ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

MARIO DE SALVO

Iperanelli ed ipercorpi

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 82, série *Mathématiques*, n° 22 (1984), p. 89-107

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1984__82_22_89_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 22, pp. 89-107

IPERANELLI ED IPERCORPI

Mario DE SALVO
Universita de MESSINA

Sommario :

Gli iperanelli (e ipercorpi), nell'accezione usata in questo lavoro, introdotti in [4], generalizzano nel modo più naturale la nozione di anello (e corpo rispettivamente). Una definizione più restrittiva era stata quella, usata in [24] , degli ipercorpi valutati, ripresa successivamente in [25] , [26]. In questo lavoro, le strutture di iperanello e di ipercorpo sone analizzate soprattutto in relazione con quella di semi-ipergruppo completo. Si danno criteri per la costruzione di iperanelli completi e si mettono in luce proprietà degli iper-ideali.

Summary :

In this paper we consider hyper-rings (resp. hyper-skewfield) as a natural generalization of

the concept of ring (resp. skewfield). Here, hyper-rings are different from those used in [24], [25], [26]. The structures of hyper-rings and hyper-skewfield are considered here in relation to the definition of complete semi-hypergroups. We give ways of constructing complete hyper-rings and we prove some properties of hyper-ideals.

*

* *

Ricordiamo alcune definizioni :

Sia A una parte non vuota di un semi-ipergruppo $\langle H, \circ \rangle$;

A si dice *completa* se $\circ \Pi x_i \cap A \neq \emptyset \rightarrow \circ \Pi x_i \subset A$.

Si dice *chiusura completa* di A in H e si denota con $\mathscr{C}_H(A)$, l'intersezione delle parti di H che sono complete e contengono A.

Se $A = \{x\}$ si scrive $\mathscr{C}_H(x)$ al posto di $\mathscr{C}_H(\{x\})$.

H si dice *completo* se $\forall (x,y) \in H^2 \quad x \circ y = \mathscr{C}_H(x \circ y)$.

Si denota con β^*_H, la chiusura transitiva della relazione β_H cosi definita :

$x \ \beta_H \ y \longleftrightarrow \exists n \in N^*, \quad \exists (z_1, z_2, ..., z_n) \in H^n : \{x, y\} \subset \circ \Pi z_i$.

Si dimostra ([23]) che la relazione $x \mathscr{C}_H \ y \longleftrightarrow x \in \mathscr{C}_H(y)$ è una equivalenza e che si ha :

$x \ \mathscr{C}_H \ y \longleftrightarrow x \beta^*_H \ y$.

Si indica con $\varphi : H \rightarrow H/\beta^*_H$ la proiezione canonica ;

se H è un ipergruppo, H/β^*_H è un gruppo e in tal caso si definisce il *cuore* di H come nucleo di φ e lo si denota con ω_H.

Un ipergruppo H è *regolare* se ha almeno una identità bilatera e ogni elemento ha almeno un inverso bilatero. ([4])

Definizione 1.

Diciamo che $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *è un iperanelloide se nell'insieme H sono definite due operazioni binarie multivoche, cioè due funzioni*

$$\circ : H \times H \to \mathcal{P}(H)$$
$$\square : H \times H \to \mathcal{P}(H)$$

ove $\mathcal{P}(H)$ *è l'insieme delle parti non vuote di H.*

Definizione 2.

Diciamo che un iperanelloide $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *è un iperanello se soddisfa alle condizioni*

(1) $\langle H, \circ \rangle$ *è un ipergruppo abeliano ;*

(2) $\langle H, \square \rangle$ *è un semi-ipergruppo ;*

(3) $\forall (x,y,z) \in H^3 \quad (x \circ y) \square z = (x \square z) \circ (y \square z)$
$$z \square (x \circ y) = (z \square x) \circ (z \square y) \;;$$

(4) $\forall x \in H, \forall u \in \omega_{\langle H, \circ \rangle} \quad x \square u \subset \omega_{\langle H, \circ \rangle} \supset u \square x .$

H si dice commutativo se inoltre soddisfa alla condizione

(5) $\forall (x,y) \in H^2 \quad x \square y = y \square x.$

Nota 1.

Nel seguito denoteremo con ω *il cuore di* $\langle H, \circ \rangle$ *e con* H^* *l'insieme* $H - \omega$.

Definizione 3.

Un iperanello (commutativo) $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *si dice ipercorpo (ipercampo) se* $H^* \neq \emptyset$ *e vale la condizione*

(6) $\langle H^*, \square \rangle$ *è un ipergruppo.*

Nota 2.

Se H è un ipercorpo, indichiamo con ω^* *il cuore di* $\langle H^*, \square \rangle$.

