{A})$.

On définit un épimorphisme $\underline{M} \longrightarrow \underline{L}$ de $F_r(\mathcal{A})$ en appelant $\varphi_j : m_j \longrightarrow l_j$ la projection canonique, en effet, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} l_{j-1} \times l_j \times m_{j+1} \arrow[r, "\varphi_{j-1}"] & l_{j-1} \\ l_j \times m_{j+1} \arrow[u, "x_j"] \arrow[r, "\varphi_j"] & l_j \arrow[u, "i_j"'] \end{tikzcd}$$

commute pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Corollaire 1 :
Pour tout complexe $\underline{L}.$ d'objets de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ borné à droite, il existe un quasi-isomorphisme $\underline{s}. : \underline{M}. \longrightarrow \underline{L}.$ où $\underline{M}.$ est un complexe d'objets de $F_r(\mathcal{A})$ borné à droite.
Cf. [7] ch. 1.

Dans ce qui suit, le signe $*$ désignera l'un des signes $+$, $-$, b ou $n \in \mathbb{N}$.
On notera $C\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ (resp. $K\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$, resp. $QIS\,\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$) la catégorie des complexes d'objets de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$, les morphismes sont les morphismes de complexes (resp. les classes de morphismes de complexes à homotopies près, resp. les quasi-isomorphismes, c'est-à-dire les morphismes qui induisent des quasi-isomorphismes sur chaque cran de la filtration). On définit de la même façon les catégories $CF_r(\mathcal{A})$, $KF_r(\mathcal{A})$, $QISF_r(\mathcal{A})$, $CF_r^*(\mathcal{A})$, $KF_r^*(\mathcal{A})$ et $QISF_r^*(\mathcal{A})$.

Remarque :

1) $QIS\,\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ et $QIS\,\mathcal{F}_r^*(\mathcal{A})$ sont des ensembles multiplicatifs de $K\,\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$

2) $QISF_r(\mathcal{A})$ et $QISF_r^*(\mathcal{A})$ sont des ensembles multiplicatifs de $KF_r(\mathcal{A})$.

On notera $D\mathcal{F}_r(\mathcal{A}) = K\mathcal{F}_r(\mathcal{A})_{QIS\,\mathcal{F}_r(\mathcal{A})}$, $DF_r(\mathcal{A}) = KF_r(\mathcal{A})_{QISF_r(\mathcal{A})}$

$D\,\mathcal{F}_r^*(\mathcal{A}) = K\,\mathcal{F}_r^*(\mathcal{A})_{QIS\,\mathcal{F}^*(\mathcal{A})}$ et $DF_r^*(\mathcal{A}) = KF_r^*(\mathcal{A})_{QISF^*(\mathcal{A})}$

Théorème 1 :
Le foncteur naturel $DF_r^-(\mathcal{A}) \xrightarrow{\alpha} D\,\mathcal{F}_r^-(\mathcal{A})$ est une équivalence de catégories.

Découle du corollaire 1 et de la proposition 2 du § 1.

Soient $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$ deux catégories abéliennes et T un foncteur additif exact à droite de $\mathcal{A}'$ dans $\mathcal{A}$. On notera $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ la catégorie des couples

$\underline{L} = (L', L \xleftarrow{i_1} l_1 \longleftarrow l_2 \longleftarrow \dots \xleftarrow{i_2} l_r)$ où L' est un objet de $\mathcal{A}'$ et $(L \xleftarrow{i_1} l_1 \longleftarrow l_r \longleftarrow \dots)$ un objet de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ (où on a noté $l_o = L$) tel que $T(L') = L$.

Un morphisme de $\underline{L} = (L', L \xleftarrow{i_1} l_1 \longleftarrow \ldots)$ dans $\underline{M} = (M', M \xleftarrow{j_1} m_1 \longleftarrow \ldots)$ de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ est la donnée d'un morphisme $\Phi' : L' \longrightarrow M'$ et un morphisme $\underline{\varphi} : (L \leftarrow l_1 \leftarrow \ldots) \longrightarrow (M \leftarrow m_1 \leftarrow \ldots)$ de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A})$ tel que $T(\Phi') = \varphi_0$ que l'on notera Φ. On désigne par $F_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ formée des objets $\underline{L} = (L', L \leftarrow l_1 \leftarrow \ldots)$ tel que $(L \leftarrow l_1 \leftarrow \ldots) \in \mathrm{Obj}(F_r(\mathcal{A}))$

On notera $C\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ (resp. $K\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$) la catégorie des complexes d'objets de $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ (resp. à homotopie près) : On dira qu'un morphisme de $C\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ ou de $K\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$, $\underline{\varphi}$ est un quasi-isomorphisme si $\Phi.'$, $\Phi. = T(\Phi.')$ et $\varphi.$ sont des quasi-isomorphismes. On notera $QIS\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ l'ensemble des quasi-isomorphismes de $K\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$. On définit les catégories $C\mathcal{F}_r^*(\mathcal{A}', \mathcal{A})$, $K\mathcal{F}_r^*(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ et $QIS\mathcal{F}_r^*(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

Proposition 3 :

