ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

RENATO MIGLIORATO

Semi-ipergruppi e ipergruppi *n*-completi

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 89, série *Mathématiques*, n^{o} 23 (1986), p. 99-123

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1986__89_23_99_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 23. 1986 , pp. 99-123

SEMI-IPERGRUPPI E IPERGRUPPI n-COMPLETI (*)

Renato MIGLIORATO

Riassunto :

Nel presente lavoro si generalizza il concetto di semi-ipergruppo (ipergruppo) completo, mediante l'introduzione dei semi-ipergruppi n-completi.

Si dimostrano alcune proprietà e si costruisono esempi di-semi-ipergruppi e di ipergruppi n-completi ;

Summary :

In the present paper one generalize the concept of complet semi-hypergroup (hypergroup) by means of the introduction of the the n-complet semi-hypergroups (hypergroups).

One prove some propertys and construct some examples of n-complet semi-hypergroups and hypergroups.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNSAGA del C.N.R.

Introduzione :

Per le nozioni fondamentali su semi-ipergruppi e ipergruppi si fa riferimento a [1] , [2] , [5] . Si ricorda in particolare che, se H è un semi-ipergruppo e A $\subset$ H, con A $\neq \emptyset$, si dice che A è parte completa di H se $\forall n \in N$, $\forall x_1, \ldots, x_n \in H$, si ha che

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \cap A \neq \emptyset \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i \subset A.$$

Se A $\subset$ H, con A $\neq \emptyset$, si chiama chiusura completa di A e si indica con $\mathscr{C}(A)$, l'intersezione di tutte le parti complete di H contenenti A.

In un semi-ipergruppo H si definiscono poi le relazioni β_n tali che

$$\forall x,y \in H, \quad x\,\beta_1\,y \Longleftrightarrow x = y,$$
$$\forall n \in N_2, \quad x\,\beta_n\,y \Longleftrightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in H : \{x, y\} \subset \prod_{i=1}^{n} x_i \qquad (1)$$

Si definisce inoltre la relazione

$$\beta = \bigcup_{n \in N} \beta_n$$

che è evidentemente irflessiva e simmetrica ma non, in generale, transitiva.
Si indica con β^* la chiusura transitiva di β .

Si dimostra che β^* è la più fine relazione di equivalenza fortemente regolare sur H e che $\forall x \in H$, $\beta^*(x) = \mathscr{C}(\{x\})$.

Ciò premesso, ricordiamo che un semi-ipergruppo H si dice completo se vale una delle seguenti condizioni tra loro equivalenti

(1) $\qquad \forall x, y \in H, \qquad x \circ y = \mathscr{C}(x\,y),$

(2) $\qquad \forall x, y \in H, \qquad x \circ y = \beta^*(x \circ y)$

---

(1) Si indica con N_r l'insieme dei numeri naturali n tali che $n \geqslant r$.

I semi-ipergruppi (ipergruppi) completi costituiscono una importante e vasta classe di semi-ipergruppi (ipergruppi), ed anzi la classe degli ipergruppi completi coincide con la classe degli ipergruppi di associatività [4], collegandosi quindi alla teoria dei quasigruppi.

Oggetto del presente lavoro è lo studio di una più ampia classe di semi-ipergruppi, ottenuta per generalizzazione del concetto di semi-ipergruppo completo mediante quello di semi-ipergruppo n-completo.

Ricordiamo ancora che se H è un semi-ipergruppo, H/β^* è un semi-gruppo, ed anzi è un gruppo se e solo se H è un ipergruppo. Inoltre se H è un ipergruppo, si chiama cuore dit H, e si indica con ω_H, l'identità del gruppo H/β^*. In ogni ipergruppo si ha infine che $\forall x \in H$, $x \circ \omega_H = \omega_H \circ x = \beta^*(x)$.

1. Definizione e prime proprieta'

Prima di definire i semi-ipergruppi n-completi, dimostriamo il seguente.

Theorema 1.1. *Se H è un semi-ipergruppo ed $m \in N$, le condizioni*

(1,1) $\forall x_1, ..., x_n \in H, \quad \prod_{i=1}^{n} x_i = \mathscr{C}(\prod_{i=1}^{m} x_i),$

(1,2) $\forall x_1, ..., x_m \in H, \quad \forall x \in \prod_{i=1}^{m} x_i, \quad \prod_{i=1}^{m} x_i = \mathscr{C}(\{x\}),$

(1,3) $\forall x_1, ..., x_m \in H, \quad \prod_{i=1}^{m} x_i = \beta^*(\prod_{i=1}^{m} x_i),$

(1,4) $\forall x, ..., x_m \in H, \quad \forall m' > m, \quad \forall y_1, ..., y_{m'} \in H,$

$$\prod_{i=1}^{m} x_i \cap \prod_{i=1}^{m'} y_i \neq \emptyset \Longrightarrow \prod_{i=1}^{m} x_i = \prod_{i=1}^{m'} y_i.$$

sono equivalenti. Inoltre se $n \in N_2$ e se una qualunque di tali condizioni vale per $m = n$, allora vale per ogni $m > n$.

Dimostrazione. L'equivalenza delle prime tre condizioni è immediata. Infatti, per quanto detto nell'introduzione, $\forall x \in H$, $\mathscr{C}(\{x\})$ è parte completa di H, pertanto

$$\prod_{i=1}^{m} x_i \subset \beta^* \left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right),$$

ed essendo inoltre

$$\beta^*(x) = \mathscr{C}(\{x\}),$$

segue che (1,1) $\Longleftrightarrow$ (1,2).

Dall'essere β^* un'equivalenza e $\beta^*(x) = \mathscr{C}(\{x\})$, deriva poi immediatamente che (1,3) $\Longleftrightarrow$ (1,4).

