

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

ROBERT VIDAL

**Automorphismes et dérivations de « petites normes » sur  
un corps valué non archimédien**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 73, série *Mathématiques*, n° 21 (1982), p. 87-95

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1982\\_\\_73\\_21\\_87\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__73_21_87_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**AUTOMORPHISMES ET DERIVATIONS DE «PETITES NORMES»  
SUR UN CORPS VALUE NON ARCHIMEDIEN**

Robert VIDAL

Université de CLERMONT II

**Introduction.**

Soit  $K$  un corps, *non nécessairement commutatif*, de caractéristique nulle, valué, complet, non-archimédien, et induisant la valeur absolue impropre sur le sous-corps premier  $\mathbb{Q}$ . Le but de cet article est d'établir, de façon simple, une correspondance bijective entre automorphismes et dérivations de «petites normes» sur le corps  $K$  grâce aux fonctions exponentielle et logarithme d'opérateurs linéaires. Le cas des algèbres de Banach sur  $\mathbb{C}$  est traité par une méthode différente dans [N. B. ], chap. 3, page 209, cor. 2.

En particulier, nous appliquons les résultats obtenus à la construction de dérivations, *non-intérieures*, sur le corps local différentiel, non commutatif :  $K = k((Y))(X, \partial_Y)$  dans lequel le produit est obtenu à partir de la loi :  $x X^{-1} \cdot X^{-1} x = \partial_Y(x)$  pour  $x \in K$ . Le corps  $k$  est commutatif, de caractéristique nulle et  $\partial_Y$  représente l'opérateur dérivée partielle par rapport à la variable  $Y$ . Voir [R.V.].

### Exponentielle et logarithme d'opérateurs linéaires.

Dans ce qui suit,  $K$  est un corps, non nécessairement commutatif, de caractéristique nulle, valué, complet et non-archimédien. La valeur absolue est notée  $|\cdot|$  et induit la valeur absolue impropre sur le sous-corps premier  $\mathbb{Q}$ . Si  $\mathcal{L}(K)$  désigne l'ensemble des opérateurs linéaires de  $K$  ( $\mathbb{Q}$ -linéaires), notons  $\text{Lip}(K)$  le sous-ensemble des opérateurs linéaires et lipschitziens de  $K$ ; c'est-à-dire :

$$\text{Lip}(K) = \left\{ u \in \mathcal{L}(K) \mid \sup_{x \neq 0} \frac{|u(x)|}{|x|} < +\infty \right\}$$

Alors l'application :  $u \mapsto \|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|u(x)|}{|x|}$  de  $\text{Lip}(K)$  dans  $\mathbb{R}_+$  est une norme

ultramétrique sur  $\text{Lip}(K)$  au sens suivant :

$$\begin{aligned} \|u\| = 0 &\iff u = 0 \\ \|u + v\| &\leq \max(\|u\|, \|v\|) \\ \|v \circ u\| &\leq \|v\| \|u\| \\ \forall x \in \mathbb{Q}^* , \quad \|x u\| &= \|u\| \end{aligned}$$

On montre facilement que  $\text{Lip}(K)$  muni de cette norme est une *algèbre de Banach ultramétrique*

sur  $\mathbb{Q}$ . Il s'ensuit, en particulier, qu'une série :  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  d'opérateurs de  $\text{Lip}(K)$  est

convergente dès que  $\|u_n\|$  tend vers zéro lorsque  $n$  tend vers l'infini.

#### Proposition 1

Soit  $d$  une dérivation de  $K$  telle que  $\|d\| < 1$ , alors  $\sigma = \exp d = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^n}{n!}$

est un automorphisme de  $K$  et  $\delta = \sigma - id$  vérifie  $\|\delta\| < 1$ .

(Notations :  $d^n$  désigne la  $n$ -ième puissance de composition de  $d$  et  $id$  est l'opérateur identité sur  $K$ ).

