ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

GABRIEL PICAVET

Une note sur les *G*-morphismes

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 82, série *Mathématiques*, nº 22 (1984), p. 45-50

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1984__82_22_45_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 22, 1984, pp. 45-50

UNE NOTE SUR LES G-MORPHISMES

Gabriel PICAVET

Université de CLERMONT II

Dans un article antérieur [4], nous avons introduit sur le spectre d'un anneau A une topologie dite de Goldman (la G-topologie) définie de la manière suivante : soit X une partie de Spec(A), l'adhérence de X pour la G-topologie est l'ensemble des idéaux premiers P de A, tels que P soit une intersection d'éléments de X. On désigne cette adhérence par $\overline{X}^G$. La G-topologie a pour base d'ouverts les parties $V(I) \cap D(a)$, où I est un idéal de A et a un élément de A. Elle est donc plus fine que la topologie constructible. Une des raisons de l'introduction de cette nouvelle topologie est qu'elle fournit un procédé systématique pour étudier les G-idéaux d'un anneau A. Rappelons qu'un G-idéal d'un anneau A est un idéal premier de l'anneau A, tel que l'anneau A/P soit un G-anneau, c'est-à-dire tel que le corps des quotients de A/P soit de la forme $(A/P)_a$, a étant un élément de A. Les G-idéaux furent utilisés par Goldman pour donner une preuve rapide du théorème des zéros de Hilbert. On peut aussi caractériser un G- idéal d'un anneau A comme étant le contracté d'un idéal maximal de A [X] ; mais la caractérisation utilisée le plus souvent dans cette note sera : P est un G-idéal de A si et seulement si $\{P\}$ est une partie localement fermée de Spec(A). Cette dernière propriété se traduit dans la G-topologie par : $\{P\}$ est une partie ouverte pour la G-topologie. Nous désignons l'ensemble des G-idéaux d'un anneau A par Gold(A).

Or, J. Guerindon a posé dans [2] le problème suivant : caractériser les morphismes d'anneaux $A \to A'$ tels que ${}^a f(\mathrm{Gold}(A')) \subset \mathrm{Gold}(A)$; de tels morphismes sont dits des G-morphismes. L'objet de cette note est de donner des caractérisations des G-morphismes dont l'étude avait été abordée dans [4].

* *
*

Voici tout d'abord les résultats principaux obtenus dans [4].

Proposition 1 : Soit $f : A \to A'$ un morphisme d'anneaux. Le morphisme f est un G-morphisme lorsque f est ouvert pour la G-topologie.

Le morphisme f est ouvert pour la G-topologie dans les cas suivants :

a) Le morphisme f est de type fini.
b) Le morphisme f est entier.
c) Le morphisme f est ouvert et le morphisme spectral ${}^a f$ est injectif.

Le théorème classique de platitude générique (voir [1], page 35), dont l'énoncé suit, suggère une définition. Elle servira à donner une caractérisation algébrique des G-morphismes.

Théorème de platitude générique : Soit $A \to A'$ un morphisme d'anneaux de présentation finie, l'anneau A étant intègre. Soit M un A' module de présentation finie, il existe un élément $a \neq 0$ de A tel que M_a soit un A_a-module libre.

Définition 2 : Soit A un anneau intègre, on dit qu'un morphisme d'anneaux $A \to A'$ vérifie le théorème fort de platitude générique si pour tout morphisme d'anneaux $A' \to A''$ de présentation finie et tout A''-module M, il existe un élément $a \neq 0$ de A tel que M_a soit un A_a-module libre.

D'après [2], par exemple, un anneau intègre A est un G-anneau si et seulement si il existe un élément $a \neq 0$ de A tel que A_a soit un corps.

Proposition 3 : Soit $f : A \to A'$ un morphisme d'anneaux. Le morphisme f est un G-morphisme si et seulement si pour tout G-idéal P' de A' le morphisme $A/{}^af(P') \to A'/P'$ vérifie le théorème fort de platitude générique.

Preuve : Compte tenu du rappel ci-dessus, une partie de la preuve est claire.

Soit maintenant un G-idéal P' de A' et soit $P = {}^af(P')$. Supposons que le morphisme $A/P \to A'/P'$ vérifie le théorème fort de platitude générique, P' étant un G-idéal, le morphisme $A'/P' \to k(P')$ est de présentation finie, il existe donc un élément $\bar{a} \neq 0$ de A/P tel que $(A/P)_a \to k(P')$ soit libre. Il en résulte que l'anneau $(A/P)_a$ est un corps : P est un G-idéal. Ainsi f est un G-morphisme.

On donne maintenant une caractérisation topologique des G-morphismes. Si A est un anneau et X une partie de Spec(A), nous désignons par g(X) le générisé de X.

Proposition 4 : Soit $f : A \to A'$ un morphisme d'anneaux. Le morphisme f est un G-morphisme si et seulement si pour toute partie G-ouverte X' de Spec(A'), il existe une partie G-ouverte X de Spec(A) telle que $X \subset {}^af(X') \subset g(X)$.