Prima di dimostrare l'equivalenza della (1,4) con la (1,1), dimostriamo che se la (1,1) vale per $m = n$, allora vale per ogni $m > n$.

Sia $m = n + p$, $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p} \in H$. Posto

$$A = \prod_{i=n}^{n+p} x_i \quad ,$$

si ha che

$$(1,5) \qquad \prod_{i=1}^{m} x_i = \prod_{i=1}^{n-1} x_i \circ A = \bigcup_{x \in A} \left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \circ x\right).$$

D'altra parte, se si ammette la (1,1) si ha che

$$\forall x \in A, \qquad \prod_{i=1}^{n-1} x_i \circ x = \mathscr{C}\left(\prod_{i=1}^{n-1} x_i \circ x\right),$$

e quindi $\prod_{i=1}^{m} x_i$, essendo, per la (1,5), unione di parti complete, è parte completa(2).

Pertanto

$$\prod_{i=1}^{m} x_i = \mathscr{C}\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right).$$

Da ciò segue che (1,1) $\Longleftrightarrow$ (1,4). (c.d.d.)

---

(2) Si ricorda che l'insieme delle parti complete di H è un sottoreticolo di $\mathscr{P}(H)$.

Definizione 1.1. *Se H è un semi-ipergruppo ed $n \in N_2$, si dice n-completo se una qualunque delle condizioni equivalenti (1,1), ..., (1,4) è valida per $m \geq n$, ma non è valida per $m = n - 1$.*

E' evidente che per $n = 2$ il concetto di semi-ipergruppo n-completo coincide con quello di semi-ipergruppo completo.

Théorema 1.2. *Se H è un semi-ipergruppo n-completo e se*

$$\forall x \in H, \quad x\ \beta_2\, x, \tag{1,6}$$

allora

$$\beta_n = \beta = \beta^* \tag{1,7}$$

Dimostrazione. Per la (1,6), $\forall x \in H$, si ha che

$$\exists x_1, a_1 \in H : x_1 \circ a_1 \ni X$$

Sempre per la (1,6), si ha che

$$\exists x_2, a_2 \in H : x_2 \circ a_2 \ni a_1,$$

e quindi

$$x_1 \circ x_2 \circ a_2 \ni X.$$

Procedendo ricorsivamente si trova che

$$\exists x_1, ..., x_n \in H : \prod_{i=1}^{n} x_i \ni x. \tag{1,8}$$

Essendo H n-completo è allora

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \beta^*\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) = \beta^*(x),$$

e quindi, se $y \in H$,

$$x\ \beta^* y \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i = \beta^*(\{x,y\}).$$

Pertanto

$$x\ \beta^n\ y \Longrightarrow x\beta_n y.$$

(c.d.d.)

Diamo ora due esempi di semi-ipergruppi n-completi in cui non vale la (1, 6) ed è $\beta^* \neq \beta_n$.

Esempio 1,1.

o	1	2	3	4
1	{1, 2, 3}	{1, 2}	{1, 3}	{1, 4}
2	{1, 2}	{1, 2, 3}	{2, 3}	{2, 4}
3	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}	{3, 4}
4	{1, 4}	{2, 4}	{3, 4}	{1, 2, 3}

Esempio 1,2.

o	1	2	3	4	5	6
1	{1,2,3}	{1,2}	{1,3}	{1,2}	{1,3}	{1,3}
2	{1,2}	{1,2,3}	{2,3}	{2,3}	{1,2}	{1,2}
3	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}	{1,3}	{2,3}	{1,3}
4	{1,2}	{2,3}	{1,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}
5	{1,3}	{1,2}	{2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{1,2,3}
6	{1,3}	{1,2}	{1,3}	{1,2,3}	{1,2,3}	{4,5}

In entrambi gli esempi si verifica facilmente la proprietà associativa. Infatti nell'esempio 1.2 l'iperprodotto di due qualunque elementi è sempre uno dei seguenti insiemi : $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{4,5\}$. Ciascuno di essi moltiplicato a destra o a sinistra per un qualunque elemento di H dà $\{1, 2, 3\}$, e pertanto $\forall x, y, z \in H$, $(x \circ y) \circ z = \{1, 2, 3\} = x \circ (y \circ z)$. Analogamente si verifiaca la proprietà associativa nell'esempio 1.1. Si tratta dunque di due semi-ipergruppi 3-completi.

Nel primo esempio è $4 \ \beta^* \ 4$, ma non $4 \ \beta_3 \ 4$; nel secondo caso è $4 \ \beta^* \ 5$ ma non $4 \ \beta_3 \ 5$; in entrambi i casi, dunque non vale la (1,7). E' da osservare però che mentre nel primo esempio è

$$x \neq y \implies (x \ \beta^* \ y \iff x \ \beta_3 \ y),$$

ciò non è vero nel secondo esempio. Si può osservare a tale proposito che, per $n = 2$, se $x \neq y$ e se $x \ \beta^* \ y$, allora è necessariamente $x \ \beta_2 \ y$ e pertanto

Teorema 1.3. *Se H è un semi-ipergruppo completo, allora*

$$x \neq y \implies (x \ \beta^* \ y \iff x \ \beta_2 \ y).$$

Vale inoltre il

Teorema 1.4. *Se H è un semi-ipergruppo n-completo, condizione necessaria e sufficiente affinchè sia*

$$\beta_n = \beta^*$$

è che

(1,9) $$\forall a \in H_{/\beta^*} \quad \exists b, c \in H_{/\beta^*} : \quad b \circ c = a .$$