Definizione 4.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *un iperanello ;*
allora se $\langle H, \circ \rangle$ *è completo, H si dice o-completo, se* $\langle H, \square \rangle$ *è completo,*

H si dice $\square$*-completo, se* $\langle H, \circ \rangle$ *e* $\langle H, \square \rangle$ *sono completi, H si dice completo.*

Definizione 5.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *un iperanello (ipercorpo) e sia K un sottoinsieme di H. Diciamo che K è sottoiperanello (sottoipercorpo) di H se soddisfa alle condizioni*

(i) $\langle K, \circ \rangle$ *è sottoipergruppo di* $\langle H, \circ \rangle$;

(ii) $\langle K, \square \rangle$ *è sottosemi-ipergruppo di* $\langle H, \square \rangle$

($\langle K^*, \square \rangle$ *è sottoipergruppo di* $\langle H^*, \square \rangle$).

Definizione 6.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *un iperanello e sia I un sottoinsieme di H. Diciamo che I è un iperideale sinistro (destro) di H se soddisfa alle condizioni*

(I) $\langle I, \circ \rangle$ *è sottoipergruppo di* $\langle H, \circ \rangle$;

(II) $\forall x \in I, \ \forall a \in H \quad a \square x \subset I \quad (x \square a \subset I)$.

I è un iperideale se è contemporaneamente iperideale sinistro e iperideale destro.

Osservazione 1.

In ogni iperanello H esistono sempre due iperideali banali :
l'iperideale ω e l'intero iperanello H. $\square$

Alcuni esempi.

1) Tutti gli anelli (corpi) sono evidentemente esempi di iperanelli (ipercorpi). Un iperanello (ipercorpo) che non ha struttura di anello (corpo) si dice *proprio.*

2) L'iperanelloide $H = \langle \{a, b\}, \circ, \square \rangle$ definito dalle seguenti tabelle

$\circ$	a	b
a	a	a,b
b	a,b	a,b

$\square$	a	b
a	a	a,b
b	a	a,b

è un iperanello proprio.

3) L'iperanelloide $H = \langle \{a,b,c,d,e\}, \circ, \square \rangle$ définito dalle seguenti tabelle

$\circ$	a	b	c	d	e
a	a	b,c	b,c	d	e
b	b,c	d	d	e	a
c	b,c	d	d	e	a
d	d	e	e	a	b,c
e	e	a	a	b,c	d

$\square$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b,c	b,c	d	e
c	a	b,c	b,c	d	e
d	a	d	d	a	d
e	a	e	e	d	b,c

è un iperanello completo commutativo, ma non è un ipercorpo.

Il sottoinsieme $\{a,d\}$ è un esempio di *iperideale* di H.

4) L'iperanelloide $H = \langle \{a,b,c,d\}, \circ, \square \rangle$ con le seguenti tabelle di definizione

$\circ$	a	b	c	d
a	a	a,b	c,d	c,d
b	a,b	a,b	c,d	c,d
c	c,d	c,d	a,b	a,b
d	c,d	c,d	a,b	a,b

$\square$	a	b	c	d
a	a,b	a,b	a,b	a,b
b	a,b	a,b	a,b	a,b
c	a,b	a,b	c,d	c,d
d	a,b	a,b	c,d	c,d

è un ipercampo $\square$-completo.

Osservazione 2.

Non esistono ipercorpi propri con cardinalità minore di tre.

Dimostrazione.

Sia $H = \langle \{a,b\}, \circ, \square \rangle$ un ipercorpo. Dalla definizione 3 segue $|\omega| = 1$. Posto $\omega = \{a\}$, si ha : $a \circ a = \{a\}$, $a \circ b = b \circ a = \{b\}$, $b \circ b = \{a\}$. Inoltre si ha $H^* = \{b\}$ e pertanto risulta $b \square b = \{b\}$ e per la condizione (4) della definizione 2, $a \square a = a \square b = b \square a = \{a\}$. In definitiva H coincide con il campo Z_2. $\square$

Proposizione 1.

Un iperanelloide $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *avente* $\langle H, \square \rangle$ *come ipergruppo totale è un iperanello se, e solo se,* $\langle H, \circ \rangle$ *è un ipergruppo commutativo e* $\omega = H$.(1)

Dimostrazione.

Sia H un iperanello. Allora $\omega \square H \subset \omega$, ma essendo $\langle H, \square \rangle$ l'ipergruppo totale, si ha $\omega \square H = H$ e pertanto $\omega = H$. Analogamente si prova il viceversa. □

Definizione 7.

Un iperanello $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *si dice integro o di integrita' se* $\forall (x,y) \in H^2$ *tale che* $x \square y \subset \omega$ *, segue che* $x \in \omega$ *oppure* $y \in \omega$.

Proposizione 2.

Gli ipercorpi $\square$*-completi sono integri.*

Dimostrazione.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un ipercorpo $\square$-completo.

Sia $x \square y \subset \omega$ e $y \notin \omega$ (*). Essendo $\langle H, \square \rangle$ un semi-ipergruppo completo si possono presentare due casi :

$\mathscr{C}_{\langle H, \square \rangle}(x) = \{x\}$ (i)

$\exists\ (u,v) \in H^2$ tale che $\mathscr{C}_{\langle H, \square \rangle}(x) = u \square v$ (ii).

Nel caso (i), poichè $\langle H^*, \square \rangle$ è un ipergruppo, si ha che $x \notin H^*$ e quindi $x \in \omega$.