Preuve : Une partie est évidente. Supposons que f soit un G-morphisme et soit un G-idéal P' de A' au-dessus du G-idéal P de A. Il existe un élément $\bar{a} \neq 0$ de A/P tel que $(A/P)_a$ soit un corps. Il est clair que $P' \in D(f(a))$. D'autre part, puisque tout morphisme d'anneaux, de source un corps, est universellement ouvert, on voit que pour tout idéal I' de A' et tout élément a' de A' la partie $L = {}^af(D(f(a)) \cap V(P') \cap V(I') \cap D(a'))$ est une partie localement fermée de Spec(A). Or, les parties $V(I') \cap D(a')$ forment une base d'ouverts pour la G-topologie de Spec(A'), il suffit donc de montrer qu'il existe une partie G-ouverte X de Spec(A) telle que $X \subset {}^af(V(I') \cap D(a')) \subset g(X)$. Soit alors un idéal premier Q' de A' appartenant à une partie $V(I') \cap D(a')$; l'idéal premier Q' est une intersection de G-idéaux (cf. [4]), il existe donc un G-idéal P', contenant Q' et appartenant à $V(I') \cap D(a')$. Soit $L_{Q'}$ la partie localement fermée associée à P' comme ci-dessus et prenons X égal à la réunion des parties $L_{Q'}$, où Q' varie dans $V(I') \cap D(a')$. Il est clair que X est contenu dans ${}^af(V(I') \cap D(a'))$. D'autre part, ${}^af(P')$ appartient à $L_{Q'}$ et Q' est contenu dans P', il en résulte que ${}^af(Q')$ appartient à g(X).

Les morphismes entiers ou de type fini sont des G-morphismes universels, c'est-à-dire qu'ils restent des G-morphismes dans tout changement de base. Les propositions suivantes font apparaître des résultats généraux sur les G-morphismes universels.

Proposition 5 : Soit $f : A \to A'$ un morphisme d'anneaux tel que le morphisme $A[X] \to A'[X]$ soit un G-morphisme. Le morphisme f est alors un G-morphisme et pour tout G-idéal P' de A', le morphisme $A/{}^af(P') \to A'/P'$ est algébrique.

Preuve : La première partie est claire : un G-idéal provient d'un G-idéal de son anneau de polynômes.

Soit P' un G-idéal de A' et soit $\bar{a}'$ un élément non nul de A'/P'. Considérons le morphisme $\varphi_{a'} : A'[X] \to A'$, défini par $\varphi_{a'}(p(X)) = p(a')$. Soit l'idéal premier $M_{\bar{a}'} = \varphi^{-1}_{a'}(P')$, qui est indépendant du choix du représentant a'. Puisque le morphisme $\varphi_{a'}$ est surjectif, $M_{\bar{a}'}$ est un G-idéal de $A'[X]$; de plus $M_{\bar{a}'}$ est au-dessus de P', comme on le voit aisément. Le contracté M de $M_{\bar{a}'}$ dans $A[X]$ est un G-idéal de $A[X]$ au-dessus de $P = {}^af(P')$. Mais l'anneau $A/P[X]$ n'est jamais un G-anneau, il en résulte que M est différent de $P[X]$. Soit alors p(X) un élément de M, n'appartenant pas à $P[X]$. Soit $\bar{p}(X)$ l'image de p(X) dans $A/P[X]$, on voit que $\bar{p}(X)$ est différent de zéro et que $\bar{p}(\bar{a}') = 0$.

Proposition 6 : Soit $f : A \to A'$ un G-morphisme d'anneaux universel. Pour tout G-idéal P' de A', le morphisme $A/{}^af(P') \to A'/P'$ est algébrique.

En particulier, si l'anneau A est de Jacobson, il en est de même pour l'anneau A'.

Preuve : La première partie résulte immédiatement de la proposition précédente. De plus un anneau A est de Jacobson si et seulement si $\mathrm{Max}(A) = \mathrm{Gold}(A)$.

On obtient ainsi les propriétés de transfert bien connues des anneaux de Jacobson à travers les morphismes de type fini ou entier, mais de manière plus simple. En vertu de la proposition 1, un morphisme radiciel universellement ouvert est un G-morphisme universel, les deux propositions précédentes s'appliquent donc à ce type de morphisme.

H. Uda a étudié dans [5] la notion de morphisme incomparable de façon systématique. Rappelons qu'un morphisme d'anneaux $A \to A'$ est dit incomparable si deux idéaux premiers de A' comparables se contractant sur un même idéal premier de A sont égaux. Nous allons voir que la notion de G-morphisme est liée à la notion de morphisme incomparable.

