

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

P. BERNARD

M. FOGLI

**Un calcul probabiliste en génie civil. Évaluation de la probabilité
de ruine des structures par une méthode de Monte-Carlo fondée
sur une technique de conditionnement**

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 89, série *Mathématiques*, n° 23 (1986), p. 47-90

http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1986__89_23_47_0

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UN CALCUL PROBABILISTE EN GENIE CIVIL

**Evaluation de la probabilité de ruine des structures
par une méthode de Monte-Carlo fondée sur une
technique de conditionnement**

P. BERNARD* et M. FOGLI**

(*) Maître de Conférences au Département de Mathématiques Appliquées de l'Université de Clermont II.

() Docteur ingénieur, membre du Groupe de Recherche Génie Civil de l'Université de Clermont II.**

I - Introduction.

L'évaluation de la probabilité de ruine est une étape fondamentale de l'analyse de la sécurité des structures en contexte aléatoire. Malheureusement, dans la pratique, la complexité de la formulation mécanique des états limites et la dimension des problèmes sont telles qu'il est généralement impossible de calculer cette probabilité, même à l'aide des plus performantes des méthodes d'intégration numériques. C'est la raison pour laquelle, depuis une trentaine d'années, de nombreux travaux ont été menés sur ce sujet, visant essentiellement au développement de formules approchées directement utilisables par le praticien. Parmi ces travaux, il convient de citer en particulier ceux de A.M. Freudenthal [1, 2] J.M. Garrelts [2] , C.A. Cornell [3,4,5,6] , A.H.S. Ang [5] , B. Ellingwood [6] , T.V. Galambos [6] , J.G. Mac Gregor [6] , B. Fiessler [7] , H.J. Neumann [7] , R. Rackwitz [7,8,9] , M. Ioerichler [9] , A.M. Hasofer [10] , E. Paloheimo [11, 12] , M. Hannüs [12] , D. Veneziano [13] , D. Ditlevsen [14, 15, 16] M. Shinozuka [17] , K. Breitung [18] . Cependant, pour certains exemples de référence, il peut s'avérer nécessaire de connaître la valeur exacte de la probabilité de ruine, ne serait-ce que pour calibrer les méthodes approchées. Dans ce cas, la seule possibilité est l'utilisation d'une méthode de Monte-Carlo. Mais, comme le souligne si justement M. Shinozuka dans [18] , encore faut-il que cette méthode soit employée avec discernement et qu'elle soit bien appropriée au problème à résoudre. La méthode proposée dans ce papier a été conçue pour satisfaire à cette exigence. Mais, avant d'aborder cette question, posons clairement le problème. La probabilité de ruine d'une structure, ou d'un élément de structure, s'exprime généralement sous la forme d'une intégrale multiple qu'il est toujours possible, à l'aide de certaines transformations analytiques et sous couvert de quelques hypothèses, de ramener à la forme standard :

$$P_f = P(Y \in \underline{\Delta}) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\underline{\Delta}}(y) p(y) dy \quad (1)$$

où :

$Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ est un vecteur aléatoire distribué suivant la loi normale réduite n-dimensionnelle, c'est-à-dire un vecteur aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n , gaussien, centré et ayant pour matrice des covariances la matrice unité de dimension n ;

p est la densité de ce vecteur, autrement dit la fonction définie par :

$$p(y) = (2\pi)^{-n/2} \exp(- \|y\|^2/2) \quad (2)$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$dy = dy_1 \dots dy_n$$

$I_A(y)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A (i.e. la fonction égale à 1 si $y \in A$ et égale à 0 si $y \notin A$).

$\underline{\Delta}$ est une partie borélienne de \mathbf{R}^n ne contenant pas l'origine et définie par :

$$\underline{\Delta} = \{ y \in \mathbf{R}^n : \Gamma(y) < 0 \} \quad (3)$$

où Γ est une application mesurable de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} .

Dans de nombreuses applications pratiques la situation est la suivante : la dimension n de l'intégrale (1) est supérieure à 3 ; l'application Γ est non linéaire et ne peut être définie explicitement. La conséquence immédiate de cette situation est l'impossibilité pour calculer l'intégrale (1) d'utiliser les techniques classiques de quadrature numérique qui nécessiteraient, pour donner une précision acceptable, un volume de calculs par trop irréaliste. La seule possibilité dans ce cas est alors de recourir à une stratégie de type de Monte-Carlo dont le principe consiste à substituer au problème purement déterministe du calcul de l'intégrale celui de l'estimation de l'espérance mathématique d'une certaine variable aléatoire convenablement choisie. Toutefois, pour fournir des résultats satisfaisants, les méthodes de Monte-Carlo exigent que la valeur de l'intégrale à calculer ne soit pas trop petite. Or, précisément ici, l'ordre de grandeur de l'intégrale est $10^{-3} - 10^{-7}$. Il nous a donc paru intéressant de chercher à développer une méthode de Monte-Carlo adaptée à cette situation. C'est le fruit de cette étude que nous exposons dans ce papier.

Du point de vue organisation, il comprend quatre parties.

Dans une première partie, on rappelle le processus permettant d'obtenir la forme standard (1) de la probabilité de ruine à partir de sa formulation usuelle.

Les trois principales méthodes de Monte-Carlo actuellement utilisées pour le calcul de la probabilité de ruine sont ensuite rappelées dans une deuxième partie.

La troisième partie est alors consacrée à l'exposé d'une méthode de Monte-Carlo originale mise au point par les auteurs.

Enfin, dans une quatrième partie, quelques applications numériques permettent de montrer l'intérêt pratique de cette méthode.

II - Mise sous forme standard de la probabilité de ruine.

En contexte aléatoire statique, la donnée de base de toute étude visant l'évaluation de la probabilité de ruine d'une structure est un triplet (X, P_X, G) formé du vecteur $X = (X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires de base de l'étude, de sa loi P_X , et de la fonction d'état limite $G : \mathcal{D}_G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ exprimant le critère de ruine retenu pour la structure.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- la loi P_X du vecteur aléatoire X est non dégénérée et admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n ;
 - l'application $G : \mathcal{D}_G \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable ;
- alors la probabilité de ruine est définie par :

$$p_f = P(X \in \underline{D}) = P_X(\underline{D}) = \int_{\mathbb{R}^n} I_{\underline{D}}(x) f(x) dx \quad (4)$$

où \underline{D} est le domaine de ruine, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $dx = dx_1 \dots dx_n$.

Par définition même de G , \underline{D} est défini par :

$$\underline{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : G(x) < 0\} \quad (5)$$

et les ensembles boréliens :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n : G(x) \geq 0\} = \mathbb{R}^n \setminus \underline{D} \quad (6)$$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : G(x) = 0\} \quad (7)$$

sont respectivement le domaine de sécurité et la surface d'état limite de la structure (fig. 1)

L'expression (4) représente la formulation initiale de la probabilité de ruine.

Désignons à présent par $H_1(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi de X_1 , par $H_k(\cdot/x_1, \dots, x_{k-1})$ celle de la loi conditionnelle de X_k quand $X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}$ et considérons la suite finie formée de $H_1(\cdot)$ et des $(n-1)$ fonctions $H_k(\cdot/x_1, \dots, x_{k-1})$ ($k = 2, \dots, n$). D'après les hypothèses sur X , on sait que toutes ces fonctions de répartition sont continues. Supposons en outre qu'elles soient strictement croissantes (hypothèse, en pratique, toujours vérifiée) et notons $\mathcal{D}_X \subseteq \mathbb{R}^n$ le support de la densité f . Dans ces conditions, on peut montrer [9, 17] qu'il existe un difféomorphisme $\varphi : \mathcal{D}_X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que le vecteur aléatoire

$Y = \varphi \circ X$ soit distribué suivant la loi normale réduite de dimension n . Inversement, $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{D}_X$ désignant l'inverse de φ , si Z est un vecteur gaussien réduit à valeurs dans \mathbb{R}^n , alors le vecteur aléatoire $\varphi^{-1} \circ Z$ est isonome au vecteur aléatoire X .

Supposons donc déterminée la transformation φ et notons $\underline{\Delta}$, Δ , Σ les images respectives par cette transformation des ensembles \underline{D} , D et S . Ce sont les boréliens définis par :

$$\underline{\Delta} = \varphi(\underline{D}) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \Gamma(y) < 0 \} \quad (8)$$

$$\Delta = \varphi(D) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \Gamma(y) \geq 0 \} \quad (9)$$

$$\Sigma = \varphi(S) = \{ y \in \mathbb{R}^n : \Gamma(y) = 0 \} \quad (10)$$

avec :

$$\Gamma = G \circ \varphi^{-1} \quad (11)$$

Soit alors le changement de variables :

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (12)$$

Compte tenu de ce changement de variables (4) s'écrit :

$$p_f = \int_{\mathbb{R}^n} \underline{I}_{\underline{\Delta}}(y) (f \circ \varphi^{-1})(y) |\det[J(y)]| dy \quad (13)$$

où $[J(y)]$ est la matrice jacobienne de la transformation inverse φ^{-1} :

$$[J(y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial y_n}(y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n^{-1}}{\partial y_1}(y) & \dots & \frac{\partial \varphi_n^{-1}}{\partial y_n}(y) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Or, l'expression $|\det[J(y)]| (f \circ \varphi^{-1})(y)$ représente précisément la densité $p(y)$ du vecteur aléatoire $Y = \varphi \circ X$ qui, par construction, est gaussien réduit à valeurs dans \mathbb{R}^n . L'intégrale (13) s'écrit donc :

$$P_f = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\underline{\Delta}}(y) p(y) dy \quad (15)$$

avec :

$$p(y) = |\det [J(y)]| (f \circ \varphi^{-1})(y) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-\|y\|^2/2) \quad (16)$$

C'est bien la forme standard cherchée.

La mise sous forme standard du problème peut donc se résumer à deux grandes étapes.

Le couple (f, G) étant donné, elle nécessite en effet :

- 1) de définir la transformation φ et son inverse φ^{-1} ;
- 2) d'expliciter la fonction $\Gamma = G \circ \varphi^{-1}$.

Une fois connue cette fonction, le domaine d'intégration $\underline{\Delta}$ est parfaitement défini et donc aussi la forme standard de la probabilité de ruine.

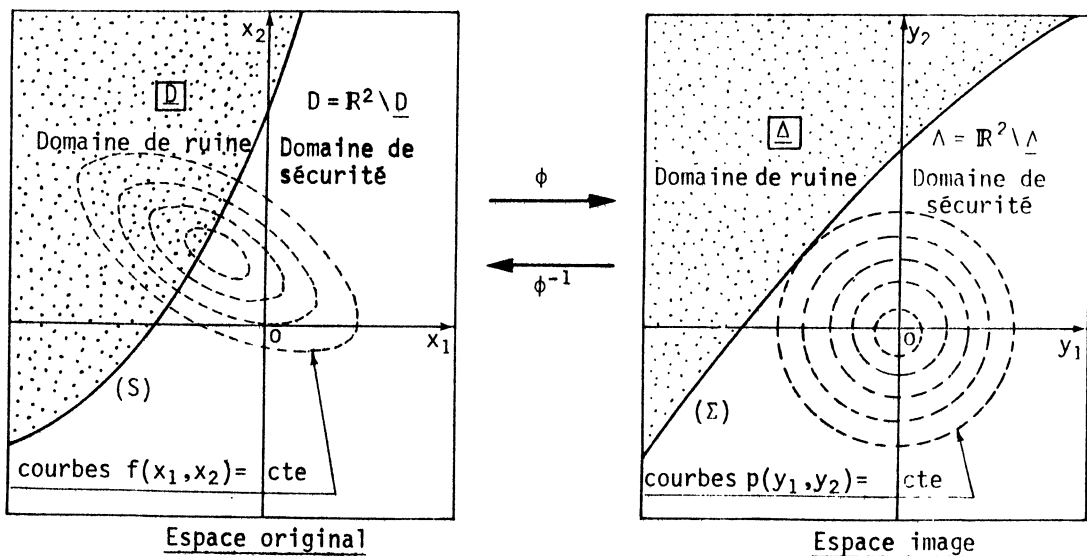


Figure 1. Représentation graphique de la transformation ϕ dans le cas où $n = 2$

III - Les méthodes de Monte-Carlo classiques pour le calcul de la probabilité de ruine.