Nel caso (ii), si ha $\{u,v\} \cap \omega \neq \emptyset$, perchè da $\{u,v\} \subset H^*$ seguirebbe $x \square y \subset (u \square v) \square y \subset H^* \square y = H^*$ in contraddizione con (*). Pertanto da $\{u,v\} \cap \omega \neq \emptyset$, discende $u \square v \subset \omega$ e quindi $x \in \omega$. □

Proposizione 3.

Se $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *è un ipercorpo* $\square$ *-completo, allora* $\langle H, \square \rangle$ *è estensione di* $\langle H^*, \square \rangle$

---

(1) Si chiama ipergruppo *totale* (sull'insieme H), l'ipergruppo $\langle H, \circ \rangle$ tale che $\forall (x,y) \in H^2$, $x \circ y = H$.

e $\forall x \in H^*$ $\mathscr{C}_{\langle H^*, \square \rangle}(x) = \mathscr{C}_{\langle H, \square \rangle}(x)$. (2)

Dimostrazione.

Certamente $\forall x \in H^*$, esiste $(u,v) \in H^* \times H^*$ tale che $\mathscr{C}_{\langle H, \square \rangle}(x) = u \square v$, da cui per la *proposizione 2* di [20] si ha $u \square v = \mathscr{C}_{\langle H^*, \square \rangle}(u \square v)$. Per il *lemma 3* di [20] si ha $\forall x \in u \square v$, $\mathscr{C}_{\langle H^*, \square \rangle}(x) = \mathscr{C}_{\langle H^*, \square \rangle}(u \square v)$, e quindi $\mathscr{C}_{\langle H^*, \square \rangle}(x) = \mathscr{C}_{\langle H, \square \rangle}(x)$. □

Corollario 1.

Se $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *è un ipercorpo* $\square$*-completo, allora* $\langle H^*, \square \rangle$ *è un ipergruppo completo.*

Dimostrazione.

Dalla *proposizione 3* e dal *lemma 3* di [20] segue :

$\forall (a,b) \in H^* \times H^*$ $\forall u \in a \square b$

$a \square b = \mathscr{C}_{\langle H, \square \rangle}(a \square b) = \mathscr{C}_{\langle H, \square \rangle}(u) = \mathscr{C}_{\langle H^*, \square \rangle}(u) = \mathscr{C}_{\langle H^*, \square \rangle}(a \square b)$. □

Proposizione 4.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *un ipercorpo* $\square$*-completo ; allora* $\forall (a,b,c) \in H^3$ *si ha :*

$a \square b = a \square c,\ a \notin \omega \rightarrow \{b,c\} \subset \omega$ *oppure* $b\, \beta^*_{\langle H, \square \rangle}\, c$ *(t)*

$b \square a = c \square a,\ a \notin \omega \rightarrow \{b,c\} \subset \omega$ *oppure* $b\, \beta^*_{\langle H, \square \rangle}\, c$ *(t').*

Dimostrazione.

Si possono verificare due casi :

(1) $\{b,c\} \cap \omega \neq \emptyset$;

(2) $\{b,c\} \cap \omega = \emptyset$.

---

(2) Ricordiamo che un semi-ipergruppo $\langle K, \square \rangle$ è *estensione* di un semi-ipergruppo $\langle H, \circ \rangle$ se $H \subsetneq K$ e $\forall (x,y) \in H^2$ $x \circ y = x \square y$. (vedi [20], *definizione 3).*

(1) Sia $b \in \omega$, allora $a \square b \subset \omega$ e quindi $a \square c \subset \omega$, da cui per la *proposizione* 2, segue $c \in \omega$.
(2) Per il *corollario* 1 $\langle H^*, \square \rangle$ è un ipergruppo completo, ma ogni ipergruppo completo è regolare (vedi *proposizione* 13 di [10]) e pertanto se a' è un inverso di a in $\langle H^*, \square \rangle$ si ha $a' \square a \square b = a' \square a \square c$ da cui $\omega^* \square b = \omega^* \square c$. Allora $\mathscr{C}_{\langle H^*, \square \rangle}(b) = \mathscr{C}_{\langle H^*, \square \rangle}(c)$ (3), da cui per la *proposizione 3* si ha $\mathscr{C}_{\langle H, \square \rangle}(b) = \mathscr{C}_{\langle H, \square \rangle}(c)$. Analogamente si prova (t').

Nota 3.
Nel seguito considereremo iperanelli (ipercorpi) soddisfacenti alla condizione seguente :
(Δ) $\forall u \in \omega$, $\forall v \in H$ $u \square v = v \square u = \omega$.
Essi verranno chiamati Δ*-iperanelli (*Δ*-ipercorpi).*

Osservazione 3.
Per il punto (4) della *definizione 2* e poichè in un semi-ipergruppo completo due prodotti aventi intersezione non vuota coincidono, si può affermare che ogni iperanello $\square$-completo è un Δ-iperanello se, e solo se, esiste $(u,v) \in (\omega \times H) \cup (H \times \omega)$ tale che $u \square v = \omega$. $\square$

Ossevato che nei Δ-iperanelli $\square$-completi, ω è una classe di equivalenza modulo $\beta^*_{\langle H, \square \rangle}$, segue facilmente dalla *proposizione 4* il seguente corollario.