Proposition 7 :

1) Soit f : A $\rightarrow$ A' un G-morphisme universellement incomparable, alors le morphisme A [X] $\rightarrow$ A' [X] est un G-morphisme. Par conséquent, si l'anneau A est de Jacobson, il en est de même pour l'anneau A'.

2) Soit f : A $\rightarrow$ A' un morphisme d'anneaux, incomparable. Soit P' un idéal premier de A', si ${}^{a}f$(P') est un G-idéal (resp. maximal) il en est de même pour P'.

Preuve : Sous les hypothèses de 1), soit M' un G-idéal de A' [X] , donc différent de P' [X] , P' étant le contracté de M' dans A'. Soit encore P le contracté de P' dans A, c'est un G-idéal de A. Mais M' ne peut se contracter sur P [X] , puisque par incomparabilité P' [X] $\subset$ M' entraîne P' [X] = M'. Par conséquent, le contracté M de M' dans A [X] est différent de P [X] et est au-dessus du G-idéal P de A. Les résultats de [4] montrent que M est un G-idéal : le morphisme A [X] $\rightarrow$ A' [X] est un G-morphisme.

La partie 2) est évidente.

L'article [4] était consacré en partie à l'étude des anneaux A tels que Gold(A) = Spec(A). On consultera donc [4] pour avoir des renseignements sur ce type d'anneaux.

Proposition 8 : Soit f : A $\rightarrow$ A' un G-morphisme universel. Si Spec(A') = Gold(A'), le morphisme f est universellement incomparable.

Preuve : D'après le théorème 2-12 de [5], il suffit de montrer que pour tout idéal premier P' de A' au-dessus de l'idéal premier P de A, le morphisme k(P) $\rightarrow$ k(P') est algébrique. Or, pour tout G-idéal P' de A', le morphisme A/P $\rightarrow$ A'/P' est algébrique, d'où la conclusion.

Proposition 9 : Soit f : A $\rightarrow$ A' un morphisme d'anneaux, de type fini. Si Spec(A') = Gold(A'), le morphisme f est quasi-fini.

Preuve : La proposition 1-8 de [5] affirme qu'un morphisme de type fini est quasi-fini si et seulement si il est incomparable.

Remarque : La proposition précédente s'applique lorsque A' est un anneau plat. Soit T(A) l'anneau plat universel de J.P. Olivier (cf. [3]), le morphisme T(A) $\rightarrow$ T(A) $\otimes$ A' est quasi-fini, puisque A $\rightarrow$ A' l'est. Le Main Theorem de Zariski montre que le morphisme

$T(A) \to T(A) \otimes A'$ se factorise en un morphisme entier suivi d'un épimorphisme plat injectif de présentation finie. La source de l'épimorphisme plat est un anneau plat, il est donc un isomorphisme. D'autre part, le morphisme $A' \to T(A) \otimes A'$ est un isomophisme. On a ainsi une factorisation $A \to T(A) \to A'$, dans laquelle le morphisme $T(A) \to A'$ est entier, pour tout morphisme $A \to A'$ de type fini, l'anneau A' étant plat.

Proposition 10 : Soit $A \to A'$ un morphisme d'anneaux de type fini. Pour tout G-idéal M' de A', l'homomorphisme $A \to k(M')$ est quasi-fini ; la fermeture intégrale de A dans $k(M')$ est un G-anneau de corps des quotients $k(M')$.

Preuve : Le morphisme $A' \to k(M')$ est de type fini, puisque M' est un G-idéal. Puisque $k(M')$ est un corps, la proposition précédente montre que le morphisme $A \to k(M')$ est quasi-fini. Soit A'' la fermeture intégrale de A dans $k(M')$, le Main Theorem de Zariski montre que le morphisme $A'' \to k(M')$ est un épimorphisme plat injectif de présentation finie. Mais un épimorphisme injectif dont le but est un corps identifie ce dernier au corps des quotients de la source. Donc A'' a pour corps des quotients $k(M')$. Le morphisme $A'' \to k(M')$ étant de type fini, il résulte de [2] que A'' est un G-anneau.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Grothendieck et J. Dieudonné : Eléments de Géométrie Algébrique IV, Paris, Presses Universitaires de France (Institut des Hautes Etudes Scientifiques). Publication Mathématique n° 28, (1968).

[2] J. Guerindon : Anneaux de Goldman, In Séminaire Dubreuil-Pisot, exposé n° 9, Secrétariat Mathématique - Paris (1969-1970).

[3] J.P. Olivier : Anneaux absolument plats universels, In Seminaire Samuel, exposé n° 6, Secrétariat Mathématique - Paris (1968-1969).

[4] G. Picavet : Autour des idéaux premiers de Goldman d'un anneau commutatif, Ann. Sci. Univ. Clermont Math., 57-11, 73-90 (1975).

[5] H. Uda , Incomparability in rings extensions. Hiroshima Math. J. 9, 451-463, (1979).

Université de Clermont II, U.E.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 - Aubière, France.

Reçu le 15 décembre 1983.