Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

Bernard Brunet

Espaces de convergence projectifs

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 82, série *Mathématiques*, nº 22 (1984), p. 39-44

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1984__82_22_39_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 22, 1984, pp. 39-44

ESPACES DE CONVERGENCE PROJECTIFS

Bernard BRUNET

Université de CLERMONT II

§ 0. Introduction.

Nous nous proposons, dans ce qui suit, de montrer comment le théorème d'extension propre d'une application continue d'un espace de convergence complètement régulier (c'est-à-dire possédant une compactification régulière (*)) dans un autre, obtenu dans (1), permet de prouver que la catégorie dont les objets sont les espaces de convergence complètement réguliers et les morphismes les applications propres a suffisamment d'objets projectifs.

(*) Un espace de convergence compact peut ne pas être régulier.

§ 1. **Préliminaires.**

∗ Nous rappelons que :

— Etant donnée une catégorie $\mathscr{C}$ un objet X de $\mathscr{C}$ est dit projectif si et seulement si pour tout $\mathscr{C}$-morphisme f de X dans Z et tout $\mathscr{C}$-épimorphisme e de Y dans Z, il existe un $\mathscr{C}$-morphisme g de X dans Y, tel que $f = e \circ g$.

— Une catégorie $\mathscr{C}$ est dite avoir suffisamment d'objets projectifs si et seulement si, pour tout objet X de $\mathscr{C}$, il existe un espace projectif P(X) de $\mathscr{C}$ et un $\mathscr{C}$-épimorphisme de P(X) dans X.

— Une application continue f d'un espace de convergence (X,q) dans un autre (X',q') est dite propre, si et seulement si, pour tout ultrafiltre Φ sur X, et toute valeur limite x' pour q' de l'ultrafiltre image, il existe une valeur limite x pour q de Φ telle que $x' = f(x)$.

— $\mathscr{K}$ désignant la classe des espaces de convergence compacts réguliers, une application continue f d'un espace de convergence complètement régulier X dans un autre X' est dite $\mathscr{K}$-extensible si et seulement si pour tout espace compact régulier K et toute application continue h de X dans K, il existe une application continue g de X' dans K telle que $g \circ f = h$.

— Si f est une application continue d'un espace de convergence complètement régulier (X,q) dans un autre (X', q'), il existe un espace de convergence complètement régulier $(\tilde{X}, \tilde{q})$, une application injective j de X dans $\tilde{X}$ et une application g de $\tilde{X}$ dans X' tels que :

- j soit un plongement à image τ-partout dense
- g soit une application propre de $(\tilde{X}, \tilde{q})$ dans (X', q')
- $g \circ j = f$.

(Théorème d'extension propre d'une application continue).

Ajoutons, à propos de ce théorème, que la construction donnée dans (1) du couple $(j, (\tilde{X}, \tilde{q}))$ permet d'affirmer que j est de plus $\mathscr{K}$-extensible.

∗ Notation : Dans ce qui suit, $\mathscr{C}_{\mathfrak{R}}$ désigne la catégorie dont les objets sont les espaces de convergence complètement réguliers et les morphismes les applications continues.

§ 2. Applications antipropres.

Nous dirons qu'une application continue f d'un espace de convergence complètement régulier X dans un autre X' est antipropre si et seulement si pour tout diagramme commutatif dans $\mathscr{C}_{\mathfrak{R}}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "t"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y' \end{tikzcd}$$

où g est propre, il existe une application continue d de X' dans Y, telle que $d \circ f = s$ et $g \circ d = t$.

Théorème 1.

Une application continue d'un espace de convergence complètement régulier (X, q) dans un autre (X', q') est antipropre si et seulement si elle est $\mathscr{K}$-extensible et à image τ-partout dense.

a) Soit f une application antipropre de (X, q) dans (X', q').

- Soit K un espace de convergence compact régulier et soit g une application ponctuelle telle que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "t"] \\ K \arrow[r, "g"] & \cdot \end{tikzcd}$$

commute dans $\mathscr{C}_{\mathfrak{R}}$.

g étant propre, il existe $d : X' \longrightarrow K$ telle que $d \circ f = s$ et, par suite, f est $\mathscr{K}$-extensible.

- D'après le théorème d'extension propre d'une application continue, il existe un triplet $(j, (\tilde{X}, \tilde{q}), g)$ tel que $\mathrm{Adh}_{\tau(\tilde{q})} [j(X)] = \tilde{X}$, g soit propre et tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & X' \arrow[d, "\mathrm{Id}_{X'}"] \\ \tilde{X} \arrow[r, "g"] & X' \end{tikzcd}$$

commute dans $\mathscr{C}_{\mathfrak{R}}$.

Par suite, il existe $d : X' \longrightarrow \tilde{X}$ telle que $d \circ f = j$ et $g \circ d = \mathrm{Id}_{X'}$ (cette dernière relation impliquant que g est surjective).