Dimostrazione. La condizione è necessaria, infatti se $\beta_n = \beta^*$ allora

$$\forall x, y \in H, \quad x \ \beta^* \ y \implies \exists x_1, ..., x_n \in H : \prod_{i=1}^{n} x_i \supset \{x, y\} ,$$

e quindi, in particolare, poichè $\forall x \in H$, $x \ \beta^* \ x$ si ha che

$$\forall x \in H, \quad \exists x_1, ..., x_n \in H : \prod_{i=1}^{n} x_i \ni x.$$

Pertanto

$$\exists y, z \in H \ : y \circ z \ni x.$$

Da ciò segue che

$$\beta^*(y) \circ \beta^*(z) = \beta^*(x).$$

La condizione è sufficiente. Se vale la (1,9), infatti, si dimostra facilmente, per induzione, che

$$\forall n \in N, \quad \exists a_1, \ldots, a_n \in H/_{\beta^*} \ : \ \prod_{i=1}^{n} a_i = a.$$

Se $\forall i = 1, \ldots, n$, $x_i \in a_i$, si ha allora che

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \subseteq \prod_{i=1}^{n} a_i = a,$$

e pertanto

(1,10) $$\forall a \in H/_{\beta^*} \ , \quad \exists x_1, \ldots, x_n \in H \ : \ \prod_{i=1}^{n} x_i = a.$$

Se $x, y \in H$ e $x \ \beta^* y$, si ha, d'altra parte, che

$$x \in \beta^*(y) = \beta^*(y) = y$$

ed è $\beta^*(x) = \beta^*(y) \in H/_{\beta^*}$. Quindi per la (1,10) segue la tesi.

Dal teorema 1.4 segue immediatamente il

Corollario 1.1. *In ogni ipergruppo n-completo è* $\beta^* = \beta_n$.

2. Omomorfismi di semi-ipergruppi e ipergruppi n-completi

Teorema 2.1. *Se* $f : h \longrightarrow H'$ *è un omomorfismo buono*[(3)] *di semi-ipergruppi tale che*

(2, 1) $$\forall x, y \in H, \qquad x \circ y = f^{-1}(f(x) \circ f(y)) \cap \mathscr{C}(x \circ y),$$

allora se H' è n-completo, esiste $m \leq n$ *tale che* H *è m-completo.*

---

(3) Si ricorda che se H e H' sono semi-ipergruppi, un'applicazione $f : H \longrightarrow H'$ si dice omomorfismo se $\forall x, y \in H$, $f(xy) \subset f(x)f(y)$. Si dice omomorfismo buono se $f(x\,y) = f(x)f(y)$.

Dimostrazione. Dalla (2,1) essendo f un omomorfismo buono segue immediatamente che

$$\forall x, y \in H,\ x \circ y = f^{-1}(f(x \circ y)) \cap \mathscr{C}(x \circ y),$$

e da qui si dimostra facilmente che

$$(2,2)\quad \forall n \in N,\ \forall\, x_1, \ldots, x_n \in H,\quad \prod_{i=1}^{n} x_i = f^{-1}\Big(f\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big) \cap \mathscr{C}\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big).$$

Infatti

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \bigcup_{y \in \prod_{i=1}^{n-1}} f^{-1}(f(y \circ x_n)) \circ \mathscr{C}(y \circ x_n) = f^{-1}\Big(f\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)\Big) \cap \mathscr{C}(y \circ x_n),$$

ma $\mathscr{C}(y \circ x) = \mathscr{C}\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)$ e dunque segue la (2,2).

Se $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_t \in H$, con $t \geq n$, essendo H n-completo ed f un omomorfismo buono, si ha che

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \cap \prod_{i=1}^{t} y_i \neq \emptyset \Longrightarrow f\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) \cap f\Big(\prod_{i=1}^{t} y_i\Big) \neq \emptyset \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \cap \prod_{i=1}^{t} f(y_i) \neq \emptyset \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{t} f(y_i) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f\Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) = f\Big(\prod_{i=1}^{t} y_i\Big).$$

da qui e dalla (2,2) segue infine che

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \cap \prod_{i=1}^{t} y_i \neq \emptyset \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{t} y_i\ ,$$

e pertanto seiste $m \leq n$ tale che H è m-completo.

(c.d.d.)

Dal teorema ora dimostrato derivano delle conseguenze per le quli è opportuno premettere alcuni risultati di precedenti lavori. In [6] si sviluppa un metodo per costruire semi-ipergruppi (ipergruppi) a partire da un semi-ipergruppo (ipergruppo) noto.

Sia $< h, o >$ un semi-ipergruppo, $< G, . >$ un semigruppo, $\{h_i : i \in G\}$ una famiglia di insiemi h_i a due a due disgiunti e $\mathcal{F} = \{f_i : i \in G\}$ una famiglia di applicazioni $f_i : h_i \longrightarrow h$, tali che

$$(2,4) \qquad \forall a, b \in h, \ \forall i, j \in G, \ f_i^{-1}(a) \neq \emptyset \neq f_j^{-1}(b) \Longrightarrow f_{i.j}^{-1}(a \circ b) \neq \emptyset.$$

Posto

$$H = \bigcup_{i \in G} h_i ,$$

e

$$\forall (x,y) \in h_i \times h_j , \qquad x * y = f_{i.j}^{-1}(f_i(x) \circ f_j(y)),$$

si ottiene un ipergruppoide $< H, *>$, denotato anche con il simbolo $H_{\mathcal{F}}^{G}(h)$, sul quale si dimostra che

Proposizione 2.1. *Se vale la condizione*

$$(2,5) \qquad \forall i,j \in G, \qquad \left.\begin{array}{l} a,b \in h, \ c \in a \circ b \\ f_i^{-1}(a) \neq \emptyset = f_j^{-1}(b) \end{array}\right\} \Longrightarrow f_{i,j}^{-1}(c) \neq \emptyset,$$

$H_{\mathcal{F}}^{G}(h)$ è un semi-ipergruppo ed inoltre l'applicazione $f : H \longrightarrow h$ definita ponendo

$$\forall i \in G, \ \forall x \in h_i , \ f(x) = f_i(x),$$

è un omomorfismo buono. Inoltre $\forall i \in G$, $h_i = \mathscr{C}(h)$. Da ciò segue che la (2,1) è verificata.