Il n'est pas dans l'intention des auteurs de donner dans ce paragraphe une liste exhaustive de toutes les méthodes de Monte-Carlo utilisables pour le calcul de l'intégrale (1). Leur prétention se borne essentiellement au rappel des trois méthodes les plus usuelles.

Méthode 1. C'est la méthode la plus classique. Elle consiste à considérer (1) comme l'espérance mathématique de la variable aléatoire $I_{\underline{\Delta}}(Y)$ où $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ est un vecteur aléatoire ayant pour densité p , c'est-à-dire un vecteur aléatoire gaussien réduit à valeurs dans \mathbb{R}^n . L'estimateur naturel de cette probabilité est donc la moyenne d'échantillonnage (ou empirique) de la variable $I_{\underline{\Delta}}(Y)$, c'est-à-dire l'estimateur consistant et sans biais défini par :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I_{\underline{\Delta}}(Y^i)$$

où $\{Y^i, i = 1, \dots, m\}$ est un m -échantillon de copies indépendantes du vecteur aléatoire Y .

Une estimée de p_f sera donc :

$$\bar{P}_f = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m I_{\underline{\Delta}}(y^i)$$

où $\{y^i, i = 1, \dots, m\}$ est une m -suite de réalisations indépendantes du vecteur aléatoire Y .

Cependant, il est bien connu que cette méthode n'est pas efficace. Elle nécessite en effet pour fournir des résultats satisfaisants des échantillons de très grande taille de vecteurs gaussiens réduits dont on sait que les procédures de simulation sont coûteuses en temps calcul.

Méthode 2. Soit h une densité de probabilité arbitraire ne s'annulant pas dans $\underline{\Delta}$. Alors l'intégrale (1) peut être écrite sous la forme :

$$p_f = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{I_{\underline{\Delta}}(y)p(y)}{h(y)} h(y) dy \quad (19)$$

Ainsi écrite, elle représente l'espérance mathématique de la variable aléatoire

$\xi(Y) = I_{\underline{\Delta}}(Y)p(Y)/h(Y)$ où $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ est un vecteur aléatoire ayant pour

densité h . En utilisant la moyenne d'échantillonnage comme estimateur de l'espérance

mathématique, une estimée de p_f sera alors :

$$\bar{p}_f = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi(y^i) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1_{\underline{\Delta}}(y^i)p(y^i)}{h(y^i)} = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1_{\underline{\Delta}}(y^i)}{h(y^i)} \exp\left(-\frac{\|y^i\|^2}{2}\right) \quad (20)$$

où $\{y^i ; i = 1, \dots, m\}$ est une m -suite de réalisations indépendantes du vecteur aléatoire Y .

L'efficacité de cette méthode dépend en grande partie du choix de la densité h . Or ce choix n'est pas évident. Une solution intéressante consiste à choisir un point dans $\underline{\Delta}$ et à prendre pour h la densité d'une loi normale n -dimensionnelle centrée en ce point. Mais le problème se pose alors du choix de ce point et de celui de la matrice des covariances de la loi gaussienne. L'emploi de cette méthode exige donc de procéder à des essais (liés à divers choix de la densité h) afin de s'assurer de la qualité des résultats.

Il convient de remarquer que si l'on prend pour h la densité de la loi normale réduite n -dimensionnelle (i.e. si $h = p$) alors on se ramène à la méthode précédente, ce qui évidemment n'est pas la meilleure solution.

Méthode 3. Cette méthode nécessite que l'ensemble $\underline{\Delta}$ soit borné. Il peut donc être inclus dans un pavé Π de côtés parallèles aux axes de coordonnées, et en notant $V(\Pi)$ le volume de ce pavé l'intégrale (1) peut être écrite sous la forme :

$$p_f = \int_{\Pi} 1_{\underline{\Delta}}(y)p(y)V(\Pi) \frac{1}{V(\Pi)} dy \quad (21)$$

Sous cette forme, elle apparaît alors comme l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\Psi(Y) = 1_{\underline{\Delta}}(Y)p(Y)V(\Pi)$ où $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ est un vecteur aléatoire uniformément distribué dans Π . En utilisant comme précédemment la moyenne d'échantillonnage comme estimateur de l'espérance mathématique, une estimée de p_f sera donc :

$$\bar{p}_f = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Psi(y^i) = \frac{V(\Pi)}{m} \sum_{i=1}^m 1_{\underline{\Delta}}(y^i)p(y^i) = \frac{(2\pi)^{-n/2}V(\Pi)}{m} \sum_{i=1}^m 1_{\underline{\Delta}}(y^i) \exp\left(-\frac{\|y^i\|^2}{2}\right) \quad (22)$$

où $\{y^i ; i = 1, \dots, m\}$ est une m -suite de réalisations indépendantes du vecteur aléatoire Y .

Si le domaine $\underline{\Delta}$ n'est pas borné, ce qui est généralement le cas, cette méthode peut encore être utilisée (voir par exemple l'article [17] de M. Shinozuka). Mais dans ce cas le pavé Π

doit être choisi de manière à couvrir une partie suffisamment grande et significative de Δ . Le problème réside alors dans le choix de ce pavé, duquel dépend directement l'efficacité de la méthode, et comme une représentation graphique du domaine Δ est généralement impossible (dès que $n > 3$) ce choix est nécessairement arbitraire. L'emploi de cette méthode lorsque Δ n'est pas borné exige donc une certaine prudence. En particulier, il est recommandé de procéder à un certain nombre d'essais (liés à divers choix du pavé Π) afin de tester la validité des résultats.

A titre de conclusion, il convient de noter que la caractéristique commune des deux dernières méthodes est que leur utilisation repose sur un certain nombre de choix, plus ou moins arbitraires, dont la validité doit être testée à l'aide d'essais. Leur emploi peut donc, dans certains cas, s'avérer long et coûteux. Quant à la première méthode, il est clair qu'elle est mal adaptée à ce type de calcul.

IV - Une nouvelle méthode de Monte-Carlo pour le calcul de la probabilité de ruine.

Principe de la méthode. L'idée de la méthode est la suivante. Soit A un borélien de \mathbb{R}^n contenant $\underline{\Delta}$. La probabilité de ruine peut s'écrire :

$$p_f = P(Y \in \underline{\Delta}) = P(Y \in \underline{\Delta} / Y \in A)P(Y \in A) \quad (23)$$

Donc, si p_f est de l'ordre de grandeur de $10^{-\alpha}$ ($\alpha \in \mathbb{N}^*$) et $P(Y \in A)$ de l'ordre de grandeur de $10^{-\beta}$ ($\beta \in \mathbb{N}^*$, $\beta < \alpha$) la probabilité conditionnelle $P(Y \in \underline{\Delta} / Y \in A)$ sera de l'ordre de grandeur de $10^{-(\alpha-\beta)}$.

Supposons que l'ensemble A soit choisi de telle sorte que $P(Y \in A)$ soit calculable analytiquement, et que $P(Y \in \underline{\Delta} / Y \in A)$ soit calculable par une méthode de Monte-Carlo efficace. La probabilité $P(Y \in \underline{\Delta} / Y \in A)$ étant de plusieurs ordres de grandeur supérieure à p_f il en résultera alors un gain important de performance par rapport à un calcul de Monte-Carlo direct.

La méthode proposée consistera donc à décomposer p_f en un produit de deux facteurs dont l'un sera calculé par une formule analytique, et l'autre, en général beaucoup plus grand que p_f , par une méthode de Monte-Carlo appropriée. Elle comprend deux étapes fondamentales : le choix d'un ensemble A possédant les propriétés requises et la construction d'un algorithme de type Monte-Carlo adapté au calcul de la probabilité conditionnelle $P(Y \in \underline{\Delta} / Y \in A)$.

Résultats préliminaires. 1 - Soit M un point aléatoire de coordonnées (Z_1, \dots, Z_n) dans un espace affine \mathcal{E} de dimension n muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} , d'origine notée O . Soit (R, D) le système de coordonnées sphériques de M ($R = \|\overrightarrow{OM}\|$, $D = \overrightarrow{OM} / \|\overrightarrow{OM}\|$).

Alors, le point M suit la loi normale réduite de dimension n si et seulement si : R suit la loi de Rayleigh généralisée d'ordre n , D suit la loi uniforme sur la sphère unité de \mathcal{E} , les éléments aléatoires R et D sont indépendants.

Le résultat suivant en découle par un simple calcul (voir annexe I).

Soit $B_n^c(r_0)$ l'extérieur de la boule $B_n(r_0) \subset \mathcal{E}$ centrée à l'origine et de rayon r_0 .

Alors le point M suit la loi normale réduite n -dimensionnelle conditionnée par l'appartenance à $B_n^c(r_0)$ si et seulement si : R suit la loi de Rayleigh généralisée d'ordre n conditionnée par l'événement $\{R > r_0\}$, D suit la loi uniforme sur la sphère unité de \mathcal{E} , R et D sont

indépendants.

2 - La densité g_n et la fonction de répartition G_n de la loi de Rayleigh généralisée d'ordre n sont définies par :

$$g_n(x) = \frac{x^{n-1} e^{-x^2/2}}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\frac{n}{2})} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x) \quad n \geq 1 \quad (24)$$

$$G_n(x) = \int_{-\infty}^x g_n(v) dv = (1 - H_n(x)) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x) \quad (25)$$

où Γ est la fonction eulérienne :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} u^{z-1} e^{-u} du, z > 0 \quad (26)$$

et H_n la fonction définie par :

$$H_n(x) = \begin{cases} 2 \phi(-x) & \text{si } n = 1 \\ \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{\pi/2}} \sum_{k=2}^{(n+1)/2} \frac{2^{k-2} (k-2)!}{(2k-3)!} \frac{x^{2k-3}}{(2k-3)!} + 2 \phi(-x) & \text{si } n \text{ impair } \geq 3 \\ e^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{(n-2)/2} \frac{x^{2k}}{2^k k!} & \text{si } n \text{ pair } \geq 2 \end{cases} \quad (27)$$

ϕ désignant la fonction de répartition de la loi normale réduite sur \mathbf{R} :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad (28)$$

3 - Soit R une variable aléatoire distribuée suivant la loi de Rayleigh généralisée d'ordre n conditionnée par l'événement $\{R > r_0, r_0 \geq 0\}$. Alors, elle admet respectivement pour fonction de répartition et pour densité :

$$G_n^{r_0}(x) = P(R < x | R > r_0) = \frac{P(r_0 < R < x)}{P(R > r_0)} = \frac{G_n(x) - G_n(r_0)}{1 - G_n(r_0)} \mathbf{1}_{[r_0, +\infty[}(x) \quad (29)$$

$$g_n^{r_0}(x) = \frac{dG_n^{r_0}}{dx}(x) = \frac{g_n(x)}{1 - G_n(r_0)} \mathbf{1}_{[r_0, +\infty[}(x)$$

avec $g_n(x)$ et $G_n(x)$ donnés par (24) et (25).

4 - La mesure gaussienne réduite de l'extérieur $B_n^c(r_0)$ de la boule

$B_n(r_0)$ de \mathbf{R}^n centrée à l'origine et de rayon r_0 est donnée par :

$$\mu_n [B_n^c(r_0)] = 1 - (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_{B_n(r_0)}(y) \exp\left(-\frac{\|y\|^2}{2}\right) dy = H_n(r_0) \quad (31)$$

où H_n est la fonction définie par (27).

5 - Soit S une variable aléatoire distribuée suivant la loi de Rayleigh généralisée d'ordre pair $n = 2q$ ($q \in \mathbf{N}^*$) et $\{U_j ; j = 1, \dots, q\}$ une q -suite de variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur $]0,1[$. Alors, on a l'égalité en loi :

$$S = \left[-2 \operatorname{Log} \left(\prod_{j=1}^q U_j \right) \right]$$

6 - Soit $\{U_j ; j = 1, \dots, 2q\}$ une $2q$ -suite de variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur $]0,1[$ et $D = (D_1, \dots, D_{2q})$ un vecteur aléatoire défini par :

$$\left. \begin{aligned} D_{2k-1} &= \left[\operatorname{Log} U_{2k-1} / \operatorname{Log} \left(\prod_{j=1}^q U_{2j-1} \right) \right]^{1/2} \cos 2\pi U_{2k} \\ D_{2k} &= \left[\operatorname{Log} U_{2k-1} / \operatorname{Log} \left(\prod_{j=1}^q U_{2j-1} \right) \right]^{1/2} \sin 2\pi U_{2k} \end{aligned} \right\} k = 1, \dots, q \quad (33)$$

Alors ce vecteur est uniformément distribué sur la sphère unité de \mathbf{R}^{2q} .