Soit le diagramme suivant :

$$(1) \qquad \begin{tikzcd} \underline{P}. \arrow[dr, "\underline{t}."'] & & \underline{R}. \arrow[dl, "\underline{u}."] \\ & \underline{E}. & \end{tikzcd}$$

de $K\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ où P. et R. sont des objets de $K\mathcal{F}_r^{\mathcal{A}}(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ et $\underline{t}.$ un quasi-isomorphisme. Il existe un objet $\underline{Q}.$ de $K\mathcal{F}_r^{l}(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ des quasi-isomorphismes $\underline{s}. : \underline{P}. \longrightarrow \underline{Q}.$, $\underline{q}. : \underline{Q}. \longrightarrow \underline{N}.$ et $\underline{f}. : \underline{E}. \longrightarrow \underline{N}.$ et un morphisme $\underline{v}. : \underline{R}. \longrightarrow \underline{Q}.$ tels que le diagramme suivant :

$$(2) \qquad \begin{tikzcd} \underline{P}. \arrow[dr, "\underline{t}."'] \arrow[drr, "\underline{s}."] & & \underline{R}. \arrow[dl, "\underline{u}."'] \arrow[d, "\underline{v}."] \\ & \underline{E}. \arrow[d, "\underline{f}."'] & \underline{Q}. \arrow[dl, "\underline{q}."] \\ & \underline{N}. & \end{tikzcd}$$

commute.

Preuve :

D'après la proposition 3 du § 2, et en adoptant des notations similaires, il suffit de prouver que l'image du complexe

$$t_{[1}M'_\cdot : E'_o \times_{E'_o} (P'_o \times R'_o)/_{\mathrm{Im}(\Lambda'_2)} \longrightarrow P'_o \times R'_o \text{ , par le}$$

foncteur T, est le complexe $t_{[1} M_\cdot : E_1 \times_{E_o} (P_o \times R_o)/_{\mathrm{Im}(\Lambda_2)} \longrightarrow P_o \times P_o$

Dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & E'_2 \arrow[r, "\Lambda'_2"] \arrow[d, equal] & E'_1 \times_{E'_o} (P'_o \times R'_o) \arrow[r, "\Lambda'_1"] \arrow[d] & P'_o \times R'_o \arrow[d] & & \\
\cdots \arrow[r] & E'_2 \arrow[r, "\Delta'_2"] & E'_1 \arrow[r, "\Delta'_1"] & E'_o \arrow[r] & E'_{-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$E'_1 \times_{E'_o} (P'_o \times R'_o)/_{\mathrm{Im}\,\Lambda'_2} \xrightarrow{\sim} E'_1/_{\mathrm{Im}\Delta'_2} \times_{E'_o} (P'_o \times R'_o)$. Et comme la flèche $T(E'_{1/\mathrm{Im}\,\Delta'_2}) \xrightarrow{\sim} E_{1/\mathrm{Im}\,\Delta_2}$ est un isomorphisme, la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
T(Q'_1) = T(E'_{1/\mathrm{Im}\,\Delta'_2} \times_{E'_o} (P'_o \times R'_o)) \arrow[r] \arrow[d] & P_o \times R_o = Q_o \arrow[d] \\
E_{1/\mathrm{Im}\,\Delta_2} \arrow[r] & E_o
\end{tikzcd}$$

entraîne l'existence d'un morphisme φ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & P_o \arrow[dd] \\
P_1 \arrow[ur, "="] \arrow[rr] \arrow[dd] & & P_o \arrow[ur, "="] \arrow[dd] & \\
 & Q_1 \arrow[rr] & & Q_o \\
T(Q'_1) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr] & & Q_o \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

donc φ est un isomorphisme.

Proposition 4 :

Soit le diagramme

$$(1)\qquad \begin{tikzcd} & \underline{E}. \arrow[dl, "\underline{t}."'] \arrow[dr, "\underline{u}."] & \\ \underline{P}. & & \underline{R}. \end{tikzcd}$$

dans $K\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$*, où* $\underline{P}.$ *et* $\underline{R}.$ *sont des objets de* $K\mathcal{F}^1_r(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ *et* $\underline{t}.$ *un quasi-isomorphisme. Il existe un objet* $\underline{Q}.$ *de* $K\mathcal{F}^1_r(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ *et des quasi-isomorphismes* $\underline{q}. : \underline{M}. \longrightarrow \underline{Q}.$ *et* $\underline{r}. : \underline{M}. \longrightarrow \underline{E}.$ *, et un morphisme* $\underline{v}. : \underline{Q}. \longrightarrow \underline{R}.$ *de* $K\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ *tels que le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} & \underline{M}. \arrow[dl, "\underline{r}."'] \arrow[dr, "\underline{q}."] & \\ \underline{E}. \arrow[d, "\underline{t}."'] \arrow[drr, "\underline{u}." near end] & & \underline{Q}. \arrow[d, "\underline{v}."] \arrow[dll, "\underline{s}." near end] \\ \underline{P}. & & \underline{R}. \end{tikzcd}$$

commute dans $K\mathcal{F}_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$*.*

Preuve :