Proposione 2. II. *Se $H_{\mathcal{F}}^{G}(h)$ è un semi-ipergruppo, condizione necessaria e sufficiente affinchè si un ipergruppo è che sia*

$< G, . >$ un gruppo
$< f(H), o >$ un ipergruppo

(2,6) $\forall i, j \in G, \forall (a,b) \in f(h_i) \times f(h_j),\ f^{-1}_{i.j^{-1}}(b/a) \neq \emptyset \neq f^{-1}_{i^{-1}.j}(a \setminus b).$

Va osservato ancora che se le applicazioni f_i sono tute surgettive e quindi in particolare bijettive), allora le condizioni (2,5) e (2,4) sono sempre verificate ; se, oltre ad essere le f_i surgettive è $<G, .>$ un gruppo e $<h, o>$ un ipergruppo, è verificata anche la (2 6) e pertanto $H^G_{\mathscr{F}}(h)$ è un ipergruppo.

Premesso ciò, dal teorema 2.1 segue il

Teorema 2.2. *Se h è un semi-ipergruppo n-completo e $H^G_{\mathscr{F}}(h)$ soddisfa la condizione (2,5), allora $H^G_{\mathscr{F}}(h)$ è un semi-ipergruppo m-completo, con $m \leq n$. Se inoltre $H^G_{\mathscr{F}}(h)$ è un ipergruppo ed ω_H è isomorfo ad h, allora è m = n.*

Dimostrazione. La prima parte è immediata conseguenza della proposizionne 2.I e del teorema 2.1.

Sia $H^G_{\mathscr{F}}(h)$ un ipergruppo e ω_H isomorfo ad h. Se $x_1, \dots, x_m \in H$, si ha che

$$\prod_{i=1}^{m} x_i \subset \omega_H:$$

Essendo $H^G_{\mathscr{F}}(h)$ m-completo, $\prod_{i=1}^{m} x_i$ è parte completa di H e pertanto

$$\prod_{i=1}^{m} x_i = \omega .$$

Ma allora ω_H, e quindi h, è m-completo e conseguentemente m = n. (c.d.d.)

Il teorema 2.2 permette la costruzione di una classe molto ampia di semi-ipergruppi e ipergruppi m-completi, quando siano noti ipergruppi n-completi più semplici o, comunque, di cardinalità minore.

In particolare, dato un ipergruppo n-completo h tale che ω_H = h, si costruiscono ipergruppi di cardinalità maggiore e di cui h è il cuore.

Esempio 2.1. Sia h il seguente ipergruppo 3-completo.

o	1	2	3
1	h	{1, 2}	{1, 3}
2	{1, 2}	h	{2, 3}
3	{1, 3}	{2, 3}	h

Che h è effecttivamente un ipergruppo 3-completo si verifica facilmente essendo $\forall x, y, z \in h$, $(x \circ y) \circ z = h$, $x \circ (y \circ z) = h$. Se $G = Z_3$, $h_o = h$, $h_1 = \{4,5,6\}$, $h_2 = \{7,8,9\}$ e se f è l'applicazione identica, f ed f tali che

$$f_1(4) = f_2(7) = 1,$$
$$f_1(5) = f_2(8) = 2,$$
$$f_1(6) = f_2(9) = 3,$$

H (h) è l'ipergruppo 3-completo

*	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	h_o	{1, 2}	{1, 3}	h_1	{4, 5}	{4, 6}	h_2	{7, 8}	{7, 9}
2	{1, 2}	h_o	{2, 3}	{4, 5}	h_1	{5, 6}	{7, 8}	h_2	{8, 9}
3	{1, 3}	{2, 3}	h_o	{4, 6}	{5, 6}	h_1	{7, 9}	{8, 9}	h_2
4	h_1	{4, 5}	{4, 6}	h_2	{7, 8}	{7, 9}	h_o	{1, 2}	{1, 3}
5	{4, 5}	h_1	{5, 6}	{7, 8}	h_2	{8, 9}	{1, 2}	h_2	{2, 3}
6	{4, 6}	{5, 6}	h_1	{7, 9}	{8, 9}	h_2	{1, 3}	{2, 3}	h_o
7	h_2	{7, 8}	{7, 9}	h_o	{1, 2}	{1, 3}	h_1	{4, 5}	{4, 6}
8	{7, 8}	h_2	{8, 9}	{1, 2}	h_o	{2, 3}	{4, 5}	h_1	{5, 6}
9	{7, 9}	{8, 9}	h_2	{1, 3}	{2, 3}	h_o	{4, 6}	{5, 6}	h_1

3. m-identita' e ipergruppi m-regolari

Si dimostra in [4] che un ipergruppo completo è sempre regolare(4). Ciò non è vero, in generale, in un ipergruppo n-completo per $n > 2$. Valgono tuttavia, per qualunque $n \in N_2$, delle proprietà più deboli che, nel caso di $n = 2$, si riducono alle proprietà richiamate per gli ipergruppi completi.

Atale scopo premettiamo la seguente definizione.