Corollario 2.
Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *un* Δ*-ipercorpo* $\square$*-completo ; allora* $\forall (a,b,c) \in H^3$ *si ha :*

$$a \square b = a \square c,\ a \notin \omega \ \rightarrow\ b \beta^*_{\langle H, \square \rangle} c\ ;$$

$$b \square a = c \square a,\ a \notin \omega \ \rightarrow\ b \beta^*_{\langle H, \square \rangle} c\ . \quad \square$$

---

(3) Si utilizza la *proposizione 14* di [23] :
Se $\langle H, \circ \rangle$ è un ipergruppo, $\forall B \subsetneq H$ $\mathscr{C}_H(B) = \omega \circ B = B \circ \omega$.

Proposizione 5.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *un* Δ*-iperanello* $\square$*-completo, tale che* $\forall (a,b,c) \in H^3$ *valgono le implicazioni seguenti :*

(t) $a \square b = a \square c,\ a \notin \omega \longrightarrow b \beta^*_{\langle H, \square \rangle} c$;

(t') $b \square a = c \square a,\ a \notin \omega \longrightarrow b \beta^*_{\langle H, \square \rangle} c$;

allora H è integro.

Dimostrazione.

Sia $a \square b = \omega$, $a \notin \omega$. $\forall u \in \omega$ si ha : $a \square b = a \square u = \omega$, da cui per (t), $b \beta^*_{\langle H, \square \rangle} u$, cioè $b \in \mathscr{C}_{\langle H, \square \rangle}(u) = \omega$. □

Osservazione 4.

(I) Se $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ è un iperanello tale che $|\omega| = 1$, allora H è un Δ-iperanello.

(II) Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ un iperanello tale che $\omega = H$; allora H è un Δ-iperanello se, e solo se, $\langle H, \square \rangle$ è totale. □

Costruzione di iperanelli completi.

In [7] P. Corsini ha illustrato un metodo che consente di costruire semi-ipergruppi (ipergruppi) completi a partire da semigruppi (gruppi). Mostriamo come tale metodo può essere utilizzato, con le opportune modifiche, per la costruzione di iperanelli completi a partire da anelli.

Sia $R = \langle R, +, . \rangle$ un anello e sia $\{A(g)\}_{g \in R}$ una famiglia di insiemi non vuoti tali che :

(i) $\forall (g,g') \in R^2,\ g \neq g' \longrightarrow A(g) \cap A(g') = \emptyset$;

(ii) $g \notin R.R \longrightarrow |A(g)| = 1$.

Poniamo $H_R = \bigcup_{g \in R} A(g)$ e definiamo in H_R le iperoperazioni $\circ$, $\square$:

$\forall (a,b) \in H_R^2$, esiste $(g,g') \in R^2$ tale che $a \in A(g)$, $b \in A(g')$; poniamo

$a \circ b = A(g+g')$; $a \,\square\, b = A(g.g')$.

In [7] P. Corsini ha dimostrato che $\langle H_R, \circ \rangle$ e $\langle H_R, \square \rangle$ hanno rispettivamente struttura di ipergruppo commutativo completo e di semi-ipergruppo completo.

Alla dimostrazione che H_R è un iperanello, premettiamo il seguente lemma, che discende subito dalle definizioni di $\circ$ e $\square$.

Lemma 1.

$\forall\, (g,g') \in R^2$ $\forall\, (u,v) \in A(g) \times A(g')$ si ha :

(I) $u \circ v = A(g+g') = A(g) \circ A(g')$;

(II) $u \,\square\, v = A(g.g) = A(g) \,\square\, A(g')$. $\square$

Theorema 1.

H_R è un Δ-iperanello completo.

Dimostrazione.

Per quanto detto prima basta verificare la distributività e la condizione (4) della *definizione 2.*

Sia $(x,y,z) \in (H_R)^3$, e sia $x \in A(g)$, $y \in A(g')$, $z \in A(g'')$;

allora $(x \circ y) \,\square\, z = A(g+g') \,\square\, z = \bigcup_{u \in A(g+g')} u \,\square\, z$ = (per il *lemma 1)*= $A[(g+g').g'']$;

inoltre $(x \,\square\, z) \circ (y \,\square\, z) = A(g.g'') \circ A(g'.g'')$ = (per il *lemma 1)* = $A(g.g'' + g'.g'')$ =

$= A[(g+g').g'']$.

Pertanto $(x \circ y) \,\square\, z = (x \,\square\, z) \circ (y \,\square\, z)$; analogamente si prova l'altra legge distributiva.

Dal punto 7) di § 1 in [7], $\omega = A(0_R)$, e perciò $\forall u \in \omega$, $\forall x \in H_R$ si ha $u \,\square\, x = x \,\square\, u = A(0_R) = \omega$. Così H_R è un Δ-iperanello completo. $\square$

GLI (H,R)-Iperanelli.