Développement de la méthode. Soit donc à calculer la probabilité $p_f = P(Y \in \underline{\Delta})$ avec Y gaussien réduit à valeurs dans \mathbf{R}^n et $\underline{\Delta}$ défini par $\underline{\Delta} = \{y \in \mathbf{R}^n : \Gamma(y) < 0\}$ où Γ est une application mesurable de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} .

Soit $\beta = d(0, \underline{\Delta})$ la distance euclidienne de l'origine à $\underline{\Delta}$ et $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$

un point de $\underline{\Delta}$ tel que $\|y^*\| = \beta$. Ce point est nécessairement situé sur la frontière Σ de $\underline{\Delta}$ et, généralement, il est unique (fig. 2).

La distance β représente l'indice de sécurité de Hasofer-Lind et le point y^* est appelé dans la littérature spécialisée the checking (ou design) point [10, 17].

Dans la stratégie de la vérification des ouvrages, la recherche de ce point représente une étape importante. Elle constituera pour nous l'étape initiale de la méthode. Elle conduit au problème d'optimisation non linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser la fonction objective : } s(y) = \|y\| \\ \text{sous la contrainte : } \Gamma(y) = 0 ; y \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

dont la résolution peut être envisagée sous deux angles :

- soit en utilisant des méthodes classiques d'optimisation non linéaire [21] ; mais il est bien connu que pour être performantes ces méthodes exigent que la fonction Γ satisfasse certaines hypothèses de différentiabilité et de convexité ;
- soit en ayant recours à des méthodes d'optimisation à stratégie aléatoire [22] qui ne nécessitent aucune propriété particulière de la fonction Γ , si ce n'est qu'elle soit mesurable, ce qui est le cas.

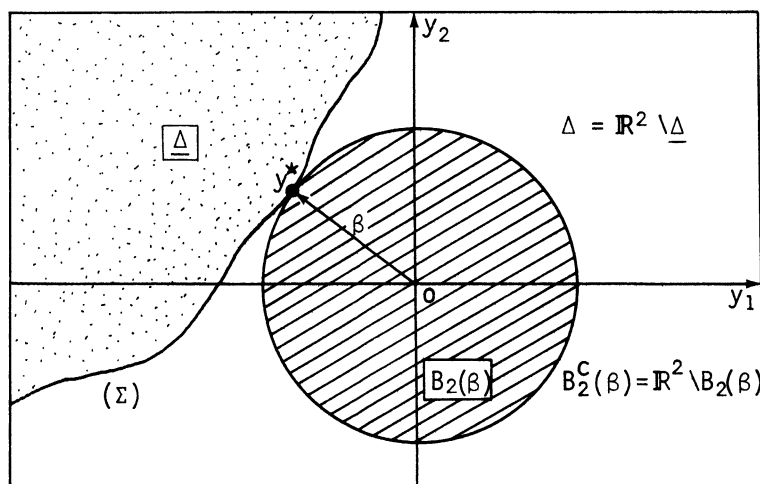


Figure 2. Représentation graphique dans \mathbb{R}^2 de $\underline{\Delta}$, Δ , Σ , β , $B_2(\beta)$ et $B_2^C(\beta)$

Soit alors $B_n(\beta) = \{y \in \mathbf{R}^n : \|y\| \leq \beta\}$ la boule centrée en 0 de rayon β
 et $B_n^c(\beta) = \mathbf{R}^n \setminus B_n(\beta) = \{y \in \mathbf{R}^n : \|y\| > \beta\}$ son extérieur dans \mathbf{R}^n .

Le borélien $\underline{\Delta}$ étant inclus dans $B_n^c(\beta)$ la probabilité de ruine peut s'écrire :

$$p_f = P(Y \in \underline{\Delta}) = P[Y \in \underline{\Delta} / Y \in B_n^c(\beta)] \cdot P[Y \in B_n^c(\beta)] \quad (34)$$

La probabilité $p_2 = P[Y \in B_n^c(\beta)]$ est la mesure gaussienne réduite du borélien $B_n^c(\beta)$.

D'après le résultat 4, elle est donnée par :

$$p_2 = P[Y \in B_n^c(\beta)] = \mu_n[B_n^c(\beta)] = H_n(\beta) \quad (35)$$

où H_n est la fonction définie par (27).

Le second facteur de la décomposition (34) peut donc se calculer à l'aide d'une formule analytique. Pour le calcul du premier facteur $p_1 = P[Y \in \underline{\Delta} / Y \in B_n^c(\beta)]$ une méthode de

Monte-Carlo conditionnelle est utilisée. Le principe de cette méthode est le suivant.

Tout d'abord, il convient de remarquer que la probabilité p_1 représente l'espérance mathématique de la variable aléatoire $1_{\underline{\Delta}}(Z)$ où Z est un vecteur aléatoire distribué suivant la loi normale réduite n -dimensionnelle conditionnée par l'événement $\{Z \in B_n^c(\beta)\}$:

$$p_1 = P[Y \in \underline{\Delta} / Y \in B_n^c(\beta)] = E[1_{\underline{\Delta}}(Z)] \quad (36)$$

Par conséquent, l'estimateur naturel de cette probabilité est la moyenne empirique de la variable $1_{\underline{\Delta}}(Z)$:

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{\underline{\Delta}}(Z^i) \quad (37)$$

où $\{Z^i ; i = 1, \dots, m\}$ est un m -échantillon de copies indépendantes du vecteur aléatoire Z .

Une estimée de p_1 sera donc :

$$\bar{p}_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m 1_{\underline{\Delta}}(z^i) \quad (38)$$

où $\{z^i ; i = 1, \dots, m\}$ est une suite de m réalisations indépendantes du vecteur aléatoire Z . On notera z_m cette suite. Pour construire une telle suite on utilise le résultat 1. D'après ce

résultat la loi du vecteur Z est le produit de la loi uniforme sur la sphère unité de \mathbf{R}^n et de la loi de Rayleigh généralisée d'ordre n conditionnée par l'appartenance à l'intervalle $]\beta, +\infty[$.
Il en résulte la procédure de calcul suivante :

- 1 - Construction d'une suite $d_m = \{d^i; i = 1, \dots, m\}$ de m réalisations indépendantes d'un vecteur aléatoire D uniformément distribué sur la sphère unité de \mathbf{R}^n .
- 2 - Construction d'une suite $r_m = \{r^i; i = 1, \dots, m\}$ de m réalisations indépendantes d'une variable aléatoire R distribuée suivant la loi de Rayleigh généralisée d'ordre n conditionnée par l'événement $\{R > \beta\}$
- 3 - Enfin, construction à partir de ces deux suites de la m -suite cherchée z_m des réalisations indépendantes du vecteur aléatoire $Z : z_m = \{z^i, i = 1, \dots, m\}$ avec $z^i = r^i d^i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

Remarque : Avant de donner les procédures de construction des suites d_m et r_m nous allons montrer qu'il est toujours possible de passer de la dimension impaire à la dimension paire sans modifier la structure de la méthode. Supposons pour cela le vecteur aléatoire $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ de dimension impaire (i.e. n impair). Soit alors $\tilde{Y} = (Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1})$ le vecteur aléatoire augmenté de dimension $n+1$ paire, où Y_{n+1} est une variable aléatoire indépendante de Y et distribuée suivant la loi normale réduite sur \mathbf{R} : Le vecteur \tilde{Y} suit donc la loi normale réduite de dimension paire $n+1$.

Considérons le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n+1} : \tilde{\Delta} = \underline{\Delta} \times \mathbf{R}$. La mesure gaussienne réduite de ce borélien vaut :

$$\mu_{n+1}(\tilde{\Delta}) = P(\tilde{Y} \in \tilde{\Delta}) = P(Y \in \underline{\Delta})P(Y_{n+1} \in \mathbf{R}) = P(Y \in \underline{\Delta}) = p_f \quad (39)$$

De plus on a :

$$d(0, \tilde{\Delta}) = d(0, \underline{\Delta}) = \beta \quad (40)$$

Soit alors $B_{n+1}^c(\beta)$ l'extérieur, dans \mathbf{R}^{n+1} , de la boule $B_{n+1}(\beta)$ centrée à l'origine et de rayon β . On a $\tilde{\Delta} \subset B_{n+1}^c(\beta)$ et on peut donc écrire :

$$p_f = P[\tilde{Y} \in \tilde{\Delta}] = P[\tilde{Y} \in \tilde{\Delta} / \tilde{Y} \in B_{n+1}^c(\beta)] P[\tilde{Y} \in B_{n+1}^c(\beta)] = \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2 \quad (41)$$

Cette formule est en tous points analogue à la formule (34).

Ceci montre que l'on peut toujours passer de la dimension impaire à la dimension paire sans modifier fondamentalement la méthode. Il suffit pour cela de remplacer le vecteur aléatoire Y par le vecteur aléatoire augmenté \tilde{Y} gaussien réduit à valeurs dans \mathbb{R}^{n+1} , l'ensemble $\underline{\Delta}$ par le cylindre $\tilde{\Delta} = \underline{\Delta} \times \mathbb{R}$ et enfin l'ensemble de conditionnement $B_n^c(\beta)$ par l'ensemble $B_{n+1}^c(\beta)$.

L'intérêt de pouvoir toujours se ramener à la dimension paire est que dans ce cas il est possible d'utiliser, comme nous allons le voir, des algorithmes de calcul particulièrement simples pour la génération des suites d_m et r_m .

Construction de la suite d_m .

Pour construire cette suite, on utilise le résultat 6 en supposant la dimension de l'espace paire : $n = 2q$ ($q \in \mathbb{N}^*$). Si tel n'est pas le cas, nous venons de voir qu'il était toujours possible de se ramener à cette situation. D'après ce résultat, la suite d_m peut être engendrée comme suit :

$$d_m = \{ d^i = (d_1^i, \dots, d_{2q}^i) ; i = 1, \dots, m \} \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{2k-1}^i &= [\text{Log } u_{2k-1}^i / \text{Log} \left(\prod_{j=1}^q u_{2j-1}^i \right)]^{1/2} \\ d_{2k-1}^i &= \rho_{2k-1}^i \cos 2\pi u_{2k}^i \\ d_{2k}^i &= \rho_{2k-1}^i \sin 2\pi u_{2k}^i \end{aligned} \right\} \quad k = 1, \dots, q ; i = 1, \dots, m \quad (43)$$

où $\{ u^i = (u_1^i, \dots, u_{2q}^i) ; i = 1, \dots, m \}$ est une suite de m réalisations indépendantes d'un vecteur aléatoire $U = (U_1, \dots, U_{2q})^T$ uniformément réparti dans l'hypercube unitaire $]0, 1[^{2q}$. Il existe dans la littérature [26,27] de nombreux procédés permettant de construire des suites de nombres sur $]0, 1[$ ayant asymptotiquement les propriétés d'équirépartition requises. Pour ce travail, nous avons utilisé un algorithme, dit des registres à décalages bouclés, dû à Payne et Lewis [23].

Construction de la suite r_m .

La procédure de génération de cette suite la plus directe consiste à inverser la fonction de répartition G_n^β de la loi conditionnelle de la variable aléatoire R. En effet, nous savons que si U est une variable aléatoire uniformément répartie sur $]0,1[$ et X une variable aléatoire dont la loi admet la fonction de répartition F, alors on a l'égalité en loi $X = F^{-1} \circ U$ où F^{-1} désigne l'inverse de F.

Selon cette technique, la suite r_m pourra donc être engendrée comme suit :

$$r_m = \{r^i ; i = 1, \dots, m \} \tag{44}$$

$$r^i = (G_n^\beta)^{-1}(u^i) \quad \forall i \in (1, \dots, m) \subset \mathbb{N} \tag{45}$$

où $\{u^i ; i = 1, \dots, m \}$ est une m-suite de réalisations indépendantes d'une variable aléatoire U uniformément répartie sur $]0,1[$.