En adoptant des notations similaires à la proposition 4 du § 2 et en l'appliquant aux catégories $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{A}$. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \underline{E}. \arrow[r, "\underline{p}."] \arrow[d, "\underline{t}."'] \arrow[dr, "\underline{u}." near end] & \underline{N}. \arrow[d, "\underline{f}."] \arrow[dl, "\underline{g}." near end] \\ \underline{P}. & \underline{R}. \end{tikzcd}$$

avec $\underline{N}. = (N^{\cdot}_{\cdot}, N. \longleftarrow n.)$ où $N^{\cdot}_{\cdot}$ et $(N. \longleftarrow n.)$ sont définies comme dans le diagramme (3) de la proposition 4 du § 2. Appelons

$K'_0 = \operatorname{Ker}\ (E'_0 \xrightarrow{\Delta'_0} E'_{-1}) \xhookrightarrow{i} E'_0$ et $K_0 = \operatorname{Ker}\ (E_0 \xrightarrow{\Delta_0} E_{-1}) \xhookrightarrow{j} E_0$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
T(E'_1) \arrow[r, "T(1)"] \arrow[d, "\wr"] & T(K'_0) \arrow[r, "T(i)"] \arrow[d, "\varphi"'] & T(E'_0) \arrow[r, "T(\Delta'_0)"] \arrow[d, "\wr"] & T(E'_{-1}) \arrow[d, "\wr"] \\
E_1 \arrow[r, "\Delta_1"] & K_0 \arrow[r, hook, "j"] & E_0 \arrow[r, "\Delta_0"] & E_{-1}
\end{tikzcd}$$

où l et φ sont les applications canoniques. Comme T commute aux sommes amalgamées, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & E_1 \arrow[rr, "\Delta_1"] \arrow[dd, "p_1"] & & K_0 \arrow[dd] \\
T(E'_1) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rr] \arrow[dd, "T(p'_1)"'] & & T(K'_0) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dd] & \\
 & P_1 \times R_1 \arrow[rr] & & (P_1 \times R_1) \underset{E_1}{\sqcup} K_0 \\
T(P'_1) \times T(R'_1) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rr] & & T(P'_1) \times T(R'_1) \underset{T(E'_1)}{\sqcup} T(K'_0) \arrow[ur, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

ψ est l'application universelle de la somme amalgamée. On en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \times R_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & (P_1 \times R_1) \underset{E_1}{\sqcup} K_0 \arrow[dd] \\
T(P'_1) \times T(R'_1) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rr] \arrow[dd] & & T(P'_1) \times T(R'_1) \underset{T(E'_1)}{\sqcup} T(K'_0) \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dd] & \\
 & P_1 \arrow[rr] & & P_0 \\
T(P'_1) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[rr] & & T(P'_0) \arrow[ur, "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

Ce qui prouve que ψ est un isomorphisme. On identifie alors l'image du complexe

$t_{o]}N'. : P'_1 \times R'_1 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,(P'_1 \times R'_1 \underset{E'_1}{\sqcup} E'_0 \longrightarrow E'_{-1})$.

par T au complexe $t_{o]}N'.$. Le couple $(t_{o]}N'. , t_{o]}N. \longleftarrow t_{o]}n.)$

devient un objet de $K\,\mathscr{F}^1_r\,(\mathscr{B}\,(\mathscr{A}', \mathscr{A}\,))$ que l'on notera $t_{o]}\underline{N}.$ ou $\underline{Q}.$

Et il existe un quasi-isomorphisme canonique $\underline{w}. : t_{o]}\underline{N}. \longrightarrow \underline{N}.$.

Il existe donc un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{M}. & \xrightarrow{\underline{q}.} & t_{o]}\,\underline{N}. = \underline{Q}. \\ {\scriptstyle \underline{r}.}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{w}.} \\ \underline{E}. & \xrightarrow{\underline{p}.} & \underline{N}. \end{array}$$

commutatif dans $K\mathcal{F}_r^-(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ où $\underline{r}.$ et $\underline{q}.$ sont des quasi-isomorphismes.

D'où le diagramme cherché.

Proposition 5 :

QIS $\mathcal{F}_r^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ est un ensemble multiplicatif.

Preuve :

L'axiome 1 de la définition 2 § 1, est évident et l'axiome 3 découle de la proposition 5 § 2.

Vérifions l'axiome 2).

a) Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \underline{R}. \\ & & \downarrow{\scriptstyle \underline{s}.} \\ \underline{P}. & \xrightarrow[\underline{u}.]{} & \underline{S}. \end{array}$$

dans $K\ \mathcal{F}_r^1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ considérons le complexe M. : $R_1 \times P_1 \xrightarrow{\underline{\varphi}_1} R_o \times S_1 \times P_o \xrightarrow{\underline{\varphi}_o} S_o$

$\underline{M}. : \underline{M}_1 \longrightarrow \underline{M}_o \longrightarrow \underline{M}_1.$

On note les différentielles de $\underline{R}.$, $\underline{S}.$ et $\underline{P}.$ δ , γ et d respectivement.

$$\underline{\varphi}_o = (-\underline{s}_o , \underline{\gamma} , \underline{u}_o) \qquad \text{et} \qquad \underline{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \underline{\delta} & o \\ \underline{s}_1 & -\underline{u}_1 \\ o & \underline{d} \end{pmatrix}$$