Presentiamo ora un modo per ottenere nuovi iperanelli a partire da altri iperanelli. Tale costruzione generalizza quella già nota degli (H,G)-ipergruppi. (vedi [15]).

Sia $\mathrm{H} = \langle H, \circ, \square \rangle$ un iperanello, e sia $\{A_i\}_{i \in R}$ una famiglia di insiemi non vuoti tali che :

(1) $\mathrm{R} = \langle R, +, . \rangle$ sia un anello ;

(2) $A_{O_R} = H$;

(3) $\forall (i, j) \in R^2 \quad A_i \cap A_j = \emptyset$.

Sia $K = \bigcup_{i \in R} A_i$ e definiamo in K le seguenti iperoperazioni :

$$\forall (x,y) \in H^2 \quad x \oplus y = x \circ y$$
$$x \odot y = H \quad ;$$
$$\forall (x, y) \in A_i \times A_j \neq H \times H \quad x \oplus y = A_k \text{ se } i + j = k$$
$$x \odot y = A_m \text{ se } i . j = m.$$

E' di routine la dimostrazione delle condizioni (1), (2), (3) della *definizione* 2. Inoltre, dal *lemma* 4 di [15], si ha $\omega = H$, e pertanto si ottiene $H \odot K = H = K \odot H$, cioè K è un iperanello. Nel seguito K verrà denotato come (H,R)-iperanello e porremo $R^* = R - \{O_R\}$.

Osservazione 5.
Se K è un (H,R)-iperanello, allora K è commutativo se, e solo se, R è commutativo. □

Lemma 2.
Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ *un (H,R)-iperanello ; allora K è integro se, e solo se, R è un anello di integrità.*

Dimostrazione.
Sia $K = \bigcup_{i \in R} A_i$ e sia R un anello di integrità. Sia $x \in A_i$, $y \in A_j$ e $x \odot y = \omega = H$.

Allora dalla definizione di $\odot$ segue $i = O_R$ oppure $j = O_R$, e quindi $x \in H$ oppure $y \in H$, cioè K è integro. Analogamente si prova il viceversa. □

Teorema 2.
Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ *un (H,R)-iperanello ; allora se R è un corpo (campo), K è un ipercorpo (ipercampo).*

Dimostrazione.

Bisogna provare che $\langle K^*, \odot \rangle$ è un ipergruppo.

Siano $\{x,y\} \subset K^*$, allora esistono $\{i,j\} \subset R^*$ tali che $x \in A_i$, $y \in A_j$. Dal *lemma* 2, essendo R integro, segue $x \odot y \subset K^*$, e quindi K^* è moltiplicativamente chiuso.

Inoltre esiste $p \in R^*$ tale che $i = j.p$. Se $z \in A_p$, allora $y \odot z = A_i \ni x$.

Analogamente esiste $w \in K^*$ tale che $x \in w \odot y$. Cosi K è un ipercorpo. Infine, per l'*osservazione 5,* se R è un campo, K è un ipercampo. □

Si dimostra facilmente, per induzione su n, il lemma seguente.

Lemma 3.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ *un (H,R)-iperanello, di sostegno* $K = \bigcup_{i \in R} A_i$ *, allora*

$\forall n \in N^* - \{1\}$, $\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$ *, si possono presentare i seguenti casi :*

$\exists\, j \in R : \oplus \Pi\, x_i = A_j$;

$\exists\, B \in \mathcal{P}(H) - \{\emptyset\}: \oplus \Pi\, x_i = B$;

$\exists\, p \in R : \odot \Pi\, x_i = A_p$. □

Facile conseguenza del *lemma* 3 è il lemma seguente.

Lemma 4.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ *un (H,R)-iperanello, di sostegno* $K = \bigcup_{i \in R} A_i$ *, allora* $\forall\, i \in R$ A_i

è parte completa di $\langle K, \oplus \rangle$ *e di* $\langle K, \odot \rangle$. □

Il lemma che segue discende subito dal *lemma 2* di [15] e dal *lemma 4.*

Lemma 5.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ *un (H,R)-iperanello di sostegno* $K = \bigcup_{i \in R} A_i$ *, allora si ha :*

$\forall\, i \in R \quad \forall\, a \in A_i \quad \mathscr{C}_{\langle K, \oplus \rangle}(a) = A_i$;

. $\forall p \in R$ *tale che* $p \in R.R$ $\forall b \in A_p$ $\mathscr{C}_{\langle K, \odot \rangle}(b) = A_p$;

$\forall s \in R$ *tale che* $s \notin R.R$ $\forall c \in A_s$ $\mathscr{C}_{\langle K, \odot \rangle}(c) = \{c\}$.

Osservazione 6.

Per la definizione di $\odot$ e per i *Lemmi* 3 e 4, possiamo affermare che ogni (H,R)-iperanello è un Δ-iperanello $\odot$-completo . □

Lemma 6.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ *un (H,R)-iperanello ; allora se K è un ipercorpo si ha :*

(1) $\langle K^*, \odot \rangle$ *è un ipergruppo completo ;*

(2) $\omega^* = A_u$ *con* $u = 1_R$.