Dans le cas particulier où $n = 2$, la fonction inverse $(G_n^\beta)^{-1}$ est définie par [c.f.(29)] :

$$(G_n^\beta)^{-1}(x) = (\beta^2 - 2 \text{Log}x)^{1/2}. \tag{46}$$

Toutefois, hormis ce cas particulier, la fonction $(G_n^\beta)^{-1}$ ne peut pas, dans le cas général, être définie analytiquement [c.f. (25),(27),(29)] et il est alors nécessaire de procéder numériquement. Pour cela la fonction G_n^β doit être tabulée dans l'ordinateur et son inverse calculé par interpolation (linéaire ou non). Mais, l'inconvénient d'un tel procédé est qu'il mobilise généralement une place mémoire conséquente. Afin de pallier cet inconvénient, une possibilité est de recourir à des techniques de rejection. Les auteurs proposent la méthode suivante.

Supposons d'abord la dimension de l'espace paire : $n = 2q$ ($q \in \mathbb{N}^*$) (on peut toujours se ramener à cette situation d'après la remarque précédente). Par ailleurs, nous savons, d'après le résultat 5, que si S est une variable aléatoire distribuée suivant la loi de Rayleigh

généralisée d'ordre pair $n = 2q$, alors elle est isonome à la variable aléatoire $[-2 \text{Log} (\prod_{j=1}^q U_j)]^{1/2}$

où $\{U_j ; j = 1, \dots, q \}$ est une q-suite de variables aléatoires indépendantes uniformément

réparties sur $]0,1[$. Soit alors $U = (U_1, \dots, U_q)$ un vecteur aléatoire uniformément

distribué dans l'hypercube unitaire $]0,1]^q$ et considérons le test : si $\prod_{j=1}^q U_j \leq e^{-\beta^2/2}$

on rejette le vecteur U , sinon on pose $R = [-2 \text{Log} (\prod_{j=1}^q U_j)]^{1/2}$. Il est alors facile de vérifier que la variable aléatoire R ainsi définie est distribuée suivant la loi de Rayleigh généralisée d'ordre $2q$ conditionnée par l'événement $\{R > \beta\}$. D'où la procédure de construction de la suite $r_m = \{r^i ; i = 1, \dots, m\}$:

Soit $u^i = (u_1^i, \dots, u_q^i)$ une réalisation d'un vecteur aléatoire U uniformément réparti dans l'hypercube unitaire $]0,1[{}^q$. On calcule $x^i = \prod_{j=1}^q u_j^i$ et on fait le test :

si $x^i \leq e^{-\beta^2/2}$ la réalisation u^i est rejetée

si $x^i > e^{-\beta^2/2}$ on pose $r^i = (-2 \text{Log } x^i)^{1/2}$.

On itère ensuite le procédé en tirant autant de réalisations u^i que nécessaire pour obtenir le nombre désiré m de réalisations r^i de la variable aléatoire R .

La probabilité de rejet vaut :

$$\text{Pr} = 1 - H_n(\beta). \quad (47)$$

Comme cette méthode ne nécessite que des opérations simples (des multiplications) pour les tests et que les logarithmes et les racines carrées ne sont calculés qu'en cas de succès (i.e. de non rejet), les temps de calcul sont généralement très acceptables. Il est clair cependant que si cette probabilité est trop proche de 1, il sera préférable de recourir à la méthode d'inversion numérique évoquée précédemment.

Limites de la méthode.

La méthode que nous venons d'exposer ne présente d'intérêt que dans la mesure où la probabilité pondératrice $p_2 = H_n(\beta)$ est suffisamment petite par rapport à 1. Dans ce cas, en effet, elle représentera un véritable gain par rapport aux méthodes de Monte-Carlo classiques. Or, $\forall \beta > 0, H_n(\beta) \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$. A titre d'illustration, nous donnons dans le tableau 1 ci-dessous quelques valeurs de la fonction $n \rightsquigarrow H_n(\beta)$ pour trois valeurs usuelles de β .

	$\beta = 3$	$\beta = 4$	$\beta = 5$
$n = 2$	0,011	$3,35 \cdot 10^{-4}$	$3,73 \cdot 10^{-6}$
$n = 4$	0,061	$3,02 \cdot 10^{-3}$	$5,03 \cdot 10^{-5}$
$n = 6$	0,174	$1,38 \cdot 10^{-2}$	$3,42 \cdot 10^{-4}$
$n = 8$	0,342	$4,24 \cdot 10^{-2}$	$1,56 \cdot 10^{-3}$
$n = 10$	0,532	$9,96 \cdot 10^{-2}$	$5,35 \cdot 10^{-3}$
$n = 12$	0,703	$1,91 \cdot 10^{-1}$	$1,48 \cdot 10^{-2}$

Tableau 1. Valeurs de $H_n(\beta)$ pour différentes valeurs du couple (n, β)

En fixant par exemple à 0,5 le seuil que ne doit pas dépasser $H_n(\beta)$ pour que la méthode reste performante nous voyons que, pour les valeurs courantes de β , cette limitation conduit à des valeurs de n très raisonnables.

Toutefois, lorsque le nombre de variables est tel que ce seuil de rentabilité est dépassé, il est préférable, de l'avis des auteurs, et dans la mesure où il est encore raisonnable de considérer un nombre de variables aussi important, de reconsidérer la formulation initiale du problème, afin de se ramener non pas à des lois gaussiennes réduites, mais à des lois uniformes sur le cube unité. Dans ce cas, la procédure de calcul est la suivante. Considérons la formulation initiale (4) de la probabilité de ruine.

$$p_f = P(X \in \underline{D}) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{\underline{D}}(x) f(x) dx \quad (48)$$

D'après un résultat connu [19] on sait qu'il existe un difféomorphisme η défini sur \mathcal{D}_x (support de f) à valeurs dans $]0,1[{}^n$ tel que le vecteur aléatoire $\eta \circ X$ soit uniformément réparti dans le cube unité de dimension n . Considérons alors dans (48) le changement de variables $u = \eta(x) \Leftrightarrow (u_1 = \eta_1(x), \dots, u_n = \eta_n(x))$. Compte tenu de cette transformation, il est facile de vérifier que (48) s'écrit :

$$p_f = P(U \in \underline{\Omega}) = \int_{]0,1[^n} \mathbf{1}_{\underline{\Omega}}(u) du \quad (49)$$

où $\underline{\Omega}$ est le borélien défini par :

$$\underline{\Omega} = \eta(\underline{D}) = \{u \in]0,1[^n : (G \circ \eta^{-1})(u) < 0\} \quad (50)$$

et $U = \eta \circ X$ un vecteur aléatoire uniformément réparti sur $]0,1[^n$

L'expression (49) représentant l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\mathbf{1}_{\underline{\Omega}}(U)$,

une estimée de p_f pourra alors être obtenue classiquement par :

$$\bar{p}_f = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\underline{\Omega}}(u^i) \quad (51)$$

où $\{u^i ; i = 1, \dots, m\}$ est une m -suite de réalisations indépendantes du vecteur aléatoire U .

Cette méthode est à rapprocher de la première des méthodes de Monte-Carlo classiques évoquées précédemment, mais contrairement à cette dernière, elle ne fait intervenir que des variables aléatoires uniformes sur $]0,1[$. D'où un gain appréciable de performance.

V - Applications numériques.

Pour les quatre applications présentées dans ce paragraphe, le calcul du checking point y^* a été effectué systématiquement à l'aide de deux algorithmes classiques : l'algorithme des lagrangiens augmentés [21] et l'algorithme de R. Rackwitz [8] .

Tous les algorithmes ont été écrits en langage Fortran et implantés sur un miniordinateur du type PDP 11-23⁺ .

Au niveau des temps calcul le CPU time n'a jamais excédé une quarantaine de secondes dans les cas les plus défavorables (pour l'application 4 avec $m = 10\ 000$ par exemple). Pour les trois premières applications le CPU time le plus important a été de l'ordre de la douzaine de secondes.

Application 1.

Données de l'exemple. Cette première application concerne une barre prismatique soumise à la traction simple. La limite élastique du matériau X_1 et la contrainte de traction X_2 sont les variables aléatoires de base de l'étude. Les hypothèses concernant ces deux variables sont les suivantes : X_1 est uniformément répartie sur l'intervalle $[a, b]$, X_2 suit une loi exponentielle de paramètre λ , X_1 et X_2 sont indépendantes. (f_1, F_1) désignant la densité et la fonction de répartition de la variable X_1 , (f_2, F_2) celles de la variable X_2 , ces différentes quantités sont définies par :

$$f_1(x_1) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x_1) \quad (52)$$

$$F_1(x_1) = \frac{x_1 - a}{b - a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x_1) + H(x_1 - b) \quad (53)$$

où H est la fonction de Heaveside définie par : $H(u) = 1$ si $u \geq 0$ et $H(u) = 0$ si $u < 0$

$$f_2(x_2) = \lambda e^{-\lambda x_2} \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x_2) ; \quad \lambda > 0 \quad (54)$$

$$F_2(x_2) = (1 - e^{-\lambda x_2}) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x_2) \quad (55)$$

Compte tenu de l'indépendance des variables X_1 et X_2 le vecteur aléatoire de base

$X = (X_1, X_2)$ admet la densité :

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2) \quad (56)$$

Cette densité est portée par le sous-ensemble de \mathbf{R}^2 : $\mathcal{D}_x = [a, b] \times \mathbf{R}_+$

Le critère de ruine retenu est le dépassement de la limite élastique du matériau par la contrainte de traction. Par conséquent, la fonction d'état limite G est définie par :

$$G(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \quad (57)$$

D'où l'expression du domaine de ruine :

$$\underline{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : G(x_1, x_2) = x_1 - x_2 < 0\} \quad (58)$$

Les données numériques sont : $a = 10$ MPa, $b = 20$ MPa et pour le paramètre λ deux valeurs sont considérées : $\lambda = 0,5(\text{MPa})^{-1}$ et $\lambda = 1(\text{MPa})^{-1}$.

Mise sous forme standard du problème. Soit $\varphi : \mathcal{D}_x = [a, b] \times \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^2$ le difféomorphisme défini par :

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2) = \Phi^{-1}\left(\frac{x_1 - a}{b - a}\right) \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = \Phi^{-1}(1 - e^{-\lambda x_2}) \end{cases} \quad (59)$$

dont l'inverse est défini par :

$$x = \varphi^{-1}(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1^{-1}(y_1, y_2) = a + (b - a)\Phi(y_1) \\ x_2 = \varphi_2^{-1}(y_1, y_2) = -\frac{1}{\lambda} \text{Log } \Phi(-y_2) \end{cases} \quad (60)$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale réduite sur \mathbf{R} .

Il est alors facile de vérifier que le vecteur aléatoire $Y = \varphi \circ X$ est gaussien réduit à valeurs dans \mathbf{R}^2 .

La fonction Γ et le borélien $\underline{\Delta}$ sont alors définis par :

$$\Gamma(y_1, y_2) = (G \circ \varphi^{-1})(y_1, y_2) = (b - a)\Phi(y_1) + \frac{1}{\lambda} \text{Log } \Phi(-y_2) + a \quad (61)$$

$$\underline{\Delta} = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 : \Gamma(y_1, y_2) < 0\} \quad (62)$$

Ce domaine et sa frontière Σ sont représentés graphiquement sur la figure 3.

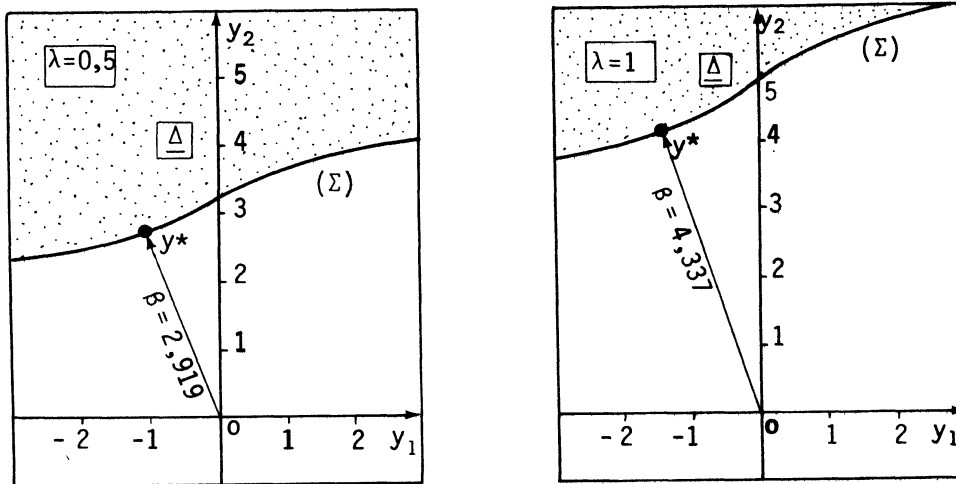


Figure 3. Représentation graphique de Δ et de sa frontière Σ pour $\lambda = 0,5$ et $\lambda = 1$

Résultats. Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau 2.