Definizione 3.1. *Se H è un ipergruppo ed $m \in N$, un elemento u dit H si dice m-identità se*

$$\forall x \in H, \qquad x \in u^m \circ x \cap x \circ u^m. \tag{3.1}$$

Una m-identità $u \in H$ si dice m-identità buona se $u \in \omega_H$. Si indica con ε_H^m l'insieme delle m-identità di H e con E_H^m l'insieme delle m-identità buone di H, cioè

$$E_H^m = \varepsilon_H^m \cap \omega_H . \tag{3,2}$$

E' evidente che per $m = 1$ una m-identità è una identità (bilatera).
E' noto che in ogni ipergruppo l'insieme delle identità (supposto non vuoto) è contenuto in ω_H, quindi $E_H^1 = \varepsilon_H^1 \subset \omega_H$. Ciò non è vero, in generale, per $m > 1$, come dimostra il seguente esempio

---

(4) Un ipergruppo H si dice regolare se esiste almeno un'identità bilatera (cioè $\exists u \in H : \forall x \in H,\ x \in u \circ x \cap x \circ u$), e $\forall x \in H$ esiste almeno un inverso di x (cioè $\exists x' \in H : x \circ x' \cap x' \circ x \ni u$, dove u è una identità di H).

*	a	b	c	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	{b,c}	{a,b}	{a,c}	{2,3}	{1,2}	{1,3}	{5,6}	{4,5}	{4,6}	{8,9}	{7,8}	{7,9}
b	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{4,5}	{4,6}	{5,6}	{7,8}	{7,9}	{8,9}
c	{a,c}	{b,c}	{a,b}	{1,3}	{2,3}	{1,2}	{4,6}	{5,6}	{4,5}	{7,9}	{8,9}	{7,8}
1	{2,3}	{1,2}	{1,3}	{5,6}	{4,5}	{4,6}	{8,9}	{7,8}	{7,9}	{b,c}	{a,b}	{a,c}
2	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{4,5}	{4,6}	{5,6}	{7,8}	{7,9}	{8,9}	{a,b}	{a,c}	{b,c}
3	{1,3}	{2,3}	{1,2}	{4,6}	{5,6}	{4,5}	{7,9}	{8,9}	{7,8}	{a,c}	{b,c}	{a,b}
4	{5,6}	{4,5}	{4,6}	{8,9}	{7,8}	{7,9}	{b,c}	{a,b}	{a,c}	{2,3}	{1,2}	{1,3}
5	{4,5}	{4,6}	{5,6}	{7,8}	{7,9}	{8,9}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{1,2}	{1,3}	{2,3}
6	{4,6}	{5,6}	{4,5}	{7,9}	{8,9}	{7,8}	{a,c}	{b,c}	{a,b}	{1,3}	{2,3}	{1,2}
7	{8,9}	{7,8}	{7,9}	{b,c}	{a,b}	{a,c}	{2,3}	{1,2}	{1,3}	{5,6}	{4,5}	{4,6}
8	{7,8}	{7,9}	{8,9}	{a,b}	{a,c}	{b,c}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{4,5}	{4,6}	{5,6}
9	{7,9}	{8,9}	{7,8}	{a,c}	{b,c}	{a,b}	{1,3}	{2,3}	{1,2}	{4,6}	{5,6}	{4,5}

Si tratta del $H^{G}_{\mathcal{F}}(h)$ in cui h è l'ipergruppo

o	a	b	c
a	{b,c}	{a,b}	{a,c}
b	{a,b}	{a,c}	{b,c}
c	{a,c}	{b,c}	{a,b}

$G = Z_4$, $h_0 = h$, $h_1 = \{1, 2, 3\}$, $h_2 = \{4, 5, 6\}$, $h_3 = \{7, 8, 9\}$, f_0 è l'applicazione identica su h, f_1, f_2, f_3 sono le applicazioni tali che

$$f_1(1) = f_2(4) = f_3(7) = a,$$
$$f_1(2) = f_2(5) = f_3(8) = b,$$
$$f_1(3) = f_2(6) = f_3(9) = c.$$

Che h è effettivamente un ipergruppo lo si verifica facilmente, ed anzi, essendo $\forall x, y, z \in h$, $(x \circ y) \circ z = h = x \circ (y \circ z)$, si tratta di un ipergruppo 3-completo in cui è, inoltre, $\omega_h = h$.

Poichè le applicazioni f_o, f_1, f_2, f_3 sono bigettive, $H^G_{\mathscr{F}}(h)$ è un ipergruppo (v. osservazioni alle prop. 1 e 11), anch'esso 3-completo per il teor. 2.2, ed è $\omega_H = h$.

Gli elementi 4, 5, 6, pur non appartenendo ad ω_H sono 2-identità di H. Infatti $\forall x \in h$ si ha $x^2 = \{x_1, x_2\} \subset h_o$, con $x_1 \neq x_2$. Inoltre $\forall y_i \in h$ è $\{x_1, x_2\} \circ y = x_1 \circ y \cup x_2 \circ y = h_i \ni y$; $y \circ \{x_1, x_2\} = y \circ x_1 \cup y \circ x_2 = h_i \ni y$.

Teorema 3.1. *Se H è un ipergruppo ed* $u \in \varepsilon^m_H - E^m_H$, *l'ordine di* $\beta^*(u)$ *nel gruppo* $H/_{\beta^*}$, *è divisore di m.*

Dimostrazione. Se $x \circ u^m \ni x$, allora è

$$\beta^*(x) \,.\, \beta^*(u^m) = \beta^*(x),$$

e dunque, essendo $H/_{\beta^*}$ un gruppo,

$$\beta^*(u^m) = \omega_H.$$

Ma

$$\beta^*(u^m) = (\beta^*(u))^m,$$

e da qui segue la tesi. (c.d.d.)