Dimostrazione.

(1) Segue subito dall'*osservazione* 6 e dal *corollario 1.*

(2) Sia $\alpha \in \omega^*$. Certamente esiste $(v,w) \in (K^*)^2$ tale che $\alpha \in v \odot w$. Per il *lemma 3,* esiste $u \in R$ tale che $v \odot w = A_u$. Per il *lemma 5,* si ha $\mathscr{C}_{\langle K, \odot \rangle}(\alpha) = A_u$, da cui, per la *proposizione 3,* discende $\omega^* = A_u$. E' noto (vedi [10]) che ω^* è l'insieme delle identità bilatere di $\langle K^*, \odot \rangle$ é pertanto $\forall i \in R$, $\forall a \in A_i$, $\forall e \in A_u$ si ha $a \odot e \ni a$ e quindi $a \odot e = A_i$; ed analogamente $e \odot a = A_i$. Dalla definizione di $\odot$ segue $u = 1_R$. □

Teorema 3.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ *un (H,R)-iperanello ; allora K è un ipercorpo (ipercampo) se, e solo se, R è un corpo (campo).*

Dimostrazione.

Per il *Teorema 2,* basta provare una sola implicazione.

Sia K un ipercorpo. Per il *Lemma 6,* R è un anello con identità, pertanto basta provare che ogni elemento di R^* possiede un unico inverso moltiplicativo. Per il *Lemma 6,* $\langle K^*, \odot \rangle$ è un

ipergruppo completo e quindi regolare. Dalla regolarità di K^*, si ha che $\forall\, i \in R^*$ e $\forall\, a \in A_i$, esiste $j \in R^*$ ed esiste $a' \in A_j$ tali che $a \odot a' = a' \odot a = \omega^*$.
Per il *Lemma 6,* $\omega^* = A_u$ con $u = 1_R$; allora dalla definizione di $\odot$ segue $i\,.\,j = j\,.\,i = 1_R$. Per assurdo, supponiamo che esista $m \in R^*$, $m \neq j$ tale che $m\,.\,i = i\,.\,m = 1_R$. Dalla *Osservazione 6,* dalla *Proposizione 2,* e dal *Lemma 2,* discende che R è un anello di integrità, e pertanto $i\,.\,m = 1_R = i\,.\,j$ implica, per la legge di cancellazione $j = m$. □

Lemma 7.
Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *un* Δ*-ipercorpo* $\square$ *-completo, e sia I un iperideale di H. Allora I è proprio se, e solo se,* $I \cap \omega^* = \emptyset$.

Dimostrazione.
Se $I \cap \omega^* = \emptyset$, evidentemente $I \subsetneq H$.
Viceversa sia I proprio e sia per assurdo $x \in \omega^* \cap I$. Allora $\forall\, u \in H$, vi sono due possibilità :

(i) $u \in \omega$;
(ii) $u \in H^*$.

Nel caso (i), dalla condizione (Δ) segue $u \,\square\, x = \omega$ e poichè I è iperideale, $u \,\square\, x \subset H \,\square\, I \subset I$, da cui $u \in I$.
Nel caso (ii), si ha :

$u \,\square\, x = u \,\square\, \mathscr{C}_{\langle H^*, \square \rangle}(x) = u \,\square\, \omega^* = \mathscr{C}_{\langle H^*, \square \rangle}(u) \ni u.$

Ma $u \,\square\, x \subset I$ e perciò $u \in I$. □

Proposizione 6.
Se $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *è un* Δ*-ipercorpo* $\square$*-completo,* ω *è l'unico suo iperideale proprio.*

Dimostrazione.
Supponiamo che H possieda un iperideale I diverso da ω e sia $x \in I - \omega$. Per l'ipotesi di completezza, esiste x' inverso di x in H^*, tale che $x \,\square\, x' = \omega^*$. Poichè I è un iperideale

$x \,\square\, x' \subset I \,\square\, H \subset I$. Pertanto $\omega^* \cap I \neq \emptyset$, il che contraddice quanto provato nel *Lemma 7.* $\square$

Lemma 8.

Sia R un anello con identità «u», e sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ *un (H,R)-iperanello. Allora posto* $E(\langle K, \odot \rangle) = \{e \in K \,/\, \forall x \in K, x \in e \odot x \cap x \odot e\}$ *si ha* $E(\langle K, \odot \rangle) = A_u$.

Dimostrazione.

Sia $y \in A_u$, allora $\forall x \in K$ se $x \in A_i$ si ha $x \odot y = y \odot x = A_i \ni x$.
Pertanto $y \in E(\langle K, \odot \rangle)$. Viceversa sia $e \in E(\langle K, \odot \rangle)$, allora esiste $j \in R^*$ tale che $e \in A_j$. Sia $z \in A_u$; si ha $z \in z \odot e = e \odot z = A_j$ e quindi $A_u \cap A_j \neq \emptyset$ da cui $A_u = A_j$. $\square$

Lemma 9.