**Preuve :**

La preuve est classique et facile à obtenir. La condition  $\|d\| < 1$  assure que la série  $\exp d$  est normalement convergente. Il s'ensuit que  $\sigma \in \text{Lip}(K)$  et la propriété ultramétrique donne :

$$\|\sigma - \text{id}\| = \|\delta\| = \|d\| < 1$$

De plus  $\sigma$  est inversible car :  $\sigma = \text{id} + \delta$  et son inverse est :

$$(\text{id} + \delta)^{-1} = \text{id} - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \dots \pm \delta^n + \dots$$

Montrons que pour tout  $x, y$  dans  $K$  :  $\sigma(xy) = \sigma(x) \sigma(y)$ .

$$\sigma(xy) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^n(xy)}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^n \frac{\binom{n}{i}}{n!} d^i(x) d^{n-i}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^n \frac{d^i(x)}{i!} \frac{d^{n-i}(y)}{(n-i)!}$$

Les séries  $\sigma(x)$  et  $\sigma(y)$  sont commutativement convergentes (car absolument convergentes), d'où :

$$\sigma(xy) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{d^i(x)}{i!} \frac{d^j(y)}{j!} = \sigma(x) \sigma(y)$$

**Proposition 2.**

Soit  $\sigma$  un automorphisme de  $K$  tel que  $\delta = \sigma - \text{id}$  vérifie  $\|\delta\| < 1$ , alors

$$d = \log \sigma = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \delta^n \text{ est une dérivation de } K \text{ et } \|d\| < 1.$$

**Preuve.**

La condition  $\|\delta\| < 1$  assure que la série  $\log \sigma$  est normalement convergente. Il s'ensuit que  $d \in \text{Lip}(K)$  et  $\|d\| = \|\delta\| < 1$ .

Montrons que pour tout  $x, y$  dans  $K$  :  $d(xy) = d(x)y + x d(y)$ .

Considérons le  $\mathbb{Q}$ -espace de Banach :  $\widehat{K \otimes K}$  muni de la norme P. T. T. (produit tensoriel topologique).

Il est obtenu de la manière suivante :

On introduit sur l'espace vectoriel  $K \otimes K$  la semi-norme :

$$|z| = \inf_{\mathcal{Q}} \max_i (|x_i| |y_i|), \quad z \in K \otimes K$$

la borne inférieure étant prise sur tous les systèmes finis  $(x_i, y_i)$ ,  $x_i \in K, y_i \in K$  tels que  $z = \sum_i x_i \otimes y_i$ . En séparant  $K \otimes K$  pour cette semi-norme et en complétant l'espace normé ainsi obtenu, on obtient :  $K \hat{\otimes}_{\mathcal{Q}} K$ .

Notons  $p : K \hat{\otimes}_{\mathcal{Q}} K \rightarrow K$  l'opérateur  $\mathcal{Q}$ -linéaire surjectif défini par :  $p(x \otimes y) = xy$ .

Cet opérateur est continu et de norme 1. Pour tout entier  $n \geq 1$ , introduisons les opérateurs  $\mathcal{Q}$ -linéaires continus :  $\delta^n \otimes \text{id}$ ,  $\text{id} \otimes \delta^n$  et  $\delta^n \otimes \delta^n$  sur  $K \hat{\otimes}_{\mathcal{Q}} K$ . Il est facile de

voir que :

$$\begin{aligned} \|\delta^n \otimes \text{id}\| &\leq \|\delta^n\| < 1 \\ \|\text{id} \otimes \delta^n\| &\leq \|\delta^n\| < 1 \\ \|\delta^n \otimes \delta^n\| &\leq \|\delta^n \otimes \text{id}\| \|\text{id} \otimes \delta^n\| < 1 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'opérateur  $\mathcal{Q}$ -linéaire sur  $K \hat{\otimes}_{\mathcal{Q}} K$

$$\Delta = \delta \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \delta + \delta \otimes \delta$$

est continu et de norme :  $\|\Delta\| \leq \|\delta\| < 1$ .