Sia ora H un ipergruppo e ω_H sia n-completo. Si ha allora che

$$\forall u \in \omega_H, \quad u^n = \omega_H,$$

D'altra parte, per un noto teorema sul cuore di un ipergruppo [1], è

$$\forall x \in H, \quad \omega_H \circ x = x \circ \omega_H = \beta^*(x),$$

e quindi

$$\forall x \in H, \quad u^n \circ x = x \circ u^n = \beta^*(x) \ni x.$$

Segue dunque il

Teorema 3.2. *Se H è un ipergruppo e ω_H è n-completo, ogni elemento di ω_H è n-identità.*

E' evidente che se ω_H è n-completo, n è il minimo numero naturale per il quale si può affermare che ogni elmento di ω_H è n- identità ; ma è anche evidente che $\forall m > n$ e $\forall u \in \omega_H$, u è anche m-identità. Può inoltre avvenire che qualche elemento di ω_H (eventualmente tutti) sia m- identità con $m < n$. Vale inoltre il segeuente

Teorema 3.3. *Se H è un ipergruppo ed u è una m-identità di H, allora, $\forall t \in N$, u è una t m-identità di H.*

Dimostrazione. Se u è una m-identità di H, allora, $\forall t \in N$,

$$u^{tm} = u^m \circ u^{(t-1)m} \supset u^{(t-1)m} ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u^{(t-i)m} = u^m \circ u^{(t-i-1)m} \supset u^{(t-i-1)m},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

e quindi in definitiva,

$$u^{tm} \supset u^m.$$

Dunque

$$x \circ u^{tm} \supset x \circ u^m \ni x,$$

e analogamente

$$u^{tm} \circ x \supset u^m \circ x \ni x.$$

(c.d.d.)

Segue immediatamente il

Corollario 3.1. *Se H è un ipergruppo ed u un'identità di H, allora* $\forall m \in N$, *u è m-identità di H.*

Teorema 3.4. *Se H è un ipergruppo n-completo, allora* $E_H^{n-1} = \omega_H$ *, ed inoltre, condizione necessaria e sufficiente affinchè sia* $E_H^{n-1} = \varepsilon_H^{n-1}$ *è che,* $\forall a \in H/\beta^*$ *, l'ordine di a non sia un divisore di n-1.*

Dimostrazione. Se $u \in \omega_H$, allora

$$u^{n-1} \subset \omega_H \quad ,$$

e pertanto

$$\forall x \in H, \qquad x \circ u^{n-1} \subset \beta^*(x) \supset u^{n-1} \circ x :$$

Ma dall'essere H n-completo segue che

$$x \circ u^{n-1} = \beta^*(x \circ u^{n-1}) = \beta^*(x),$$

$$u^{n-1} \circ x = \beta^*(u^{n-1} \circ x) = \beta^*(x),$$

e quindi

$$x \circ u^{n-1} = u^{n-1} \circ x = \beta^*(x) \ni x.$$

Sia ora $x \in H : (\beta^*(x))^t = \omega_H$, $t \mid (n-1)$ (5) . Si ha allora che

$$(\beta^*(x))^{n-1} = \omega_H \ ,$$

e pertanto

$$x^{n-1} \subset \omega_H.$$

---

(5) Se a, b $\in$ N, il simbolo a | b si legge «a è divisore di b».

Segue allora che

$$\forall y \in H,\ \ y \circ x^{n-1} = x^{n-1} \circ y = \beta^*(y) \ni y.$$

Il resto dell'enunciato è immediata conseguenza del teorema 3.1 (c.d.d.)

Se con $\beta^{*-1}(x)$ si indica l'inverso di $\beta^*(x)$ nel gruppo $H_{/\beta^*}$, si dimostra il

Teorema 3.5. *Se H è un ipergruppo n-completo, allora*

(3.3) $\forall x \in H,\ \ \forall x' \in \beta^{*-1}(x),\ \ \exists\, u_1, u_2 \in E_H^{n-1}\ :\ u_1 \in x \circ x',\ u_2 \in x' \circ x,$

(3,4) $\forall x \in H,\ \forall x' \in \beta^{*-1}(x),\ \ x \circ x' \circ u^{n-2} = E_H^{n-1},$

(3,5) $\forall x, y \in H, \forall y' \in \beta^{*-1}(y),\ \exists\, u \in \omega_H :\ x/y \subset x \circ y' \circ u^{n-2}$ (6).

Dimostrazione. Dall'esser $\beta^*(x).\beta^{*-1}(x) = \omega_H$, deriva subito che

(3.6) $x \circ y' \subset \omega_H \supset x' \circ y,$

e quindi, essendo ogni elemento di ω_H (n-1)-identità, segue la (3 3). Dalla (3,6), inoltre, segue immediatamente la (3,4) essendo H n-completo e $\omega_H = E_H^{n-1}$ per il teorema 3.4.

Se $z \in x/y$, allora è $z \circ y \cap y \circ z \ni x$ e pertanto

$$\beta^*(z).\ \beta^*(y) = \beta^*(y).\ \beta^*(z) = \beta^*(y).$$

Da ciò segue che

$$\beta^*(z) = \beta^*(x).\ \beta^{*-1}(y) = \beta^{*-1}(y).\ \beta^*(x),$$

e quindi

---

(6) In un ipergruppo H se $x, y \in H$, si chiama quoziente di x per y e si indica con x/y, l'insieme dei $z \in H$ tali che $x \in y \circ z \cap x \circ y$.

$$x/y \subset \beta^*(x).\beta^{*-1}(y) = \beta^{*-1}(y).\ \beta^*(x).$$

D'altra parte, dall'essere H n-completo deriva che

$$x \circ y' \circ u^{n-2} = \beta^*(x).\beta^{*-1}(y) = y' \circ x \circ u^{n-2},$$

e da quì segue la (3,5). (c.d.d.)