Sia $K = \langle K, \circ, \square \rangle$ *un iperanello e sia* $x \in K$*; allora posto* $I = K \,\square\, x$*, si ha che I è un iperideale sinistro di K se, e solo se,* $I \circ y = I = y \circ I \quad \forall y \in I$.

Dimostrazione.

Siano $\{u, v\} \subset I$, allora esistono $\{a, b\} \subset K$ tali che $u \in a \,\square\, x$, $v \in b \,\square\, x$.
Si ha $u \circ v \subset (a \,\square\, x) \circ (b \,\square\, x) = (a \circ b) \,\square\, x \subset K \,\square\, x$; quindi I è sottosemiipergruppo di $\langle K, \circ \rangle$. Inoltre $K \,\square\, I = K \,\square\, (K \,\square\, x) = (K \,\square\, K) \,\square\, x \subset K \,\square\, x = I$ $\square$

Proposizione 7.

Sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ *un (H,R)-iperanello e sia* $x \in K$*; allora l'insieme* $(K \odot x)$ *è un iperideale sinistro di K.*

Dimostrazione.

Per il *Lemma 9,* basta provare che $(K \odot x)$ è riproducibile in $\langle K, \oplus \rangle$. Se $x \in H$, allora $K \odot x = H = \omega$ e ω è iperideale di K. Sia $x \in K\text{-}H$, con $x \in A_i$. Siano $\{u, v\} \subset K \odot x$, allora esistono $\{h_1, h_2\} \subset K$ tali che $u \in h_1 \odot x$, $v \in h_2 \odot x$.

Sono possibili due casi : (i) $(h_1,h_2) \in H^2$;

(ii) $(h_1,h_2) \in A_j \times A_m \neq H \times H$.

(i) In questo caso si ha $\{u,v\} \subset H$, per cui esiste $t \in H$ tale che $u \in v \circ t = v \oplus t$.
Ma $K \odot x \supset H \odot x = H$ e quindi $t \in K \odot x$.

(ii) Sia $j \cdot i = k$ e $m.i = p$; allora $u \in A_k$ e $v \in A_p$.

Sia $s = k\text{-}p$ e sia $t \in A_s$; certamente $u \in v \oplus t = A_k$.

Inoltre, preso $z \in A_{j\text{-}m}$ si ha $z \odot x = A_s$ e quindi $t \in K \odot x$.

Analogamente si prova la riproducibilità a sinistra. □

Teorema 4.

Sia R un anello di integrità, commutativo, con identità, e sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ *un (H,R)-iperanello ; allora K è un ipercampo se, e solo se, il solo iperideale proprio di K è* ω .

Dimostrazione.

L'implicazione $\longrightarrow$ segue subito dalla *Proposizione 6* e dalla *Osservazione 6.* Viceversa, occorre provare che $\langle K^*, \odot \rangle$ è un ipergruppo. Per il *Lemma 2,* K è integro e quindi $\forall (a,b) \in (K^*)^2$ $a \odot b \subset K^*$. Sia $x \in K^*$. Per la *Proposizione 7,* $K \odot x$ è iperideale di K. Per il *Lemma 8,* $K \odot x \ni x$. Poichè $x \notin \omega$, segue dalle ipotesi, che $K \odot x = K$, $\forall x \in K^*$. Sia $a \in K^*$, allora esiste $b \in K$ tale che $a \in b \odot x$. Per definizione di $\odot$, $b \in K^*$. □

Dai *Teoremi 3 e 4,* discende facilmente il

Corollario 3.

Sia R un anello di integrità, commutativo, con identità, e sia $K = \langle K, \oplus, \odot \rangle$ *un (H,R)-iperanello ; allora le condizioni che seguono sono equivalenti :*

(i) K è un ipercampo ;

(ii) R è un campo ;

(iii) il solo iperideale proprio di K è ω . □

Proposizione 8.

Sia $H = \langle H, \circ, \square \rangle$ *un iperanello completo, tale che* $\beta^*_{\langle H, \circ\rangle} = \beta^*_{\langle H, \square\rangle}$ *; allora* $\forall x \in H$, $H \square x$ *è iperideale sinistro di* H.

Dimostrazione.

Per il *Lemma 9,* basta provare la riproducibilità di $(H \square x)$ in $\langle H, \circ\rangle$. Siano $\{u,v\} \subset H \square x$, allora esistono $\{h_1, h_2\} \subset H$ tali che $u \in h_1 \square x$, $v \in h_2 \square x$. Sia h'_2 un inverso di h_2 in $\langle H, \circ\rangle$ e sia $t \in (h'_2 \circ h_1) \square x$, allora

$v \circ t \subset (h_2 \square x) \circ [(h'_2 \circ h_1) \square x] = [h_2 \circ (h'_2 \circ h_1)] \square x = (\omega \circ h_1) \square x =$ $= \mathscr{C}_{\langle H, \circ\rangle}(h_1) \square x = \mathscr{C}_{\langle H, \square\rangle}(h_1) \square x$. Pertanto $(v \circ t) \cap [\mathscr{C}_{\langle H, \square\rangle}(h_1) \square x] \neq \emptyset$. (Γ)