Notons que dans le cas de la dimension 2, les calculs se simplifient grandement. Ainsi la procédure de construction de l'échantillon z_m à partir duquel est estimée la probabilité conditionnelle $p_1 = P[Y \in \Delta / Y \in B_2(\beta)]$ se réduit simplement ici à :

$$z_m = \left\{ z^i = (z_1^i, z_2^i) \ ; \ i = 1, \dots, m \right\} \quad (63)$$

$$\left. \begin{aligned} z_1^i &= (\beta^2 - 2 \text{Log } u_1^i)^{1/2} \text{Cos } 2\pi u_2^i \\ z_2^i &= (\beta^2 - 2 \text{Log } u_1^i)^{1/2} \text{Sin } 2\pi u_2^i \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, m \quad (64)$$

où $\{u^i = (u_1^i, u_2^i) \ ; \ i = 1, \dots, m\}$ est une suite de m réalisations indépendantes

d'un vecteur aléatoire uniformément réparti sur $]0,1[{}^2$.

Ce résultat découle directement de (42), (43) et (46).

La probabilité p_1 a été estimée pour différents échantillons simulés z_m du vecteur aléatoire Z , leur taille variant de 500 à 10.000. Chaque estimée de p_1 est donnée dans le tableau 2 avec son intervalle de confiance au seuil de signification $\alpha = 95\%$ (I^+ et I^- désignant respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de cet intervalle).

La probabilité pondératrice p_2 vaut dans ce cas particulier (cf. (35) et (27) pour $n = 2$) :

$$p_2 = P[Y \in B_2^c(\beta)] = \mu_2[B_2^c(\beta)] = H_2(\beta) = e^{-\beta^2/2} \quad (65)$$

Notons que pour cet exemple simple, il est possible de calculer analytiquement la valeur exacte de la probabilité de ruine. Pour cela, il suffit de partir de la formulation initiale (4) de cette probabilité qui s'écrit, dans le cas où $n = 2$:

$$p_f = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\underline{D}(x_1, x_2)} dx_1 dx_2 \quad (66)$$

En explicitant il vient alors :

$$p_f = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2) F_1(x_2) dx_2 = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) F_2(x_1) dx_1 \quad (67)$$

Ces intégrales se calculent très simplement ici et on obtient, tous calculs faits :

$$p_f = \frac{e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}{\lambda(b-a)} \quad (68)$$

L'examen des résultats montre une très bonne coïncidence entre la solution exacte et la solution de Monte-Carlo, notamment lorsque la taille m des échantillons simulés z_m est supérieure à 500. L'erreur relative est en effet très inférieure à 1 % pour $m > 500$: elle varie de 0,2 % ($m = 1.000$) à 0,007 % ($m = 10.000$) pour $\lambda = 0,5$ et de 0,3 % ($m = 1.000$) à 0,08 % ($m = 10.000$) pour $\lambda = 1$.

Cet exemple fait également apparaître clairement l'intérêt de la méthode. En effet, alors que la probabilité de ruine vaut $1,3385 \cdot 10^{-3}$ pour $\lambda = 0,5$ la probabilité p_1 à estimer vaut 0,0948 soit un rapport $p_1/p_f = 1/H_2(\beta)$ de l'ordre de 71. Ce rapport est encore plus grand pour $\lambda = 1$ puisqu'il vaut environ 12.000.

	Checking point y^* et distance β		Taille m de l'échantillon z_m				p_f exact
			500	1.000	5.000	10.000	
$\lambda=0,5$	$y_1^* = -1,040$ $y_2^* = -2,727$	I^+	0,126	0,113	0,103	0,101	$1,3385 \cdot 10^{-3}$
		\bar{p}_1	<u>0,100</u>	<u>0,095</u>	<u>0,0944</u>	<u>0,0948</u>	
	I^-	0,078	0,077	0,086	0,089		
	p_2	<u>$1,4118 \cdot 10^{-2}$</u>					
	<u>$\beta = 2,919$</u>	$\bar{p}_f = \bar{p}_1 \cdot p_2$	<u>$1,4118 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$1,3412 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$1,3327 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$1,3384 \cdot 10^{-3}$</u>	
$\lambda = 1$	$y_1^* = -1,394$ $y_2^* = 4,107$	I^+	0,071	0,069	0,0615	0,0596	$4,5398 \cdot 10^{-6}$
		\bar{p}_1	<u>0,052</u>	<u>0,055</u>	<u>0,0552</u>	<u>0,0551</u>	
	I^-	0,033	0,041	0,0489	0,0506		
	p_2	<u>$8,2329 \cdot 10^{-5}$</u>					
	<u>$\beta = 4,337$</u>	$p_f = \bar{p}_1 \cdot p_2$	<u>$4,2811 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$4,5281 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$4,5446 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$4,5363 \cdot 10^{-6}$</u>	

Tableau 2 - Récapitulatif des résultats obtenus pour l'exemple 1.

Application 2.

Données de l'exemple. On considère le même exemple que précédemment, seules sont modifiées les lois des variables de base X_1 et X_2 . Les nouvelles hypothèses concernant ces deux variables sont les suivantes : X_1 suit une loi Log-normale de moyenne m_1 et de variance σ_1^2 , X_2 suit une loi normale de moyenne m_2 et de variance σ_2^2 , X_1 et X_2 sont indépendantes. En notant comme précédemment (f_1, F_1) la densité et la fonction de répartition de X_1 , (f_2, F_2) celles de X_2 , on a :

$$f_1(x_1) = \frac{1}{b_1 x_1} \phi' \left(\frac{\text{Log} x_1 - a_1}{b_1} \right) 1_{\mathbb{R}_+^*(x_1)} \tag{69}$$

$$F_1(x_1) = \Phi \left(\frac{\text{Log} x_1 - a_1}{b_1} \right) 1_{\mathbb{R}_+^*(x_1)} \tag{70}$$

$$a_1 = \text{Log} [m_1 / (1 + v_1^2)^{1/2}]; b_1 = [\text{Log}(1 + v_1^2)]^{1/2}; v_1 = \sigma_1 / m_1 \quad (71)$$

$$f_2(x_2) = \frac{1}{\sigma_2} \phi' \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right) \quad (72)$$

$$f_2(x_2) = \phi \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right) \quad (73)$$

X_1 et X_2 étant indépendantes, la densité du vecteur aléatoire de base $X = (X_1, X_2)$ a pour expression :

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) \quad (74)$$

Elle a pour support: $\mathcal{D}_X = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^2$

La fonction d'état limite G et le domaine de ruine \underline{D} sont définis comme précédemment (cf. (57) et (58)).

Les données numériques sont : $m_1 = 28$ MPa, $\sigma_1 = 1,4$ MPa, $m_2 = 22$ MPa,

$\sigma_2 = v_2 m_2$ où v_2 est le coefficient de variation de X_2 . Deux valeurs sont considérées pour ce coefficient : $v_2 = 0,070$ et $v_2 = 0,025$.

Mise sous forme standard du problème. La transformation à considérer ici est le difféomorphisme $\varphi : \mathcal{D}_X = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ défini par :

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2) = \frac{\text{Log } x_1 - a_1}{b_1} \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = \frac{x_2 - a_2}{b_2} \end{cases} \quad (75)$$

dont l'inverse $\varphi^{-1} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathcal{D}_X$ est défini par :

$$x = \varphi^{-1}(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1^{-1}(y_1, y_2) = \exp(a_1 + b_1 y_1) \\ x_2 = \varphi_2^{-1}(y_1, y_2) = m_2 + \sigma_2 y_2 \end{cases} \quad (76)$$

La fonction Γ et le borélien $\underline{\Delta}$ sont alors définis par :

$$\Gamma(y_1, y_2) = (G \circ \varphi^{-1})(y_1, y_2) = \exp(a_1 + b_1 y_1) - \sigma_2 y_2 - m_2 \quad (77)$$

$$\underline{\Delta} = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : \Gamma(y_1, y_2) = \exp(a_1 + b_1 y_1) - \sigma_2 y_2 - m_2 < 0\} \quad (78)$$

Il est à noter que la frontière Σ de $\underline{\Delta}$ est convexe par rapport à l'origine (voir Fig.4)

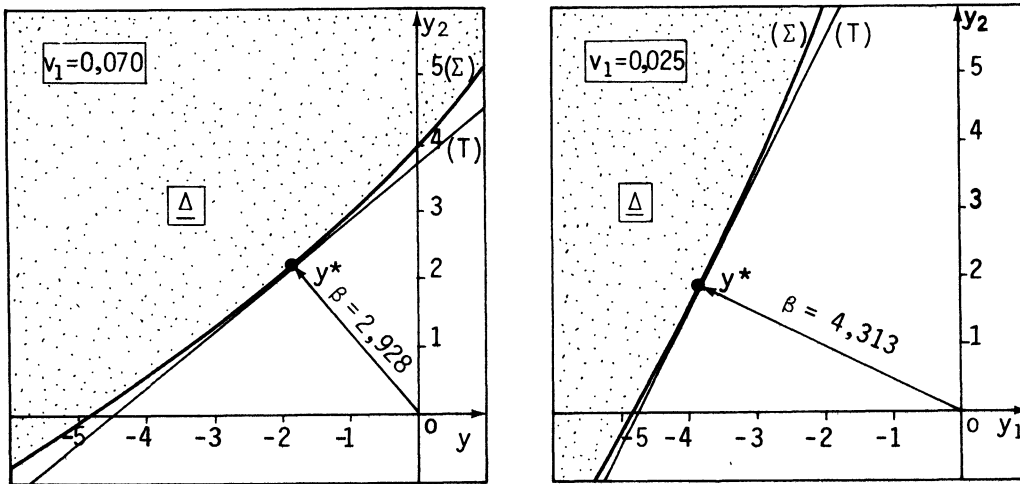


Figure 4. Représentation graphique de $\underline{\Delta}$, Σ et T pour $\nu_1 = 0,070$ et $\nu_1 = 0,025$

Résultats. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 3. Ils conduisent aux mêmes conclusions que précédemment quant à l'efficacité de la méthode. La valeur exacte de la probabilité de ruine ne pouvant être calculée analytiquement ici, une méthode d'intégration numérique a été utilisée. Pour cela cette probabilité a été écrite sous la deuxième forme (67) (avec ici f_1 et F_2 définies par (69) et (73)) puis ramenée, par le changement de variable $x = (\text{Log}x_1 - a_1)/b_1$, à la forme : $p_f = 1 - J/\sqrt{\pi}$ où :

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \Phi\left(\frac{e^{\sqrt{2} b_1 x + a_1} - m_2}{\sigma_2}\right) dx \quad (79)$$

Cette intégrale a alors été calculée par une méthode de Gauss à 20 noeuds.

La quantité $\Phi(-\beta)$ figurant dans le tableau 3 représente, dans le cas général de la dimension n , la mesure gaussienne $\mu_n[\Pi^-]$ du demi espace Π^- ne contenant pas l'origine et limité par l'hyperplan T tangent à Σ au point y^* . Cette quantité est souvent utilisée dans la littérature comme approximation de p_f et pour l'exemple traité cette approximation est correcte (ce qui n'est pas toujours le cas). Notons que pour cet exemple en dimension 2, T représente non pas un plan mais une droite (fig. 4). Le fait que $\Phi(-\beta)$ soit supérieur à p_f résulte de ce qu'ici Δ est convexe, donc inclus dans Π^- , et par conséquent $p_f = \mu_2(\Delta) < \mu_2(\Pi^-) = \Phi(-\beta)$.