On définit les morphismes $\underline{w}. : \underline{M}. \longrightarrow \underline{R}.$ et $\underline{q}. : \underline{M}. \longrightarrow \underline{P}.$

Comme les projections canoniques. Comme $\underline{s}.$ est un quasi-isomorphisme $\underline{q}.$ est un quasi-isomorphisme et le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \underline{M}. \arrow[r, "\underline{w}."] \arrow[d, "\underline{q}."'] & \underline{R}. \arrow[d, "\underline{s}."] \\ \underline{P}. \arrow[r, "\underline{u}."'] & \underline{S}. \end{tikzcd}$$

commute à homotopie près, en effet :

On définit les opérateurs d'homotopies $\underline{h}_1 : \underline{R}_o \times \underline{S}_1 \times \underline{P}_o \longrightarrow \underline{S}_1$

par $\underline{h}_1 = (0, -id_{\underline{S}_1}, 0)$ et $\underline{h}_o = id_{\underline{S}_o}$.

On obtient : $\underline{u}_1\, \underline{q}_1 - \underline{s}_1\, \underline{w}_1 = \underline{h}_1\, \underline{\varphi}_1$ et $\underline{u}_o\, \underline{q}_o - \underline{s}_o\, \underline{w}_o = \underline{\gamma}\, \underline{h}_1 + \underline{h}_o\, \underline{\varphi}_o$.

On considère les complexes $t_{o]}M'. : Q'_1 = R'_1 \times P'_1 \longrightarrow Ker(R'_o \times S'_1 \times P'_o \to S'_o) = Q'_o$

et $t_{o]}M. : Q_1 = R_1 \times P_1 \longrightarrow Ker\,(R_o \times S_1 \times P_o \to S_o) = Q_o$.

Il existe un morphisme $\psi : T(Q'_o) \longrightarrow Q_o$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & R_1 \times P_1 \arrow[rr] \arrow[dd] & & Q_o \arrow[dd] \\ R_1 \times P_1 \arrow[ur, dashed] \arrow[rr] \arrow[dd] & & T(Q'_o) \arrow[ur, "\psi"] \arrow[dd] & \\ & P_1 \arrow[rr] & & P_o \\ P_1 \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, dashed] & & P_o \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

Ce qui entraîne que ψ est un isomorphisme et Q_o est un objet de $\mathscr{B}\,(\mathscr{A}', \mathscr{A})$.

On obtient donc le diagramme commutatif cherché

$$\begin{tikzcd} \underline{Q}. \arrow[r, "\underline{v}."] \arrow[d, "\underline{t}."'] & \underline{R}. \arrow[d, "\underline{s}."] \\ \underline{P}. \arrow[r, "\underline{u}."'] & \underline{S}. \end{tikzcd}$$

en appelant $\underline{t}.$ le quasi-isomorphisme composé :

$t_{o]}\underline{M}. = \underline{Q}. \longrightarrow \underline{M}. \xrightarrow{\underline{q}.} \underline{P}.$ et $\underline{v}.$ le morphisme composé

$\underline{Q}. \longrightarrow \underline{M}. \xrightarrow{\underline{w}.} \underline{R}.$

b) Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{S}. & \xrightarrow{\underline{s}.} & \underline{R}. \\ {\scriptstyle \underline{u}.}\downarrow & & \\ \underline{P}. & & \end{array}$$

dans $K\mathscr{F}^{1}_{r}(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A}))$. On considère le complexe $\underline{M}. : \underline{M}_2 \xrightarrow{\underline{\varphi}_2} \underline{M}_1 \xrightarrow{\underline{\varphi}_1} \underline{M}_o$

défini de la façon suivante :

$$\underline{M}. : \underline{S}_1 \xrightarrow{\underline{\varphi}_2} \underline{S}_o \times \underline{R}_1 \times \underline{P}_1 \xrightarrow{\underline{\varphi}_1} \underline{R}_o \times \underline{P}_o$$

$$\underline{\varphi}_2 = \begin{pmatrix} \underline{\gamma} \\ -\underline{s}_1 \\ \underline{u}_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \underline{\varphi}_1 = \begin{pmatrix} \underline{s}_o & \underline{\delta} & o \\ -\underline{u}_o & o & \underline{d} \end{pmatrix}$$

Les flèches canoniques $\underline{R}. \longrightarrow \underline{M}.$ et $\underline{P}. \longrightarrow \underline{M}.$ font commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \underline{S}. & \xrightarrow{\underline{s}.} & \underline{R}. \\ {\scriptstyle \underline{u}.}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \underline{w}.} \\ \underline{P}. & \xrightarrow{\underline{q}.} & \underline{M}. \end{array}$$

à homotopie près. En effet, en explicitant le diagramme précédent, on obtient :