Mostriamo che $(v \circ t)$ è parte completa di $\langle H, \square\rangle$; sia $\square \Pi z_i \cap (v \circ t) \neq \emptyset$, allora esiste $\alpha \in \square \Pi z_i$, $\alpha \in v \circ t$; sia $\gamma \in \square \Pi z_i$, pertanto $\alpha \, \beta^*_{\langle H, \square\rangle} \gamma$ da cui, per ipotesi, $\alpha \beta^*_{\langle H, \circ\rangle} \gamma$; poichè $\mathscr{C}_{\langle H, \circ\rangle}(\alpha) \subseteq v \circ t$, si ha $\gamma \in v \circ t$ e quindi $(v \circ t)$è parte completa di $\langle H, \square\rangle$. Inoltre esiste $(r,s) \in H^2$ tale che $\mathscr{C}_{\langle H, \square\rangle}(h_1) = r \square s$. Perciò da (Γ) si ottiene $\mathscr{C}_{\langle H, \square\rangle}(h_1) \square x = (r \square s) \square x \subseteq v \circ t$ e poichè $u \in \mathscr{C}_{\langle H, \square\rangle}(h_1) \square x$, resta provata la riproducibilità a destra di $(H \square x)$.

Analogamente si prova la riproducibilità a sinistra. $\square$

BIBLIOGRAFIA

[1] P. BONANSINGA - Sugli ipergruppi quasicanonici - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina - (in corso di stampa).

[2] P. BONANSINGA P. CORSINI - Su gli omomorfismi di semi-ipergruppi e di ipergruppi - Boll. Un. Mat. It. (1982).

[3] R. H. BRUCK - A survey of binary systems - Springer (1966).

[4] P. CORSINI - Hypergroupes réguliers et hypermodules - Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII - Sc. Mat. Vol. XX, 121 - 135 (1975).

[5] P. CORSINI - Hypergroupes d'associativité des quasigroupes mediaux - Atti Convegno su Sistemi Binari e loro Applicazioni - Taormina . (1978).

[6] P. CORSINI - Sur les Semi-hypergroupes - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina. (1979).

[7] P. CORSINI - Sur les Semi-hypergroupes Completes et les Groupoides - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina. (1979).

[8] P. CORSINI - Contributo alla teoria degi ipergruppi - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina. (1980).

[9] P. CORSINI - Feebly canonicol and l-hypergroups - Acta Universitatis Carolinae (Math. et Phjs.) - (1982).

[10] P. CORSINI - Recenti risultati in teoria degli ipergruppi - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina (1983).

[11] P. CORSINI - G. ROMEO - Hypergroupes Completes et $\mathcal{C}$-Groupoides - Atti Convegno su Sistemi Binari e loro Applicazioni - Taormina. (1978).

[12] M. DE SALVO - Omomorfismi di sd-ipergruppi - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina - (1979).

[13] M. DE SALVO - Sugli ipergruppi completi finiti - Rivista Matematica dell'Università di Parma - (1980).

[14] M. DE SALVO - I K_H ipergruppi - Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena - (1982).

[15] M. DE SALVO - Gli (H,G)-ipergruppi - Rivista Matematica dell'Università di Parma (1983).

[16] M. DE SALVO - D. FRENI - Semi-ipergruppi e ipergruppi ciclici - Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena (1981).

[17] M. DE SALVO - D. FRENI - Sugli ipergruppi ciclici e completi - Rivista «Le Matematiche» Catania - (1980).

[18] M. DRESHER - O. ORE - Theory of multigroups - Amer. J. Math. 60 - (1938).

[19] D. FRENI - Semi-ipergruppi e equivalenze regolari - Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena . (1981)

[20] D. FRENI - Su gli r-ipergruppi e gli ampliamenti - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina (1982).

[21] D. FRENI - Ipergruppi ciclici e la torsione negli ipergruppi - Rivista «Le Matematiche» Catania - (1980).

[22] T. KEPKA - A note on the associativity hypergroups of quasigroups and loops - Atti Soc. Pelor. Sc. Mat. Fis. Nat. - Messina (1982).

[23] M. KOSKAS - Groupoides, Demi-hypergroupes et Hypergroupes - J. Math. pures et appl. 49 (1970).

[24] M. KRASNER - Approximation des corps valués complets de caractéristique $p \neq 0$ par ceux de caractéristiques 0 - Actes du Colloque d'Algèbre, C.B.R.M., Bruxelles (1956).

[25] J. MITTAS - Sur les hyperanneaux et les hypercorps - Mathematica Balkanica, 3 (1973) 368-382.

[26] J. MITTAS - Hyperanneaux et certaines de leurs propriétés - (C.R. Acad. Sc. Paris, t. 269, 623-626, 13-10-69, série A).

[27] Y. SUREAU - Thèse de Doctorat d'Etat - Université de Clermont II - (1980).