Comme toute application propre est τ-continue et fermée (1),

$\mathrm{Adh}_{\tau(q')} f(X) = g\left[\mathrm{Adh}_{\tau(\tilde{q})} j(X)\right] = g(\tilde{X})$, et par suite, puisque g est surjective, f est à image τ-partout dense.

b) Supposons f $\mathcal{K}$-extensible à image τ-partout dense.

Soit
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "t"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y' \end{tikzcd}$$
un diagramme commutatif dans $\mathscr{C}_{\mathfrak{R}}$, g étant propre.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & X' \arrow[d, "{(v,t)}"] \arrow[ddl, dashed, "v"'] \arrow[dr, "t"] & \\ Y \arrow[r, "{(i,g)}"] \arrow[d, "i"'] & \tilde{Y} \times Y' \arrow[r, "pr_2"] \arrow[dl, "pr_1"] & Y' \\ \tilde{Y} & & \end{tikzcd}$$

Soit $(i, \tilde{Y})$ un compactifié régulier de Y.
f étant $\mathcal{K}$-extensible, il existe une application continue v de X' dans $\tilde{Y}$.
Comme g est propre, (i, g) est ((1),Proposition 3.2) un plongement fermé, et par suite ((1), Corollaire - Proposition 4.1) un monomorphisme fort de $\mathscr{C}_{\mathfrak{R}}$. Comme f est à image τ .partout dense, et par suite, est un $\mathscr{C}_{\mathfrak{R}}$ -épimorphisme, on en déduit qu'il existe d : X' $\longrightarrow$ Y telle que d o f = s et (i,g) o d = (v, t), et par suite, telle que g o d = t.

§ 3. Espaces de convergence projectifs.

Nous désignerons, dans ce qui suit, par $\mathscr{C}$ la catégorie dont les objets sont les espaces de convergence complètement réguliers et les morphismes les applications propres.

Remarque :

Comme dans un espace de convergence complètement régulier (X, q), un ultrafiltre converge pour q vers x si et seulement si il converge pour $\tau(q)$ vers x, une application d'un espace de convergence complètement régulier dans un autre est propre si et seulement si elle est τ-propre, et par suite, une adaptation immédiate de la démonstration de la proposition 4.1 de (1) permet d'affirmer que les $\mathscr{C}$-épimorphismes sont les applications surjectives.

Théorème 2 .

$\mathscr{C}$ a suffisamment d'objets projectifs.

Soit (X, q) un espace de convergence complètement régulier et soit (X, d) l'espace de convergence discret associé.

Comme (X, d) est, de façon immédiate, complètement régulier, l'application identité sur X qui est continue de (X, d) dans (X, q) possède dans $\mathscr{C}_{\mathfrak{R}}$ une extension propre $(j, (\tilde{X}, \tilde{q}), g)$.

Lemme :

$X_d = (X, d)$ est projectif dans $\mathscr{C}$.

Soient f un $\mathscr{C}$-morphisme de X_d dans Z et e un $\mathscr{C}$-épimorphisme de Y dans Z. Comme d'après la remarque précédente g est surjective, il existe une application s telle que $e \circ s = Id_Z$. Posons alors $h = s \circ f$. On a $e \circ h = f$. De plus, comme X_d est discret, h est continue. Enfin, puisque f est propre et Y séparé, h est propre, d'où le résultat.

Preuve du théorème :

(1) Soient f un $\mathscr{C}$-morphisme de $\tilde{X}$ dans Z, e un $\mathscr{C}$-épimorphisme de Y dans Z. Comme

$$\begin{tikzcd} X_d \arrow[r, "j"] \arrow[d, "s"'] & \tilde{X} \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "e"] & Z \end{tikzcd}$$

X_d est projectif, il existe un $\mathscr{C}$-morphisme s de X_d dans Y tel que le diagramme ci-contre commute dans $\mathscr{C}_{\mathfrak{R}}$. Comme d'après le théorème 1, j est antipropre, il existe un $\mathscr{C}_{\mathfrak{R}}$-morphisme $d : \tilde{X} \longrightarrow Y$ tel que $d \circ j = s$ et $e \circ d = f$. Comme f est propre et Y séparé, d est propre et, par suite, $\tilde{X}$ est projectif dans $\mathscr{C}$.

(2) Comme $g \circ j = Id_X$, g est surjective et, par suite, est un $\mathscr{C}$-épimorphisme.

REFERENCES

(1) B. BRUNET : *«Sur la classe des morphismes propres dans la catégorie des espaces de convergence»*. Ann. Sc. Univ. Clermont, Série Math., Fasc. 16, 1978, 107-120.

(2) R. DYCKOFF : *«Factorisation theorems and Projective Spaces in Topology»*. Math. Zeitschrift, 127, (1972), 256-264.

Université de Clermont II, U.E.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 - Aubière, France

Adresse personnelle : **55, Avenue Thermale, D., 63400 - Chamalières, France**

Reçu le 10 janvier 1983.