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{S}_o \arrow[rr, "\underline{s}_o"] \arrow[dd, "\underline{u}_o"'] \arrow[dddr, "\underline{h}_1"] & & \underline{R}_o \arrow[dd, "\underline{w}_o"] \\
\underline{S}_1 \arrow[ur, "\underline{\gamma}"] \arrow[rr, "\underline{s}_1"] \arrow[dd, "\underline{u}_1"'] \arrow[dddr, "\underline{h}_2"] & & \underline{R}_1 \arrow[ur, "\underline{\delta}"] \arrow[dd, "\underline{w}_1"] & \\
 & \underline{P}_o \arrow[rr, "\underline{q}_o"] & & \underline{R}_o \times \underline{P}_o \\
\underline{P}_1 \arrow[ur, "\underline{d}"] \arrow[rr, "\underline{q}_1"] & & \underline{S}_o \times \underline{R}_1 \times \underline{P}_1 \arrow[ur, "\underline{\varphi}_1"'] & \\
 & \underline{S}_1 \arrow[ur, "\underline{\varphi}_2"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Où les opérateurs d'homotopie sont $\underline{h}_1 = \begin{pmatrix} -id_{\underline{S}_o} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h_2 = id_{\underline{S}_1}$. On a $\underline{q}_o\underline{u}_o - \underline{w}_o s_o = \underline{\varphi}_1 \underline{h}_1$ et

$\underline{q}_1 \underline{u}_1 - \underline{w}_1 \underline{s}_1 = \underline{h}_1 \ \underline{\gamma} + \underline{\varphi}_2 \underline{h}_2$.

D'autre part $\underline{q}.$ est un quasi-isomorphisme car $\underline{s}.$ l'est et comme T est exact à droite, on peut tronquer le complexe $\underline{M}.$. On obtient alors le diagramme commutatif cherché

$$
\begin{tikzcd}
\underline{S}. \arrow[r, "\underline{s}."] \arrow[d, "\underline{u}."'] & \underline{R}. \arrow[d, "\underline{v}."] \\
\underline{P}. \arrow[r, "\underline{t}."'] & \underline{Q}.
\end{tikzcd}
$$

où $\underline{t}.$ est le quasi-isomorphisme composé $\underline{P}. \xrightarrow{q.} \underline{M}. \longrightarrow t_{[1}\,\underline{M}. = \underline{Q}.$ et $\underline{v}.$ est le morphisme composé $\underline{R}. \xrightarrow{\underline{w}.} \underline{M}. \longrightarrow t_{[1}\,\underline{M}.$

$\underline{Q}.$ est un objet de $K\mathcal{F}^1_r(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ car $\underline{t}.$ est un quasi-isomorphisme et $\underline{M}_o$ est dans $\mathcal{B}(\mathcal{A}',\mathcal{A})$.

On définit $D\mathcal{F}^1_r(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ comme la catégorie localisée

$K\mathcal{F}^1_r(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))_{\mathrm{QIS}\,\mathcal{F}^1_r(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))}$.

Théorème 2 :

Le foncteur naturel $D\mathcal{F}^1_r(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})) \longrightarrow D\mathcal{F}^-_r(\mathcal{A}',\mathcal{A})$ *est pleinement fidèle.*

$D\mathcal{F}^1_r(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A}))$ *est une sous-catégorie pleine de* $D\mathcal{F}^-_r(\mathcal{A}', \mathcal{A})$.

Théorème 3 :

Les foncteurs du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} DF^1_r(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})) \arrow[rr] \arrow[dr] & & D\mathcal{F}^-_r(\mathcal{A}', \mathcal{A}) \\ & D\mathcal{F}^1_r(\mathcal{B}(\mathcal{A}',\mathcal{A})) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

sont pleinement fidèles.

§ 4. Catégories dérivées filtrées :

Exemple 1 :

Soit $\chi : B \longrightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux. On appellera $\mathscr{A}'$ la catégorie des B-modules et $\mathscr{A}$ la catégorie de A-modules.

$T : \mathscr{A}' \longrightarrow \mathscr{A}$ est le foncteur produit tensoriel $T(L') = L' \otimes_B A$.

Soit $\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})$ la sous-catégorie de $F_1(\mathscr{A}', \mathscr{A})$ formée des objets $L = (L', L \xrightarrow{i} l)$ tels que, L, l et $\mathscr{L} = L/_l$ soient projectifs de type fini. On dira que l est la filtration de L sur A et $\mathscr{L}$ sa cofiltration.

$\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})$ est une sous-catégorie pleine de $F_1(\mathscr{A}', \mathscr{A})$.

Remarque :

La catégorie $\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})$ vérifie la propriété i) du § 3. On en déduit que QIS $F^1_r(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A}))$ est un ensemble multiplicatif. (Pour une autre démonstration de ce résultat cf. [3]). On en déduit, d'autre part, le :

Théorème 1 :

Le foncteur naturel $DF^1_1(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})) \longrightarrow D\mathscr{F}^-_1(\mathscr{A}', \mathscr{A})$ est pleinement fidèle.

Lemme 1 :

Soient $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne et $\mathscr{P}$ la sous-catégorie des objets projectifs de $\mathscr{A}$. Soit $L.$ un objet de $C^-(\mathscr{P})$ acyclique en degré $i < k$. Alors $t_{k]} L.$ est un objet de $C^-(\mathscr{P})$.

Preuve :

Comme $L.$ est borné à droite et acyclique pour $i < k$, la suite

$o \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_{L_k}) \longrightarrow L_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow L_h \longrightarrow 0$ est exacte et est scindée, donc $\mathrm{Ker}(d_{L_k})$ est un objet de $\mathscr{P}$.