	Checking point y^* et distance β	Taille m de l'échantillon z_m				p_f exact	$\Phi(-\beta)$	
		500	1.000	5.000	10.000			
$v_2 = 0.0070$	$y_1^* = -1,866$ $y_2^* = 2,256$	1^+	0,153	0,140	0,1294	0,1267		
		\bar{p}_1	<u>0,124</u>	<u>0,120</u>	<u>0,1204</u>	<u>0,1203</u>		
	1^-	0,095	0,100	0,1113	0,1139			
	p_2	<u>$1,3752 \cdot 10^{-2}$</u>						
	$\beta = 2,928$	$\bar{p}_f = \bar{p}_1 \cdot p_2$	<u>$1,7052 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$1,6502 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$1,6557 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$1,6544 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$1,6544 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$1,705 \cdot 10^{-3}$</u>
$v_2 = 0.025$	$y_1^* = -3,891$ $y_2^* = 1,860$	1^+	0,113	0,104	0,0944	0,0921		
		\bar{p}_1	<u>0,088</u>	<u>0,087</u>	<u>0,0866</u>	<u>0,0866</u>		
	1^-	0,063	0,070	0,0788	0,0811			
	p_2	<u>$9,1334 \cdot 10^{-5}$</u>						
	$\beta = 4,313$	$p_f = \bar{p}_1 \cdot p_2$	<u>$8,0374 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$7,9461 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$7,9095 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$7,9095 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$7,9059 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$8,060 \cdot 10^{-6}$</u>

Tableau 3 : Récapitulatif des résultats de l'application 2.

Application 3.

Données de l'exemple. Cette application concerne à nouveau la barre prismatique considérée dans les deux applications précédentes, mais cette fois les variables aléatoires X_1 et X_2 modélisent respectivement la force de traction de rupture de la barre et la force appliquée à cette barre. Les hypothèses concernant ces deux variables sont les suivantes : X_1 suit une loi de Gumbel du type «valeur minimale», de moyenne m_1 et de variance σ_1^2 , X_2 suit une loi normale de moyenne m_2 et de variance σ_2^2 , X_1 et X_2 sont indépendantes. En notant toujours (f_1, F_1) la densité et la fonction de répartition de X_1 , (f_2, F_2) celles de X_2 on a :

$$f_1(x_1) = \frac{1}{b_1} \exp \left[-\frac{x_1 - a_1}{b_1} - \exp\left(-\frac{x_1 - a_1}{b_1}\right) \right], \quad b_1 > 0 \quad (80)$$

$$F_1(x_1) = 1 - \exp \left[-\exp\left(-\frac{x_1 - a_1}{b_1}\right) \right] \quad (81)$$

$$a_1 = m_1 + \frac{\gamma \sqrt{6}}{\pi} \cdot \sigma_1 ; \quad b_1 = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot \sigma_1 ; \quad \gamma = 0,57721.56649... (= \text{constante d'Euler})$$

$$f_2(x_2) = \frac{1}{\sigma_2} \phi' \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right) \quad (82)$$

$$F_2(x_2) = \Phi \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \right) \quad (83)$$

Compte tenu de l'indépendance des variables X_1 et X_2 , le vecteur aléatoire de base

$X = (X_1, X_2)$ admet la densité :

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \quad (84)$$

dont le support est: $\mathcal{D}_X = \mathbb{R}^2$

Le critère de ruine retenu est le dépassement de la force de traction de rupture par la force de traction appliquée. La fonction d'état limite G et le domaine de ruine \underline{D} sont alors définis comme dans les précédentes applications (formules (57) et (58)).

Les données numériques sont : $m_1 = 10.000$ daN, $\sigma_1 = v_1 \cdot m_1$, $m_2 = 7.000$ daN,

$\sigma_2 = 420$ daN. Pour le coefficient de variation v_1 deux valeurs sont considérées :

$v_1 = 0,07$ et $v_1 = 0,03$.

Mise sous forme standard du problème. Le difféomorphisme $\varphi : \mathcal{X} = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

tel que le vecteur aléatoire $Y = \varphi \circ X$ soit gaussien réduit à valeurs dans \mathbb{R}^2 et son inverse

$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{X}$ sont définis par :

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, x_2) = \Phi^{-1} \left\{ 1 - \exp \left[- \exp \left(\frac{x_1 - a_1}{b_1} \right) \right] \right\} \\ y_2 = \varphi_2(x_1, x_2) = \frac{x_2 - m_2}{\sigma_2} \end{cases} \quad (85)$$

$$x = \varphi^{-1}(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1^{-1}(y_1, y_2) = a_1 + b_1 \text{Log} [-\text{Log} \Phi(-y_1)] \\ x_2 = \varphi_2^{-1}(y_1, y_2) = m_2 + \sigma_2 y_2 \end{cases} \quad (86)$$

La fonction Γ et le borélien $\underline{\Delta}$ sont alors définis par :

$$\Gamma(y_1, y_2) = (G \circ \varphi^{-1})(y_1, y_2) = b_1 \text{Log} [-\text{Log} \Phi(-y_1)] - \sigma_2 y_2 + a_1 - m_2 \quad (87)$$

$$\underline{\Delta} = \left\{ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_y^2 : \Gamma(y_1, y_2) = b_1 \text{Log} [-\text{Log} \Phi(-y_1)] - \sigma_2 y_2 + a_1 - m_2 < 0 \right\} \quad (88)$$

Il est à noter ici que, contrairement au cas traité précédemment, la frontière Σ de $\underline{\Delta}$ est concave par rapport à l'origine (fig. 5).

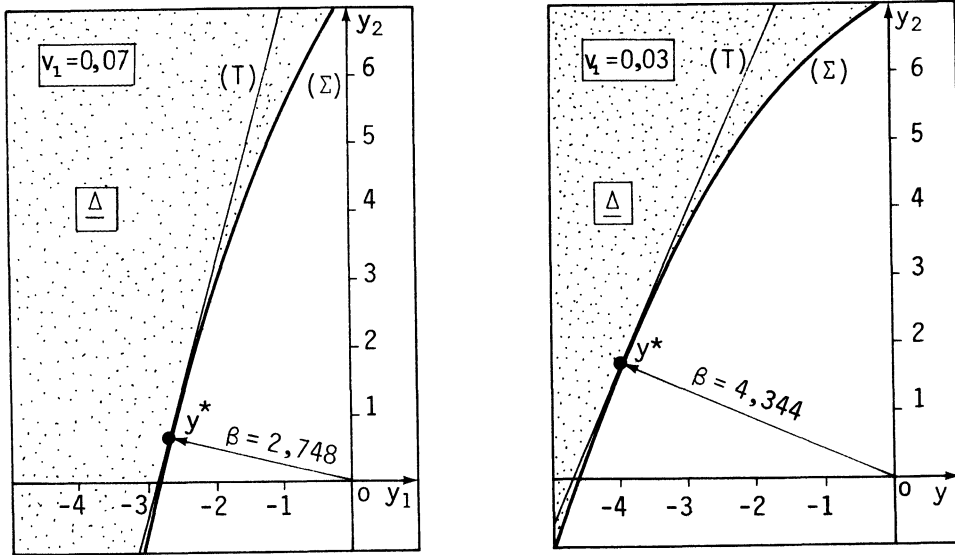


Figure 5. Représentation graphique de Δ , Σ et T pour $v_1 = 0,07$ et $v_1 = 0,03$

Résultats. Le tableau 4 résume les résultats obtenus qui, une fois encore, confirment la qualité de la méthode. Comme dans l'application précédente, le recours à l'intégration numérique a été nécessaire pour calculer la valeur exacte de la probabilité de ruine. Pour cela cette dernière a été écrite sous sa première forme (67) (avec ici F_1 et f_2 définis par (81) et (82)) puis ramenée, par le changement de variable $x = (x_2 - m_2) / \sqrt{2} \sigma_2$ à la forme $p_f = 1 - J / \sqrt{\pi}$ où

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \exp \left[- \exp \left(\frac{\sqrt{2} \sigma_2 x + m_2 - a_1}{b_1} \right) \right] dx \quad (89)$$

Cette intégrale a alors été calculée par la méthode de Gauss à 20 neuds.

Notons que la mesure gaussienne $\mu_2(\Pi^c) = \Phi(-\beta)$ du demi-espace Π^c défini dans l'application précédente constitue encore pour cette application une bonne approximation de p_f . Cependant, contrairement au cas précédent, elle est ici inférieure à p_f , ce qui est logique vu que Δ est concave et contient donc Π^c . De l'inclusion $\Pi^c \subset \Delta$, il résulte en effet l'inégalité : $\Phi(-\beta) = \mu_2(\Pi^c) < \mu_2(\Delta) = p_f$.

	Checking point y^* et distance β	Taille m de l'échantillon z_m				p_f exact	$\Phi(-\beta)$	
		500	1.000	5.000	10.000			
$v_1 = 0.07$	$y_1^* = -2,660$ $y_2^* = 0,688$	1^+	0,162	0,156	0,1436	0,1414		
		\bar{p}_1	<u>0,132</u>	<u>0,135</u>	<u>0,1342</u>	<u>0,1347</u>		
	1^-	0,102	0,114	0,1248	0,1280			
	P_2	<u>$2,2920 \cdot 10^{-2}$</u>						
	$\beta = 2,748$	$\bar{p}_f = \bar{p}_1 \cdot p_2$	<u>$3,0254 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$3,0942 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$3,0759 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$3,0873 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$3,0870 \cdot 10^{-3}$</u>	<u>$2,998 \cdot 10^{-3}$</u>
$v_1 = 0.03$	$y_1^* = -3,998$ $y_2^* = 1,700$	1^+	0,117	0,113	0,1027	0,1005		
		\bar{p}_1	<u>0,092</u>	<u>0,095</u>	<u>0,0946</u>	<u>0,0948</u>		
	1^-	0,067	0,077	0,0865	0,0891			
	P_2	<u>$7,9865 \cdot 10^{-5}$</u>						
	$\beta = 4,344$	$\bar{p}_f = \bar{p}_1 \cdot p_2$	<u>$7,3476 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$7,5872 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$7,5552 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$7,5712 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$7,5741 \cdot 10^{-6}$</u>	<u>$7,0 \cdot 10^{-6}$</u>

Tableau 4 - Récapitulatif des résultats de l'application 3.

Application 4.

Données de l'exemple. Cette application concerne le poteau à section droite variable représenté sur la figure 6. Ce poteau repose sur un appui élastique dont la limite d'élasticité est notée X_1 . Il est soumis en tête à une force axiale de compression X_5 .

L'aire de la section d'appui a pour expression $X_2 X_3 e^{\lambda X_4}$ où λ est un réel positif ayant pour dimension l'inverse d'une longueur.

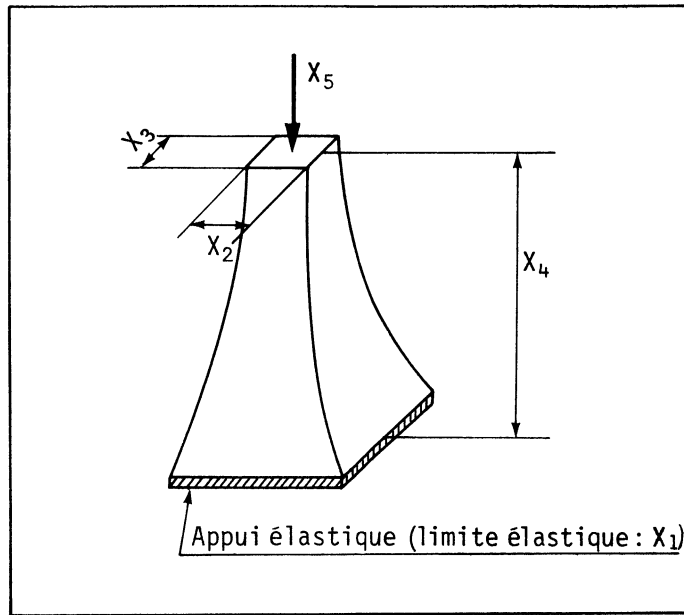


Figure 6. Structure étudiée et notations utilisées

Les quantités X_i ($i = 1, \dots, 5$) sont les variables aléatoires de base de l'étude. Les hypothèses concernant ces variables sont les suivantes :

X_1 suit une loi Log-normale de moyenne m_1 et de variance σ_1^2 ;

le couple (X_2, X_3) suit une loi Log-normale de moyenne (m_2, m_3) et de matrice des covariances :

$$Q_{23} = \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & r_{23} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \\ r_{23} \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \quad (90)$$

où σ_2^2 , σ_3^2 et r_{23} sont respectivement les variances et le coefficient de corrélation des variables X_2 et X_3 ;

X_4 suit une loi normale de moyenne m_4 et de variance σ_4^2 ;

X_5 suit une loi de Fréchet de type «valeur maximale» de moyenne m_5 et de variance σ_5^2 .

Enfin, $X_1, (X_2, X_3), X_4$ et X_5 sont supposés mutuellement indépendants.