Definizione 3.2. *Se H è un ipergruppo e $x, x' \in H$, si dice che x' è m-inverso di x se esiste un'identità buona $u \in H$ tale che $u \in x \circ x' \cap x' \circ x$. Si indica con J^m_x l'insieme degli m-inversi di x.*

Definizione 3.3. *Un ipergruppo H si dice m-regolare se esiste una m-identità buona e $\forall x \in H$ esiste un m-inverso di x.*

Si può ora enunciare il

Teorema 3.6. *Se H è un ipergruppo n-completo, condizione necessaria e sufficiente affinchè sia (n-1)-regolare è che*

(3,7) $$\forall x \in H, \qquad \exists x' \in \beta^{*-1}(x) : x \circ x' \cap x' \circ x \neq \emptyset.$$

In particolare, se

(3.8) $$\forall x, y \in H, \qquad x \circ y \cap y \circ x \neq \emptyset.$$

H è (n-1)-regolare ed inoltre

(3,9) $$\forall x \in H, \qquad J^{n-1}_x = \beta^{n-1}(x).$$

Dimostrazione. Per la (3,7), essendo

$$\beta^*(x).\beta^{*-1}(x) = \beta^{*-1}(x).\ \beta^*(x) = \omega_H\ ,$$

si ha che $\exists u \in \omega_H$ tale che

(3,11) $$u \in x \circ x' \cap x' \circ x.$$

D'altra parte, per il teorema 3.4, è $\omega_H = E_H^{n-1}$ e quindi x' è (n-1)-inverso di x.

Se vale la (3,8), allora la (3,10) è valida $\forall x \in \beta^{*-1}(x)$ e da ciò segue la (3,9). (c.d.d.)

Segue infine il

Corollario 3.1. *Se H è un ipergruppo n-completo commutativo, allora H è (n-1)-regolare e vale la (3,9).*

La dimostrazione è immediata poichè nel caso commutativo la (3,8) è sempre vera.

4. Alcune condizioni sufficienti affinche' un ipergruppo sia n-completo

I teoremi 2.1 è 2.2 del § 2, forniscono condizioni sufficienti affinchè un ipergruppo sia n-completo. In particolare il teorema 2.2 permette, in modo semplice, la costruzione di un ipergruppo n-completo a partire da un ipergruppo n-completo di cardinalità minore. In un precedente lavoro [7] si stabiliva inoltre una caratterizzazione dei semi-ipergruppi finiti H tali che l'ipergruppo totalmente regolare generato da H è n-completo.

Si ricorda che un ipergruppo si dice totalmente regolare (abbr. t.r.) se $\forall x, y \in H$, $\{x, y\} \subset x \circ y$. Si dimostra che se $<H, .>$ è un semi-ipergruppo, posto

$$\forall x, y \in H, \quad x \circ y = x.y \cup \{x, y\},$$

$<H, o>$ è un ipergruppo t.r. e si dice che $<H, o>$ è l'ipergruppo totalmente regolare generato da $<H, .>$.

Ciò premesso, si dimostra ancora in [7] che

Proposizione 4.1. *Se $<H, .>$ è un semi-ipergruppo finito e $<H, o>$ l'ipergruppo t.r. da esso generato, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista $n \in N_2$ tale che $<H, o>$ sia n-completo, è che valga una delle seguenti condizioni tra loro equivalenti*

(4,1) $$\forall K \subset H, \quad \forall x \in K, \qquad K \neq H \implies K \cdot x \not\subset K,$$

(4,2) $$\forall K \subset H, \quad \forall x \in K, \qquad K \neq H \implies x \cdot K \not\subset K.$$

Si può ora osservare che, in particolare, se l'ipergruppo $<H, .>$ è t.r., allora $<H, .> = <H, o>$ e quindi dalla proposizione 4.1 segue la

Proposizione 4.2. *Se H è un ipergruppo t.r., condizione necessaria e sufficiente affinchè esista $n \in N_2$ tale che H è n-completo è chevalga una delle condizioni equivalenti (4, 1), (4,2).*

Nel caso commutativo questo risultato si generalizza dagli ipergruppi t.r. agli ipergruppi in cui ogni elemento è una m-identità buona. Si ha cioè

Teorema 4.1. *Se H è un ipergruppo commutativo finito tale che $H = E_H^m$, condizione necessaria e sufficiente affinchè esista $n \in N_2$ tale che H è n-completo, è che*

(4,3) $\qquad \forall K \subset H,\ \forall x \in K, \quad K \neq H \Longrightarrow K \circ x \not\subset K.$

Dimostrazione. Se non vale la (4,3), e cioè se $\exists K \subset H$ con $K \neq H$ ed $\exists x \neq K$ tale che $K \circ x \subset K$, allora è

$$\forall n \in N_2,\ x^n \subset K,$$

e dunque H non è n-completo.

Sia ora $t \in N$, con $t \geq m. |H|$, e $(x_1,..., x_t) \in H^t$. Nella t-upla $(x_1,...,x_t)$ vi sono almeno m coordinate uguali, e siano uguali a y. Essendo H commutativo si ha dunque

$$\prod_{i=1}^{t} x_i = y^m \circ A,$$

dove A è l'iperprodotto delle rimaneneti (t-m) coordinate della t-upla.