Lemme 2 :

Soient M. un objet de $C^n(\mathscr{P})$, que l'on suppose à composantes nulles en dehors de $[o,n]$, et L. un objet de $C^-(\mathscr{P})$. S'il existe un quasi-isomorphisme $s. : M. \longrightarrow L.$ ou un quasi-isomorphisme $t. : L. \longrightarrow M.$ alors les complexes $t_{o]} L.$ et $t_{[n} L.$ sont des objets de $C^-(\mathscr{P})$ et le complexe $t_{[n}\, t_{o]} L.$ est un objet de $C^n(\mathscr{P})$.

Preuve :

L'existence de l'un des quasi-isomorphismes s. ou t. entraîne que L. est acyclique en dehors de $[o, n]$. $t_{o]}$ L. est donc un objet de $C^-(\mathscr{P})$.

Dans le premier cas, le morphisme composé $M. \xrightarrow{s.} L. \xrightarrow{\iota.} t_{[n} L.$ est un quasi-isomorphisme, son cône est la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow L_{n/\mathrm{Im}\, d_{n+1}} \oplus M_{n-1} \longrightarrow L_{n-1} \oplus M_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow L_1 \oplus M_o \rightarrow L_o \rightarrow L_{-1} \rightarrow \ldots L_{-h} \rightarrow 0$$

comme toutes les composantes L_i et M_i sont des objets de $\mathscr{P}$, $L_{n/\mathrm{Im}\, d_{n+1}}$ est un objet de $\mathscr{P}$. Ce qui prouve que $t_{[n}$ L. est un objet de $C^-(\mathscr{P})$.

Dans le second cas, t. se factorise par le quasi-isomorphisme $\iota. : t_{[n} L. \longrightarrow M.$ en considérant son cône, on démontre de la même façon que $t_{[n}$ L. est un objet de $C^-(\mathscr{P})$.

On en déduit que $t_{[n}\, t_{o]}$ L. est un objet de $C^n(\mathscr{P})$.

Proposition 1 :

Soit $\underline{L}. = (L.', L. \leftarrow l)$ un objet de $C^-(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A}))$ acyclique (i.e. L.', L. et l. sont acycliques). En dehors de $[o,n]$, $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{L}.$ sa cofiltration et $(d_{L.'}, d_{L.}, d_{l.})$ sa différentielle et $d_{\mathscr{L}.}$ la différentielle induite sur sa cofiltration. On suppose que $L'_{n/\mathrm{Im}(d_{L'_{n+1}})}$, $L_{n/\mathrm{Im}(d_{L_{n+1}})}$, $l_{n/\mathrm{Im}(d_{l_{n+1}})}$ et $\mathscr{L}_{n/\mathrm{Im}(d_{\mathscr{L}_{n+1}})}$ sont projectifs.

Alors les complexes $t_{o]}\underline{L}.$ et $t_{[n}\underline{L}.$, sont des objets de $C^{-}(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A}))$ et le complexe $t_{[n}\, t_{o]}\, \underline{L}.$ est un objet de $C^{n}\ (\mathscr{B}\ (\mathscr{A}', \mathscr{A}))$.

Preuve :

Les complexes $t_{o]}\,L'.$, $t_{o]}\,L.$, $t_{o]}\,l.$, $t_{o]}\,\mathscr{L}.$, $t_{[n}\,L'.$, $t_{[n}\,L.$, $t_{[n}\,l.$ et $t_{[n}\,\mathscr{L}.$ sont à composantes projectives, d'après le lemme 1, et de type fini.

$\underline{L}.$ est borné à droite, soit $k \in \mathbb{Z}$, tel que $L_i = 0$ pour $i < k$, pour tout $i \in [k,o]$ l'exactitude du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{L} \arrow[r] & \mathscr{L}_i \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{L}_{i-1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & L_i \arrow[r] \arrow[u] & L_{i-1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & l \arrow[r] & l_i \arrow[r] \arrow[u] & l_{i-1} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

entraîne celle de la suite $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow L \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow 0$ d'après le diagramme du «serpent». Par récurrence, la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_{l_o}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_{L_o}) \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_{\mathscr{L}_o}) \longrightarrow 0$$

est exacte. Elle est scindée car à composantes projectives, d'où la première assertion.

L'exactitude du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & \\
 & \mathscr{L}_{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{L}_n \arrow[r] \arrow[u] & \mathscr{L}_n/\mathrm{Im}(d_{\mathscr{L}_n}) \\
\mathrm{Ker}(d_{L_{n+1}}) \arrow[r] & L_{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & L_n \arrow[r] \arrow[u] & L_n/\mathrm{Im}(d_{L_n}) \\
\mathrm{Ker}(d_{l_{n+1}}) \arrow[r] & l_{n+1} \arrow[r] \arrow[u] & l_n \arrow[r] \arrow[u] & l_n/\mathrm{Im}(d_{l_n}) . \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

et la surjectivité des applications du diagramme

$$
\begin{tikzcd}
L_{n+2} \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & \mathrm{Ker}(d_{L_{n+1}}) \arrow[d, two heads] \\
\mathscr{L}_{n+2} \arrow[r, two heads] & \mathrm{Ker}(d_{\mathscr{L}_{n+1}})
\end{tikzcd}
$$

entraîne la suite exacte $0 \longrightarrow l_n/\mathrm{Im}(d_{l_{n+1}}) \longrightarrow L_n/\mathrm{Im}(d_{L_{n+1}}) \longrightarrow \mathscr{L}_n/\mathrm{Im}(d_{\mathscr{L}_{n+1}}) \longrightarrow 0$

D'où la deuxième assertion. Latroisième assertion découle des deux premières.