Désignons respectivement par f_1, f_4, f_5 les densités des variables X_1, X_4, X_5 et par f_{23} celle du couple (X_2, X_3) .

Ces différentes densités sont définies par :

$$f_1(x_1) = \frac{1}{b_1 x_1} \phi' \left(\frac{\text{Log } x_1 - a_1}{b_1} \right) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^*}(x_1) \quad (91)$$

$$a_1 = \text{Log} [m_1 / (1 + v_1^2)^{1/2}] ; \quad b_1 = [\text{Log}(1 + v_1^2)]^{1/2} ; \quad v_1 = \sigma_1 / m_1 \quad (92)$$

$$f_{23}(x_2, x_3) = \frac{1}{2 \pi b_2 b_3 x_2 x_3 (1 - \rho^2)^{1/2}} \exp \left(- \frac{\Lambda(x_2, x_3)}{2(1 - \rho^2)} \right) \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+^{*2}}(x_2, x_3) \quad (93)$$

$$\Lambda(x_2, x_3) = \frac{(\text{Log } x_2 - a_2)^2}{b_2^2} - \frac{2\rho(\text{Log } x_2 - a_2)(\text{Log } x_3 - a_3)}{b_2 b_3} + \frac{(\text{Log } x_3 - a_3)^2}{b_3^2} \quad (94)$$

$$a_2 = \text{Log} [m_2 / (1 + v_2^2)^{1/2}] ; \quad b_2 = [\text{Log}(1 + v_2^2)]^{1/2} ; \quad v_2 = \sigma_2 / m_2 \quad (95)$$

$$a_3 = \text{Log} [m_3 / (1 + v_3^2)^{1/2}] ; \quad b_3 = [\text{Log}(1 + v_3^2)]^{1/2} ; \quad v_3 = \sigma_3 / m_3 \quad (96)$$

$$\rho = \frac{\text{Log}(1 + v_2 v_3 r_{23})}{b_2 b_3} \quad (97)$$

$$f_4(x_4) = \frac{1}{\sigma_4} \phi' \left(\frac{x_4 - m_4}{\sigma_4} \right) \quad (98)$$

$$f_5(x_5) = \frac{b_5}{a_5} \left(\frac{a_5}{x_5} \right)^{b_5 + 1} \cdot \left[\exp - \left(\frac{a_5}{x_5} \right)^{b_5} \right] \mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}(x_5) ; \quad a_5 > 0 ; \quad b_5 > 2 \quad (99)$$

avec a_5 et b_5 solutions du système :

$$\begin{cases} a_5 \Gamma(1 - \frac{1}{b_5}) = m_5 \end{cases} \quad (100)$$

$$\begin{cases} a_5^2 \left[\Gamma(1 - \frac{2}{b_5}) - \Gamma^2(1 - \frac{1}{b_5}) \right] = \sigma_5^2 \end{cases} \quad (101)$$

où Γ est la fonction eulérienne définie par (26).

Compte tenu des hypothèses d'indépendance retenues, la loi du vecteur aléatoire de base

$X = (X_1, \dots, X_5)$ admet la densité :

$$f(x_1, \dots, x_5) = f_1(x_1)f_2(x_2, x_3) f_4(x_4)f_5(x_5) \quad (102)$$

Cette densité est portée par le sous-ensemble de \mathbf{R}^5 : $\mathcal{D}_X = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^{*2} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$

Le critère de ruine est retenu est l'épuisement de la résistance élastique de l'appui.

Par conséquent, la fonction d'état limite G et le domaine de ruine \underline{D} sont définis par :

$$G(x_1, \dots, x_5) = x_1 x_2 x_3 e^{\lambda x_4 - x_5} \quad (103)$$

$$\underline{D} = \left\{ (x_1, \dots, x_5) \in \mathbf{R}^5 : G(x_1, \dots, x_5) = x_1 x_2 x_3 e^{\lambda x_4 - x_5} < 0 \right\} \quad (104)$$

Les données numériques sont : $\lambda = 0,5493 \text{ m}^{-1}$; $m_1 = 300.000 \text{ daN/m}^2$;

$v_1 = 0,10$; $m_2 = m_3 = 0,30 \text{ m}$; $v_2 = v_3 = 0,025$; $m_4 = 4,00 \text{ m}$; $v_4 = 0,01$;

$m_5 = 120.000 \text{ daN}$ et pour le coefficient de variation $v_5 = \sigma_5 / m_5$ deux valeurs sont considérées : $v_5 = 0,15$ et $v_5 = 0,05$.

Mise sous forme standard du problème. Le difféomorphisme $\varphi : \mathbf{R}^5 \supset \mathcal{D}_X \rightarrow \mathbf{R}^5$

tel que le vecteur aléatoire $Y = \varphi \circ X$ soit gaussien réduit sur \mathbf{R}^5 et son inverse

$\varphi^{-1} : \mathbf{R}^5 \rightarrow \mathcal{D}_X$ sont définis ici par :

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_5) = \frac{\text{Log } x_1 - a_1}{b_1} \\ y_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_5) = \frac{\text{Log } x_2 - a_2}{b_2} \\ y_3 = \varphi_3(x_1, \dots, x_5) = -\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{\text{Log } x_2 - a_2}{b_2} + \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{\text{Log } x_3 - a_3}{b_3} \\ y_4 = \varphi_4(x_1, \dots, x_5) = \frac{x_4 - m_4}{\sigma_4} \\ y_5 = \varphi_5(x_1, \dots, x_5) = \Phi^{-1} \left[\exp \left\{ -\left(\frac{a_5}{x_5} \right)^{b_5} \right\} \right] \end{cases} \quad (105)$$

$$x = \varphi^{-1}(y) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1^{-1}(y_1, \dots, y_5) = \exp(a_1 + b_1 y_1) \\ x_2 = \varphi_2^{-1}(y_1, \dots, y_5) = \exp(a_2 + b_2 y_2) \\ x_3 = \varphi_3^{-1}(y_1, \dots, y_5) = \exp(a_3 + \rho b_3 y_2 + \sqrt{1 - \rho^2} b_3 y_3) \\ x_4 = \varphi_4^{-1}(y_1, \dots, y_5) = m_4 + \sigma_4 y_4 \\ x_5 = \varphi_5^{-1}(y_1, \dots, y_5) = a_5 [-\text{Log } \phi(y_5)]^{-1/b_5} \end{cases} \quad (106)$$

La fonction Γ et le borélien $\underline{\Delta}$ sont alors définis par :

$$\Gamma(y_1, \dots, y_5) = (G \circ \varphi^{-1})(y_1, \dots, y_5) = b_1 y_1 + (b_2 + \rho b_3) y_2 + \sqrt{1 - \rho^2} b_3 y_3 + \lambda \sigma_4 y_4 + \frac{1}{b_5} \text{Log} [-\text{Log } \phi(y_5)] + a_1 + a_2 + a_3 + \lambda m_4 - \text{Log } a_5 \quad (107)$$

$$\underline{\Delta} = \{(y_1, \dots, y_5) \in \mathbf{R}^5 : \Gamma(y_1, \dots, y_5) < 0\} \quad (108)$$

Résultats. Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau 5. Ils confirment une nouvelle fois la très bonne coïncidence entre la solution de Monte-Carlo et la solution exacte. Afin de simplifier les algorithmes de simulation, le problème a été ramené de la dimension impaire $n = 5$, à la dimension paire $n + 1 = 6$ conformément à la procédure précisée plus haut. Dans ce cas, le nouveau domaine d'intégration à prendre en compte est le cylindre $\tilde{\underline{\Delta}} = \underline{\Delta} \times \mathbf{R}$ et la probabilité pondératrice \tilde{p}_2 vaut (cf. (35) et (27) pour $n = 6$) :

$$\tilde{p}_2 = P[\tilde{Y} \in B_6^c(\beta)] = \mu_6[B_6^c(\beta)] = H_6(\beta) = \left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{8}\right) e^{-\beta^2/2} \quad (109)$$

où Y est le vecteur gaussien réduit augmenté de dimension $n + 1 = 6$.

La valeur exacte de la probabilité de ruine a été calculée par une méthode d'intégration numérique déterministe. Pour cela p_f a d'abord été exprimé sous la forme adaptée suivante.

Par définition :

$$p_f = P(X_1 X_2 X_3 e^{\lambda X_4} - X_5 < 0) \quad (110)$$

Mais, comme les variables X_1, X_2, X_3 et X_5 sont positives, on peut aussi écrire :

$$p_f = P(\text{Log } X_1 + \text{Log } X_2 + \text{Log } X_3 + \lambda X_4 - \text{Log } X_5 < 0) \quad (111)$$

Or, par définition de la loi Log-normale :

- la variable $\text{Log } X_1$ suit une loi normale de moyenne a_1 et de variance b_1^2
- le couple $(\text{Log } X_2, \text{Log } X_3)$ suit une loi normale de moyenne (a_2, a_3) et de matrice des covariances :

$$C_{23} = \begin{bmatrix} b_2^2 & \rho b_2 b_3 \\ \rho b_2 b_3 & b_3^2 \end{bmatrix} \quad (112)$$

De plus, les variables aléatoires $\text{Log } X_1, X_4$ et le couple $(\text{Log } X_2, \text{Log } X_3)$ sont mutuellement indépendants.

La variable aléatoire :

$$G_1 = \text{Log } X_1 + \text{Log } X_2 + \text{Log } X_3 + \lambda X_4 \quad (113)$$

suit donc une loi normale de moyenne $m_{G_1} = a_1 + a_2 + a_3 + \lambda m_4$ et de variance

$$\sigma_{G_1}^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2\rho b_2 b_3 + \lambda^2 \sigma_4^2.$$

En outre, la variable aléatoire X_5 étant distribuée suivant une loi de Fréchet de paramètres a_5 et b_5 , la variable $G_2 = \text{Log } X_5$ suit une loi de Gumbel du type « valeur maximale », de paramètres $\alpha_5 = \text{Log } a_5$ et $\nu_5 = 1/b_5$.

Tenant compte du fait que les variables G_1 et G_2 sont indépendantes, la probabilité de ruine s'écrit alors :

$$p_f = P(G_1 - G_2 < 0) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} f_{G_1}(z) F_{G_2}(z) dz \quad (114)$$

où f_{G_1} est la densité de G_1 et F_{G_2} la fonction de répartition de G_2 :

$$f_{G_1}(z) = \frac{1}{\sigma_{G_1} \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(z - m_{G_1})^2}{2 \sigma_{G_1}^2} \right] \quad (115)$$

$$F_{G_2}(z) = \exp \left[-\exp \left(-\frac{z - \alpha_5}{\nu_5} \right) \right] \quad (116)$$

En faisant dans (114) le changement de variable: $x = (z - m_{G_1}) / \sqrt{2} \sigma_{G_1}$ il vient finalement :

$$p_f = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \exp \left[- \exp \left(- \frac{\sqrt{2} \sigma_{G_1} x + m_{G_1} \cdot \alpha_5}{\nu_5} \right) \right] dx \quad (117)$$

Sous cette forme p_f peut alors être calculée par une méthode de Gauss. Nous avons utilisé ici une méthode de Gauss à 20 noeuds.

	Checking point y^* et distance β		Taille m de l'échantillon z_m			p_f exact	$\phi(-\beta)$		
			1.000	5.000	10.000				
$\nu_5 = 0,15$	$y_1^* = -0,848$	\tilde{p}_1	I^+	0,014	0,0102	0,0095	$1,2738 \cdot 10^{-3}$	$1,2128 \cdot 10^{-3}$	
	$y_2^* = -0,414$		I^-	0,008	0,0078	0,0078			
	$y_3^* = -0,066$	\tilde{p}_2	$1,6301 \cdot 10^{-1}$						
	$y_4^* = -0,187$								
	$y_5^* = 2,875$	$\tilde{p}_\Gamma = \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2$	$1,3041 \cdot 10^{-3}$			$1,2715 \cdot 10^{-3}$			$1,2715 \cdot 10^{-3}$
	$\beta = 3,032$		$1,2715 \cdot 10^{-3}$						
$\nu_5 = 0,05$	$y_1^* = -2,501$	\tilde{p}_1	I^+	0,004	0,0019	0,0017	$4,5231 \cdot 10^{-7}$	$3,800 \cdot 10^{-7}$	
	$y_2^* = -1,222$		I^-	0,001	0,0010	0,0011			
	$y_3^* = -0,196$	\tilde{p}_2	$4,2377 \cdot 10^{-4}$						
	$y_4^* = -0,551$								
	$y_5^* = 4,050$	$\tilde{p}_\Gamma = \tilde{p}_1 \cdot \tilde{p}_2$	$4,2377 \cdot 10^{-7}$			$4,2377 \cdot 10^{-7}$			$4,6615 \cdot 10^{-7}$
	$\beta = 4,949$		$4,2377 \cdot 10^{-7}$						

Tableau 5. Récapitulatif des résultats de l'application 4.