Ecrivons que  $\sigma$  est un automorphisme de  $K$ , on en déduit :

$$\forall x, y \in K, \quad \delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) + \delta(x)\delta(y)$$

$$\text{soit encore :} \quad \delta \circ p = p \circ \Delta$$

$$\text{et, par itération :} \quad \forall n \geq 1, \quad \delta^n \circ p = p \circ \Delta^n.$$

Ecrivons des séries d'opérateurs linéaires normalement convergentes et utilisons la continuité du produit tensoriel ; il vient :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \delta^n \right) \circ p &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\delta^n \circ p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (p \circ \Delta^n) = \dots \\ &\dots = p \circ \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n \right) \end{aligned}$$

Dans l'anneau des séries formelles à deux variables commutatives

$$\mathbb{Q}[[X, Y]], \text{ on a : } (1+X)(1+Y) = (1+X+Y+XY).$$

$$\text{D'où } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (X+Y+XY)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} Y^n$$

Remarquons que :  $(\delta \otimes \text{id}) \circ (\text{id} \otimes \delta) = (\text{id} \otimes \delta) \circ (\delta \otimes \text{id}) = \delta \otimes \delta$

La convergence étant normale, il s'ensuit par substitution :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\delta^n \otimes \text{id}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\text{id} \otimes \delta^n)$$

Utilisons la continuité du produit tensoriel :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Delta^n = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \delta^n \right) \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \delta^n \right)$$

Ce qui permet de déduire l'égalité :

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \delta^n \right) \circ p = p \circ \left[ \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \delta^n \right) \otimes \text{id} \right] + p \circ \left[ \text{id} \otimes \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \delta^n \right) \right]$$

ce qui s'écrit :  $d \circ p = p \circ (d \otimes \text{id}) + p \circ (\text{id} \otimes d)$ .

C'est-à-dire, pour tout  $x, y$  dans  $K$  :  $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ .

q. e. d.

Il est facile de voir, en procédant par substitution, comme dans [N. B.], chap 2, page 51, prop. 1, que les fonctions exponentielle et logarithme ainsi définies sont réciproques l'une de l'autre. Ce qui s'énonce :

**Corollaire 3.**

Les propositions 1 et 2 définissent une correspondance bijective entre les dérivations de  $K$  de norme strictement inférieure à 1 et les automorphismes  $\sigma$  de  $K$  tels que :

$$\|\sigma - \text{id}\| < 1.$$

Lorsque les opérateurs linéaires commutent, on peut utiliser les règles classiques pour les fonctions exponentielle et logarithme. En particulier, si le corps  $K$  est non commutatif et si  $d$  est une dérivation intérieure induite par  $x \in K$ , on peut écrire :  $d = x_L \cdot x_R$  où  $x_L$  et  $x_R$  désignent respectivement les opérateurs multiplication à gauche et à droite par  $x$ . Il est clair que ces opérateurs commutent, et si de plus  $|x| < 1$ , on peut écrire :

$$\sigma = \exp d = (\exp x_L) \circ (\exp \cdot x_R) = (\exp x)_L \circ (\exp \cdot x)_R$$

Ce qui montre que  $\sigma$  est l'automorphisme intérieur induit par  $\exp x$ . On procède de même avec le logarithme d'un automorphisme intérieur convenable. On obtient :

**Corollaire 4.** ( $K$  non commutatif).

Si  $d$  est une dérivation intérieure induite par  $x \in K$ , tel que  $|x| < 1$ , alors  $\sigma = \exp d$  est l'automorphisme intérieur induit par  $\exp x$ . Réciproquement, si  $\sigma$  est un automorphisme intérieur induit par  $x \in K$  tel que  $|x - 1| < 1$ , alors  $d = \log \sigma$  est la dérivation intérieure induite par  $\log x$ .