Corollaire 1 :

Soient $\underline{M}_\cdot$ un objet de $C^n(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A}))$ et $\underline{L}_\cdot$ un objet de $C^-(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A}))$.

S'il existe un quasi-isomorphisme $\underline{s}_\cdot \underline{M}_\cdot \longrightarrow \underline{L}_\cdot$ ou un quasi-isomorphisme $\underline{t}_\cdot : \underline{L}_\cdot \longrightarrow \underline{M}_\cdot$ alors $t_{o]}\underline{L}_\cdot$ et $t_{[n}\underline{L}_\cdot$ sont des objets de $C^-(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A}))$ et $t_{[n}\, t_{o]}\underline{L}'_\cdot$ est un objet $C^n(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A}))$.

Preuve :

Découle du lemme 2 et de la proposition précédente.

Proposition 2 :

Soient A un anneau et $\mathscr{A}$ la catégorie des A-modules, dans la catégorie $\mathscr{F}_l(\mathscr{A})$ des objets $L = (L \xleftarrow{i} l)$ où i est un morphisme de A-modules, tout objet L, tels que i soit injectif et l, L et $L_{/l}$ soient projectifs, est projectif dans $\mathscr{A}$.

Il est, a fortiori, projectif dans $F_l(\mathscr{A})$.

Preuve :

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & & L \arrow[dd, "\Psi"] \\
 & & l \arrow[ur, "i"] \arrow[dd, "\psi"] & \\
 & K \arrow[rr, "\Phi"] & & M \\
k \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "\varphi"] & & m \arrow[ur, "j"] &
\end{tikzcd}$$

où (Φ, φ) est un épimorphisme de $\mathscr{A}$. Φ et φ sont donc surjectifs, d'après § 3, Prop. 1. Comme L et l sont projectifs, il existe $w : l \longrightarrow k$ et $f : L \longrightarrow K$ tels que $\varphi w = \psi$ et $\Phi f = \Psi$. On a $\Phi(uw - fi) = 0$. On pose : $h = fi - uw$. $\mathscr{L} = L_{/l}$ étant projectif, il existe une rétraction r de i. On pose : $\Omega = f - hr$. On obtient $\Omega_i = uw$ et $\Phi\,\Omega = \Psi$, d'où le résultat.

Proposition 3 :

Soit $\chi : B \longrightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux surjectif, $I = Ker(\chi)$, et $L = (L', L \xleftarrow{i} l)$ un objet de la catégorie $\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})$ alors L est projectif dans $\mathscr{F}_l(\mathscr{A}', \mathscr{A})$ et a fortiori dans $F_l(\mathscr{A}', \mathscr{A})$.

Preuve :
On conserve les notations de la proposition précédente.
Il suffit de prouver que l'application $\Omega : L \longrightarrow K$ provient d'une application B-linéaire $\Omega' : L' \longrightarrow K'$, telle que $\Psi' \; \Phi' = \Omega'$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & L' \arrow[dl] \arrow[dd, "\Psi'"] \arrow[ddlll, dashed, "\Omega'"'] \\
 & & L \arrow[ddll, "\Omega"'] \arrow[dd, "\Psi"] & \\
K' \arrow[rrr, twoheadrightarrow, "\Phi'"] \arrow[d, twoheadrightarrow] & & & M' \arrow[dl] \\
K \arrow[rr, twoheadrightarrow, "\Phi"'] & & M &
\end{tikzcd}$$

et remarquons que Φ' est surjective car $\underline{\varphi} : \underline{K} \longrightarrow \underline{M}$ est supposé être un épimorphisme de $\mathscr{F}(\mathscr{A}', \mathscr{A})$. Comme L' est projectif et $K' \twoheadrightarrow K$ est surjective, car c'est la flèche de l'extension des scalaires via χ, il existe $\Omega'' : L' \longrightarrow K'$ telle que $\Omega'' \otimes 1_A = \Omega$. On a alors $(\Phi' \Omega'' - \Psi')(L') \subset I.M' = I.\Phi'(K') = \Phi'(IK')$ donc il existe une flèche $g' : L' \longrightarrow IK'$ telle que $\Phi' g' = \Phi' \Omega'' - \Psi'$.
On pose $\Omega' = \Omega'' - g$ où g est la composée $L' \xrightarrow{g'} I.K' \hookrightarrow K'$. On obtient
$\Phi' \Omega' = \Psi'$ et $\Omega' \otimes 1_A = \Omega$.

Remarque :
Tout épimorphisme $\underline{\varphi} : \underline{L} \longrightarrow \underline{M}$ de $\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})$ admet
(Ker Φ', Ker Φ $\longleftarrow$ Ker φ) comme noyau dans $\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})$.