Conclusion.

Les auteurs se sont attachés à proposer une amélioration des méthodes de Monte-Carlo en restant dans le cadre de la formulation classique du problème de sécurité ramené en variables gaussiennes réduites. Ils conservent ainsi un sens au coefficient β de Hasofer-Lind qui figure dans les réglementations internationales concernant la sécurité des structures. Ceci ne signifie pas d'ailleurs que ce cadre soit dans tous les cas celui conduisant aux méthodes les plus performantes de calcul de la probabilité de ruine. Nous avons vu, par exemple, qu'il pouvait être plus judicieux dans certains cas de se ramener à des variables uniformes sur le cube unité. Contrairement aux méthodes de Monte-Carlo classiques, la méthode proposée ne nécessite aucun choix arbitraire. Le seul choix qu'elle exige est en effet celui de la boule $B_n(\beta)$ qui est automatique dès que le borélien $\underline{\Delta}$ est défini. C'est de l'avis des auteurs la première originalité de la méthode. La deuxième originalité tient à la méthode elle-même. D'une part, parce que la probabilité de ruine p_f a été exprimée sous forme d'un produit de deux facteurs dont l'un est calculable de manière analytique, et l'autre, d'un ordre de grandeur supérieur à p_f , se prête mieux à l'emploi de méthodes de Monte-Carlo. D'autre part, parce que la décomposition utilisée de la loi gaussienne conditionnelle a permis une grande simplification des tests à effectuer. En effet, les tests d'appartenance à l'extérieur de la boule $B_n(\beta)$ sont beaucoup plus rapides que les tests d'appartenance au domaine de ruine. Or, ces derniers n'auront, dans notre méthode, à être effectués que sur une faible proportion des tirages effectués.

ANNEXE I - Justification de la méthode proposée.

Dans cette annexe, les notations suivantes sont utilisées :

$B_n(r_0) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leq r_0\}$ est la boule de \mathbf{R}^n centrée à l'origine et de rayon r_0 .

$S_{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$ est la sphère unité de \mathbf{R}^n .

\mathcal{B}_n (resp. \mathcal{A}_n , \mathcal{B}^+) est la tribu borélienne de \mathbf{R}^n (resp. S_{n-1} , \mathbf{R}_+^*).

Soit la transformation $T : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S_{n-1} \times \mathbf{R}_+^*$ définie par : $x \rightsquigarrow (x/\|x\|, \|x\|)$.

Cette transformation est un difféomorphisme et définit donc un bon changement de variables pour l'intégration. Soit μ_n la mesure gaussienne réduite sur $(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \mathcal{B}_n)$.

On rappelle alors le résultat connu :

$$\gamma_n = T(\mu_n) = \sigma_{n-1} \otimes \mathcal{R}_n$$

où σ_{n-1} est la probabilité uniforme sur (S_{n-1}, \mathcal{A}_n) et \mathcal{R}_n la loi de Rayleigh généralisée d'ordre n sur $(\mathbf{R}_+^*, \mathcal{B}^+)$.

Au niveau simulation, ceci se traduit de la façon suivante :

Proposition : Il est équivalent de tirer un point $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ au hasard dans \mathbf{R}^n suivant la loi normale réduite ou de tirer au hasard successivement un point $D = (D_1, \dots, D_n)$ sur S_{n-1} suivant la loi uniforme puis, de façon indépendante, un point S sur \mathbf{R}_+^* suivant la loi \mathcal{R}_n et de considérer $\tilde{Y} = (SD_1, \dots, SD_n)$ (qui est isonome à Y).

Cependant, il est bien connu que les propriétés d'indépendance pour les variables aléatoires sont des propriétés de leurs lois qui se perdent en général si l'on considère les lois conditionnelles.

Soit Π un borélien de $S_{n-1} \times \mathbf{R}_+^*$ tel que $\gamma_n(\Pi) > 0$. Soit γ_n^Π la loi γ_n restreinte à Π et renormalisée. C'est donc la loi d'un couple de variables aléatoires distribué suivant la loi γ_n conditionnée par l'appartenance à Π . Ces variables sont indépendantes, mais conditionnellement à l'appartenance à Π elles cessent en général de l'être. En effet, si $A \in \mathcal{A}_n$ et $B \in \mathcal{B}^+$ l'expression :

$$\gamma_n^\Pi(A \times B) = \frac{\gamma_n[(A \times B) \cap \Pi]}{\gamma_n(\Pi)}$$

ne peut s'écrire comme un produit

Il existe toutefois un cas particulier où cela est possible : celui où Π est un pavé de l'espace produit $(S_{n-1} \times \mathbf{R}_+^*, \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{B}^+)$. Supposons en effet que $\Pi = U \times V$ avec $U \in \mathcal{A}_n, V \in \mathcal{B}^+$ et $\sigma_{n-1}(U) > 0, \mathcal{R}_n(V) > 0$. Alors il vient :

$$\gamma_n^\Pi(A \times B) = \frac{\gamma_n[(A \cap U) \times (B \cap V)]}{\gamma_n(U \times V)} = \frac{\sigma_{n-1}(A \cap U) \mathcal{R}_n(B \cap V)}{\sigma_{n-1}(U) \mathcal{R}_n(V)} = \sigma_{n-1}^U(A) \mathcal{R}_n^V(B)$$

où σ_{n-1}^U est la loi uniforme sur (S_{n-1}, \mathcal{A}_n) conditionnée par l'appartenance à U et \mathcal{R}_n^V

la loi de Rayleigh généralisée d'ordre n sur $(\mathbf{R}_+^*, \mathcal{B}^+)$ conditionnée par l'appartenance à V .

En particulier si $\Pi = S_{n-1} \times \{r > r_0\}$:

$$\gamma_n^\Pi(A \times B) = \sigma_{n-1}(A) \mathcal{R}_n^{\{r > r_0\}}(B).$$

Soit :

$$\gamma_n^\Pi = \sigma_{n-1} \otimes \mathcal{R}_n^{\{r > r_0\}}$$

Ceci se traduit, en ce qui nous concerne, par le résultat suivant :

Proposition : Il est équivalent de tirer un point $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ au hasard dans \mathbf{R}^n suivant la loi normale réduite conditionnée par l'appartenance à l'extérieur de la boule $B_n(r_0)$ ou de tirer au hasard successivement un point $D = (D_1, \dots, D_n)$ sur S_{n-1} suivant la loi uniforme σ_{n-1} puis, de façon indépendante, un point R sur \mathbf{R}_+^* suivant la loi \mathcal{R}_n conditionnée par l'appartenance au borélien $\{r > r_0\}$ et de considérer $\tilde{Z} = (RD_1, \dots, RD_n)$ (qui est isonome à Z).
Ce résultat justifie la méthode proposée.

ANNEXE II - Références Bibliographiques.

- [1] Freudenthal A.M. «Safety and the probability of structural failure». Transactions, ASCE, Vol. 121, 1956, pp. 1337-1397.
- [2] Freudenthal A.M., Garretts J.M., Shinozuka M. «The analysis of structural safety». Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, n^o ST1, Feb. 1966, pp. 267-325.
- [3] Cornell C.A. «Bounds on the reliability of structural systems». Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 93, n^o ST1, Feb. 1967, pp. 171-200.
- [4] Cornell C.A. «A probability-based structural code» Journal of the American Concrete Institute, Vol. 66, n^o 12, Déc. 1969.
- [5] Ang A.H.S., Cornell C.A. «Reliability bases of structural safety and design» Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, n^o ST9, Proc. Paper 10777, Sept. 1974, pp. 1755-1769.
- [6] Ellingwood B., Galambos T.V., Mac Gregor J.G., Cornell C.A. «Development of a probability based load criterium for American National Standard A-58» NBS Special Publication 577, U.S. Department of Commerce, Washington, D.C., June 1980.
- [7] Fiessler B., Neumann H.J., Rackwitz R. «Quadratic limit states in structural reliability» Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 105, n^o EM4, Aug. 1979, pp. 661-676.
- [8] Rackwitz R. «Practical probabilistic approach to design, first order reliability concepts for design codes» CEB, Bulletin d'information n^o 112, 1976.
- [9] Iohenbichler M., Rackwitz R. «Non-normal dependent vectors in structural safety». Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 107, n^o EM6, Dec. 1981, pp. 1227-1238.
- [10] Hasofer A.M., Lind N.C. «Exact and invariant second-moment code format» Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol 100, n^o EM1, Feb. 1978, pp. 829-844.
- [11] Paloheimo E. «The probability of failure and safety of structural section loaded with a multi-dimensional force-combination». International Association for Bridge and Structural Engineering, Symposium of Concepts and Safety of Structures and Methods of Design, London, 1969.

- [12] Paloheimo E., Hannus M. «Structural design based on weighted fractiles», *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 100, n° ST 7, July 1974, pp. 1367-1378.
- [13] Veneziano D. «Contribution to Second-Moment Reliability Theory» Research Report, R74-33, Department of Civil Engineering, MIT, Cambridge, Massachusetts, 1974.
- [14] Ditlevsen O. «Structural reliability and the invariance problem» Research Report n° 22, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Canada, 1973.
- [15] Ditlevsen O. «Principle of normal tail approximation» *Journal of Engineering Mechanics Division, ASLE*, Vol. 107, n° EM6, Dec. 1981, pp. 1191-1208.
- [16] Ditlevsen O. «Gaussian outcrossing from safe convex polyhedrons». *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 109, n° EM1, Feb. 1983, pp. 127-148.
- [17] Shinozuka M. «Basic analysis of structural safety». *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol 109, n° 3, March 1983, pp. 721-739.
- [18] Breitung K. «Asymptotic approximations for multinormal integrals». *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 110, n° EM3, March 1984.
- [19] Fogli M. «Analyse probabiliste de la sécurité des structures en contexte aléatoire statique». Rapport de recherche. Groupe de Recherche Génie Civil de l'Université de Clermont II. Février 1985.
- [20] Fogli M. «L'approche de Monte-Carlo dans les problèmes de sécurité». Thèse de Docteur-Ingénieur, INSA Lyon, novembre 1980.
- [21] Minoux M. «Programmation mathématique. Théorie et algorithmes. T.1» *Collection Scientifique et Technique des Télécommunications*. Dunod, 1983.
- [22] Bernard P., Bonnemoy C. «Un algorithme d'optimisation à stratégie aléatoire. Application à la représentation markovienne approchée de phénomènes aléatoires à spectre non rationnel». Rapport de recherche. Département de Mathématiques Appliquées. Université de Clermont II. 1984.
- [23] Payne W.H., Lewis T.G. «Generalized feedback shift register pseudo-random number algorithm». *Journal of ACM*, Vol. 20, n° 3, Jul. 1973.
- [24] Thoft-Christensen P., Baker M.J. «Structural reliability theory and its applications». Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New-York, 1982.

- [25] Elishakoff I. «Probabilistic methods in the theory of structures». Wiley - Interscience, 1983.
- [26] Hammersley J.M., Handscomb D.C. «Les méthodes de Monte-Carlo». Monographies Dunod, 1967.
- [27] Shreider Yu. A. «The Monte-Carlo methods». Pergamon Press, 1967.
- [28] Hennequin P.L., Altabert J.L. «Réflexions sur les méthodes de Monte-Carlo», Département de Mathématiques Appliquées. Université de Clermont II, 1966.
- [29] Altabert J.L. «Programmation d'algorithmes de génération de nombres et de vecteurs aléatoires» Département de Mathématiques Appliquées - Université de Clermont II, 1966.

Reçu en mai 1986.

Université de Clermont II, U.E.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 - Aubière, France.

Adresse personnelle de Monsieur BERNARD : 3, rue Sounely, Pérignat les Sarliève, 63170 Aubière, France.

Adresse personnelle de Monsieur FOGLI : 28, rue Saint-Loup, 63540 Romagnat, France.