Se $t_1 = 2m. |H|$, allora

$$\prod_{i=1}^{t_1} x_i = y_i^m \circ A_1$$

dove A_1 è l'iperprodotto di $t_2 = 2m . |H| - m$ elementi di H e quindi, essendo $t_2 > m . |H|$, è

$$A_1 = y_2^m \circ A,$$

ed in generale,

$$\forall i = 2, \ldots, |H| , \qquad A_i = y_i^m \circ A ,$$

dove A_i è iperprodotto di $2m \, . \, |H| - (i\text{-}1)\, m > m$ elementi di H. Pertanto

$$\prod_{i=1}^{t_1} x_i = \prod_{i=1}^{|H|} y_i^m \circ A_{|H|}. \tag{4,4}$$

Essendo $H = E_H^m$, è $\forall x, y \in H$, $y^m \circ x \ni x$, e dunque

$$\forall r \in N_2 , \qquad \prod_{i=1}^{r} y_i^m \subset \prod_{i=1}^{r+1} y_i^m. \tag{4,5}$$

Sia

$$\prod_{i=1}^{r} y_i^m \neq H.$$

Dall'essere $H = E_H^m$ deriva che $\forall z \in y_{i+1}^m$ se

$$z \notin \prod_{i=1}^{r} y_i^m ,$$

allora

$$z \in \prod_{i=1}^{r} y_i^m \circ z ,$$

e pertanto

$$\left| \prod_{i=1}^{r+1} y_i^m \right| > \left| \prod_{i=1}^{r} y_i^m \right| \tag{4,6}$$

D'altra parte se è, invece,

$$z \in \prod_{i=1}^{r} y_i ,$$

allora per la (4,3), si ha che

$$\prod_{i=1}^{r+1} y_i^m \not\subset \prod_{i=1}^{r} y_i^m ,$$

e quindi, per la (4,5), la (4,6) è valida anche in questo caso.

Può dirsi dunque, in definitiva, che

$$\forall r \in N : \quad \prod_{i=1}^{r} y_i^m \neq H, \qquad \left| \prod_{i=1}^{r+1} y_i^m \right| > \left| \prod_{i=1}^{r} y_i^m \right| ,$$

e quindi

$$\forall r \in N , \qquad \left| \prod_{i=1}^{r} y_i^m \right| \geq r.$$

Da ciò segue, per la (4,4), che

$$\left| \prod_{i=1}^{t_1} x_i \right| = |H| \ ,$$

e quindi

$$\prod_{i=1}^{t_1} x_i = H.$$

(c.d.d.)

Teorema 4.2. *Se H è un ipergruppo commutativo finito e se* ω_H *è n-completo, allora esiste* $m \in N_m$ *tale che H è m-completo.*

Dimostrazione. $\forall x \in H$, sia t_x l'ordine di $\beta^*(x) \in H/_{\beta^*}$. Si ha evedentemente che

$$\forall x \in H, \qquad (\beta^*(x))^{t_x} = \omega_H ,$$

e quindi

(4,7) $\qquad \forall x \in H,$

Se $t_o = \max \{t_x : x \in H\}$, ed $M = t_o.(|H| + n)$, procedendo come nella dimostrazione del teorema precedente, si trova che

$$\forall (x_1, ..., x_m) \in H^M, \qquad \prod_{i=1}^{M} x_i = \prod_{i=1}^{n} y_i^{t_{y_i}} A, \quad A \subset H,$$

e quindi, per la (4,7),

$$\forall (x_1, ..., x_m) \in H^M, \qquad \prod_{i=1}^{m} x_i \supset \prod_{i=1}^{n} u_i \circ A, (u_i \in \omega_H , \ \forall i = 1,..., n).$$

Essendo ω_H n-completo, ed essendo ω_H o A = $\mathscr{C}$(A), segue che

$$\prod_{i=1}^{M} x_i \supset \mathscr{C}(A).$$

Ma $\mathscr{C}$(A) è parte completa di H ; quindi

$$\prod_{i=1}^{M} x_i \subset \mathscr{C}(A),$$

e, conseguentemente,

$$\prod_{i=1}^{M} x_i = \mathscr{C}(A) = \mathscr{C}\left(\prod_{i=1}^{M} x_i\right) .$$

(c.d.d.)

Dai teoremi 4.1 e 4.2 segue immediatamente il

Corollario 4.1. *Se H è un ipergruppo commutativo finito ed ω_H è t.r., allora condizione necessaria e sufficiente affinchè $\exists\, m \in N_2$: H è m-completo, è che*

$$\forall K \subset \omega_H,\ \forall x \in K,\ K \neq \omega_H \Longrightarrow K \circ x \not\subset K. \tag{4,8}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] P. CORSINI, *Hypergroupes réguliers et hypermodules,* Ann. Univ. Ferrara, XX, 121-135, (1975).

[2] P. CORSINI, *Sur les semi-hypergroupes,* Atti Soc. Peloritana Sc. Mat. Fis. Nat. (1979).

[3] P. CORSINI, *Ipergruppi Semiregolari e Regolari,* Rend. Sem. Mat. Università Torino, (1982).

[4] P. CORSINI, G. ROMEO, *Hypergroupes Complets et Groupoides,* Atti del Congegno su Sistemi Binari e loro Applicazioni, Taormina (1978).

[5] M. KOSKAS, *Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes,* J. Math. Pures et Appl., 49, (1970).

[6] R. MIGLIORATO, *Una classe di semi-ipergruppi e di ipergruppi,* Atti Sem. Mat, . Fis. Univ. Modena, XXXI, 123-141, (1982).

[7] R. MIGLIORATO, *Ipergruppi totalmente regolari,* Atti Sem Mat. Fis. Univ. Modena, XXXII, (1983).

Université de Clermont II, U.E.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 - Aubière, France.