Proposition 4 :
Sous les mêmes hypothèses sur $\chi : B \longrightarrow A$, tout complexe $\underline{L}.$ de $\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})$ borné à droite est homotope à zéro.

Preuve :
Par récurrence en utilisant la proposition 3.

Corollaire 1 :

Tout quasi-isomorphisme de $K\,\mathscr{F}_1^-(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A}))$ est inversible à homotopie près.
Dans ce cas, les foncteurs du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} K\,\mathscr{F}_1^n(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & K\,\mathscr{F}_1^-(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})) \arrow[d, "\wr"] \\ D\,\mathscr{F}_1^n(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})) \arrow[r] & D\,\mathscr{F}_1^-(\mathscr{B}(\mathscr{A}', \mathscr{A})) \end{tikzcd}$$

sont pleinement fidèles.
Les foncteurs verticaux sont des équivalences de catégories.

Exemple II :

Soit donné le diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux suivant :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\chi"] & & A \\ & W \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

On notera $\Omega^1_{B/W}$ le module des différentielles de B relativement à W.

Définition 1 :

Une «connexion» ∇_E d'un B-module E, relativement à W, est une application additive

$$\nabla_E : E \longrightarrow E \underset{B}{\otimes} \Omega^1_{B/W}$$

vérifiant : $\nabla_E(bx) = b\,\nabla_E(x) + x \otimes db$ où

$d : B \longrightarrow \Omega^1_{B/W}$ est la dérivation habituelle.

Cf. [4] § 2.

Si E et F sont deux B-modules munis de connexions ∇_E et ∇_F respectivement.

Une application u : E $\longrightarrow$ F B-linéaire est dite compatible aux connexions ou «horizontale» si le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\nabla_E"'] & F \arrow[d, "\nabla_F"] \\ E \otimes_B \Omega^1_{B/W} \arrow[r, "u \otimes 1"] & F \otimes_B \Omega^1_{B/W} \end{tikzcd}$$

commute.

On notera $\mathcal{A}'$ la catégorie des B-modules «à connexions».

Proposition 1 :

Si $\Omega^1_{B/W}$ *est un B-module plat, alors* $\mathcal{A}'$ *est une catégorie abélienne.*

Preuve :

Soient u : E $\longrightarrow$ F un morphisme horizontal, et C son conoyau. On obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\nabla_E"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\nabla_F"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\nabla_C"] & 0 \\ E \otimes_B \Omega^1_{B/W} \arrow[r, "u \otimes 1"] & F \otimes_B \Omega^1_{B/W} \arrow[r] & C \otimes_B \Omega^1_{B/W} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où les lignes sont exactes. On définit ∇_C par passage aux quotients.

Si K est le noyau de u, comme $\Omega^1_{B/W}$ est plat le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "\nabla_K"] & E \arrow[r] \arrow[d, "\nabla_E"] & F \arrow[d, "\nabla_E"] \\
0 \arrow[r] & K \underset{B}{\otimes} \Omega^1_{B/W} \arrow[r] & E \underset{B}{\otimes} \Omega^1_{B/W} \arrow[r] & F \underset{B}{\otimes} \Omega^1_{B/A}
\end{tikzcd}$$

est commutatif et les lignes sont exacts. On définit ∇_K comme restriction de ∇_E.

Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des A-modules et $\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ la sous-catégorie de $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ des objets $\underline{L} = (L', L \xleftarrow{i} l)$ tels que i soit injectif, L' soit un B-module projectif de type fini L, l et $L_{/l}$ soient des A-modules projectifs de type fini.

Remarque :

$\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ vérifie la propriété i) du § 3.

On en déduit le

Théorème 1 :

Le foncteur $D\mathcal{F}^1_1(\mathcal{B}(\mathcal{A}', \mathcal{A})) \longrightarrow D\mathcal{F}^-_1(\mathcal{A}', \mathcal{A})$ *est pleinement fidèle.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN : «Grothendieck Topologies» Seminar Notes 1962 - Harvard University.

[2] A. BADRA : C.R. Acad. Sc. 291 - Série A, 1980, 539.

[3] A. BADRA : Thèse de 3ème cycle - Université de Rennes.

[4] P. BERTHELOT et A. OGUS : Notes on Crystalline Cohomology - Princeton University Press.

[5] N. BOURBAKI : Algèbre, chapitre 10 - MASSON.

[6] L. ILLUSIE : Complexe cotangent et Déformations I. Lecture Notes in Mathematics Springer Verlag n° 239.

[7] R. HARTSHORNE : Residues and Duality - Lecture Notes in Mathematics Springer-Verlag n° 20.

[8] B. MITCHELL : Theory of Categories - Academic Press.

S.G.A. 4 1/2 : P. DELIGNE : Cohomologie Etale, Lecture Note in Math. n° 569 - Springer-Verlag.

S.G.A. 6 : P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE : Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, Lecture Notes in Math , n° 225, Springer-Verlag.

Reçu en décembre 1987.

Université de Clermont II, U.F.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 Aubière, France.

Adresse personnelle : 1, Impasse Gauguin - Le Clos des Saules, 63540 Romagnat.