**Exemples et Applications.**

Dans les exemples cités, la valuation du corps  $K$  est discrète ; cette particularité n'est due qu'aux préoccupations actuelles de l'auteur.

**1. Exemple commutatif.**

Soit  $K$  un corps local commutatif de corps résiduel  $k$  de caractéristique nulle. La valeur absolue sur  $K$  est définie par la valuation discrète  $v$  de  $K$ . Si  $X$  est une uniformisante de la valuation, le corps  $K$  s'identifie au corps  $k((X))$  des séries de Laurent. Il est bien connu que les  $k$ -dérivations continues de  $K$  sont de la forme :  $d = x \partial_X$  où  $x \in k((X))$  et  $\partial_X$  désigne la dérivée classique par rapport à la variable  $X$ . La condition  $\|d\| < 1$  s'écrit ici :  $v(x) > 1$ . Les  $k$ -automorphismes continus de  $K$  sont les substitutions du type :

$$\sigma : x \rightsquigarrow \sigma(x) = x \circ \sigma(X) \text{ où } \sigma(X) \in k((X)) \text{ et } v(\sigma(X)) = 1. \text{ La condition } \|\sigma - \text{id}\| < 1 \text{ s'écrit ici : } v(\sigma(X) - X) > 1.$$

## 2. Exemple non commutatif.

Soit  $K = k((Y))((X, \partial_Y))$  le corps local non commutatif des séries de Laurent en la variable  $X$  à coefficients dans le corps commutatif, de caractéristique nulle  $k((Y))$ . L'addition des séries est classique et si l'opérateur  $\partial_Y$  est la dérivée partielle par rapport à la variable  $Y$ , le produit est obtenu dans le corps  $K$  par induction à partir de la loi :

$$Xx - xX = X \partial_Y(x) X, \text{ pour tout } x \in K.$$

La valeur absolue sur  $K$  est définie à partir de la fonction d'ordre  $o$  attachée à la variable  $X$  et le centre de  $K$  est le corps  $k$ . La dérivée partielle  $\partial_Y$  est une  $k$ -dérivation intérieure induite par  $X^{-1}$  et de norme 1. Nous renvoyons à [R. V.] pour plus de précisions sur ces points. Le problème suivant se pose alors de façon naturelle :

### Problème.

Déterminer toutes les  $k$ -dérivations continues et tous les  $k$ -automorphismes continus de  $K$ .

Nous nous contentons pour l'instant de considérer quelques cas particuliers.

Si  $d$  est une  $k$ -dérivation continue de  $K$ , la condition  $\|d\| < 1$  s'écrit :

$$\inf_{x \neq 0} (o(d(x)) - o(x)) > 0.$$

a) Prenons pour  $d$  la dérivation intérieure :

$$d(x) = Xx - xX = X \partial_Y(x) X, \quad x \in K$$

alors  $\|d\| < 1$  et  $\sigma = \exp d$  est l'automorphisme intérieur :  $x \rightsquigarrow (\exp X) x (\exp - X)$ .

Si  $\partial_{X^{-1}}$  est l'opérateur dérivée partielle par rapport à la variable  $X^{-1}$ , un calcul simple montre que :  $xY - Yx = -\partial_{X^{-1}}(x)$ , pour tout  $x \in K$ . Il s'ensuit que  $\sigma$  est l'automorphisme qui vérifie :  $\sigma(X) = X$  et  $\sigma(Y) = Y + X^2$ .

b) Prenons pour  $d$  la dérivation intérieure :

$$d(x) = Yx - xY = \partial_{X^{-1}}(x), \quad x \in K$$

alors  $\|d\| < 1$  et  $\sigma = \exp d$  est l'automorphisme intérieur :  $x \rightsquigarrow (\exp Y) x (\exp - Y)$ .

Il s'agit de l'automorphisme  $\sigma$  qui vérifie :  $\sigma(Y) = Y$  et  $\sigma(X) = \frac{X}{1+X}$ .



Enfin, les deux exemples qui suivent montrent que l'on peut construire une dérivation *non-intérieure* de  $K$  en prenant le logarithme d'un automorphisme intérieur. Remarquons d'abord que si  $\sigma$  est un  $k$ -automorphisme continu de  $K$ , la condition  $\|\sigma - \text{id}\| < 1$  s'écrit :  $\inf_{x \neq 0} (\sigma(x) - x) \cdot \sigma(x) > 0$ .

$x \neq 0$

c) Prenons pour  $\sigma$  l'automorphisme intérieur :

$$\sigma(x) = XxX^{-1}, \quad x \in K$$

alors  $\sigma - \text{id} = X \partial_Y$ , donc  $\|\sigma - \text{id}\| < 1$ . Mais on peut écrire :

$\sigma = \text{id} + X \partial_Y = (\text{id} - \partial_Y X)^{-1}$ . Il s'ensuit que  $d = \log \sigma$  est la dérivation :

$$d = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n \partial_Y^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \partial_Y^n X^n$$

Cette dérivation, qui vérifie  $d(X) = 0$  et  $d(Y) = X$ , n'est pas intérieure. En effet, sinon il existerait  $x \in K$  tel que :  $d = x_L - x_R$ ; mais alors :  $0 = d(X^{-1}) = xX^{-1} - X^{-1}x = \partial_Y(x)$  et  $X = d(Y) = xY - Yx = -\partial_{X^{-1}}(x)$ . Ceci montre que  $x \in k((X))$  d'une part et que

$\partial_X(x) = X^{-1}$ , ce qui est impossible d'autre part.

d) Prenons pour  $\sigma$  l'automorphisme intérieur :

$$\sigma(x) = YxY^{-1}, \quad x \in K$$

alors  $\sigma - \text{id} = \partial_{X^{-1}} Y^{-1}$ , donc  $\|\sigma - \text{id}\| < 1$ . Mais on peut écrire :

$\sigma = \text{id} + \partial_{X^{-1}} Y^{-1} = (\text{id} - Y^{-1} \partial_{X^{-1}})^{-1}$ . Il s'ensuit que  $d = \log \sigma$  est la dérivation :

$$d = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \partial_{X^{-1}}^n Y^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} Y^{-n} \partial_{X^{-1}}^n$$

Un raisonnement analogue au précédent montre que cette dérivation, qui vérifie :

$d(Y) = 0$  et  $d(X^{-1}) = Y^{-1}$ , n'est pas intérieure.

La connaissance d'une dérivation non-intérieure  $d$  sur le corps  $K$  permet de construire une extension transcendante de ce corps selon un corps local, non commutatif :  $K((Z, d))$ .

Il s'agit du corps des séries de Laurent en  $Z$  à coefficients dans  $K$  dans lequel l'addition des séries est classique et le produit est obtenu par induction à partir de la loi :

$$Zx - xZ = Z d(x)Z, \quad \text{pour tout } x \in K.$$

La dérivation  $d$  se prolonge au nouveau corps selon une dérivation intérieure induite par  $Z^{-1}$ .

Remarquons que dans l'exemple c) la variable  $Z^{-1}$  s'identifie formellement à  $\log X^{-1}$ , et dans l'exemple d) la variable  $Z^{-1}$  s'identifie formellement à  $\log Y^{-1}$ .

#### REFERENCES

- [N. B.] N. BOURBAKI. Groupes et algèbres de Lie. Chap. 2, 3. Hermann, Paris (1972).  
 [R. V.] R. VIDAL. Anneaux de valuation discrète complets non commutatifs.  
 Trans. Amer. Math. Soc. Vol 267, n<sup>o</sup> 1 (1981).

Université de Clermont II, U.E.R. Sciences, Mathématiques Pures, 63170 - Aubière, France.

*Adresse personnelle* : Flat, 63500 - Issoire, France.