ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

BERNARD BRUNET

Espaces de convergence localement compacts et espaces topologiques de Kelley

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 73, série *Mathématiques*, n° 21 (1982), p. 59-65

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__73_21_59_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 21, 1982, pp. 59-65

ESPACES DE CONVERGENCE LOCALEMENT COMPACTS ET ESPACES TOPOLOGIQUES DE KELLEY

Bernard BRUNET

Université de CLERMONT II

0. Introduction.

Dans un précédent article (1), nous avons défini une application propre d'un espace de convergence (X, q) dans un espace de convergence (X', q') comme étant une application continue f de (X, q) dans (X', q') telle que, pour tout ultrafiltre Φ sur X et toute valeur limite x' pour q' de l'ultrafiltre image $f_* \Phi$, il existe une valeur limite x pour q de Φ telle que $x' = f(x)$, et nous avons montré notamment comment une telle définition permettait de prouver simplement le théorème d'extension propre d'une application continue d'un espace topologique localement compact dans un autre de G.T. WHYBURN.

Dans le présent article, aprés avoir établi que tout espace topologique de Kelley pouvait être considéré comme associé à un espace de convergence localement compact (4), nous montrerons comment la notion introduite d'une application propre d'un espace de convergence dans un autre permet de prouver que le produit d'un espace topologique de Kelley par l'espace topologique associé à un espace de convergence compact est un espace de Kelley et par là, de retrouver le fait (2 et 3) que le produit d'un espace topologique de Kelley par un espace topologique localement compact est un espace de Kelley.

1. Préliminaires.

Reprenant les notations utilisées dans (1), nous désignerons :

- pour toute topologie T sur X, par q_T la structure de convergence associée à T.
- pour tout ensemble $\{q_i ; i \in I\}$ de structures de convergence sur X, par $\sup_{i \in I} q_i$ la structure de convergence sur X définie par

$$\Phi (\sup_{i \in I} q_i) x \iff \forall i \in I, \quad \Phi q_i x$$

et par $\inf_{i \in I} q_i$ la structure de convergence sur X définie par

$$\Phi (\inf_{i \in I} q_i) x \iff \exists i \in I, \quad \Phi q_i x.$$

- pour toute application f de X dans X' et toute structure de convergence q' (resp. topologie T') sur X', par $f^* q'$ (resp. $f^* T'$) la structure de convergence induite de q' (resp. topologie induite de T') par f.
- pour toute application f de X dans X' et toute structure de convergence q (resp. topologie T) sur X, par $f_* q$ (resp. $f_* T$) la structure de convergence coïnduite de q (resp. topologie coïnduite de T) par f.
- pour toutes structures de convergence q_1 sur X_1 et q_2 sur X_2, par $q_1 \times q_2$ leur structure de convergence produit.
- pour toute structure de convergence q sur X, par $\tau(q)$ la topologie associée à q, c'est-à-dire la topologie dont les ouverts sont les parties O de X telles que, pour tout point x de O et tout filtre Φ sur X convergeant pour q vers x, O appartienne à Φ, et dont les fermés sont les parties F de X telles que, pour tout filtre sur F convergeant pour q vers x, x appartienne à F.

D'autre part, $\mathcal{P}$ étant une propriété topologique, nous dirons qu'un objet (morphisme) de la catégorie Conv des espaces de convergence possède la propriété $\tau . \mathcal{P}$ si et seulement si son image par le foncteur τ de la catégorie Conv dans la catégorie des espaces topologiques possède la propriété $\mathcal{P}$.

Proposition 1.1

Pour tout ensemble $\{q_i \ ; \ i \in I\}$ de structures de convergence sur X,

i) $\tau(\inf_{i \in I} q_i) = \inf_{i \in I} \tau(q_i)$

ii) $\tau(\sup_{i \in I} q_i)$ *est plus fine que* $\sup_{i \in I} \tau(q_i)$.

Démonstration :

i) Comme, pour tout i, q_i est plus fine que $\inf_{i \in I} q_i$, pour tout i, $\tau(q_i)$ est plus fine que $\tau(\inf_{i \in I} q_i)$ et par suite, $\inf_{i \in I} \tau(q_i)$ est plus fine que $\tau(\inf_{i \in I} q_i)$.

Soient alors 0 un ouvert pour $\inf_{i \in I} \tau(q_i)$, x un point de 0, Φ un filtre sur X tel que $\Phi (\inf_{i \in I} q_i)\, x$. Il existe alors un indice i tel que $\Phi\, q_i\, x$. 0 étant un ouvert pour $\tau(q_i)$, on en déduit que 0 appartient à Φ et par suite que 0 est un ouvert pour $\tau(\inf_{i \in I} q_i)$.

ii) Se prouve de façon analogue à la première partie de i).

Proposition 1.2

i) Pour toute application f de X dans X' et toute structure de convergence q sur X,

$\tau(f_* q) = f_* \tau(q)$.

ii) Pour tout plongement ouvert ou fermé f de (X,q) dans (X',q'), $\tau(q) = f^* \tau(q')$.

Démonstration :

i) f étant une application continue de (X, q) dans (X', $f_* q$), $f_* \tau(q)$ est plus fine que $\tau(f_* q)$.

Soient alors 0' un ouvert pour $f_* \tau(q)$, x' un point de 0', Φ' un filtre sur X' tel que $\Phi' f_* q\, x'$. Il existe un filtre Φ sur X et un point x de X tels que Φ' soit plus fin que $f_* \Phi$, $x' = f(x)$ et $\Phi q\, x$. Comme x appartient à $\overset{-1}{f}(0')$ et comme $\overset{-1}{f}(0')$ est ouvert pour $\tau(q)$, $\overset{-1}{f}(0')$ appartient à Φ et par suite 0' à $f_* \Phi$ donc à Φ', 0' est donc un ouvert de

$\tau(f_* q)$.

ii) f étant une application continue de (X,q) dans (X',q'), τ (q) est plus fine que $f^* \tau(q')$.

Soit alors 0 un ouvert (fermé) de τ (q). f étant ouverte (fermée), f(0) est un ouvert (fermé) de τ (q'), et par suite, puisque f est injective, 0 un ouvert (fermé) de $f^* \tau(q')$.

<u>Rappelons enfin (1) que :</u>

- Pour tout espace de convergence (X',q') et tout espace de convergence compact (X,q), l'application projection pr_1 est une application propre de (X' × X, q' × q) dans (X', q').

- Toute application propre d'un espace de convergence dans un autre est τ -propre.

2. Espaces de convergence localement compacts.

Nous dirons qu'un espace de convergence séparé (X, q) est localement compact si et seulement si, pour tout point x de X et pour tout filtre Φ sur X convergeant pour q vers x, il existe un compact de (X, q) contenant x et appartenant à Φ .

Il est immédiat que tout espace de convergence compact, que le produit de deux espaces de convergence localement compacts sont des espaces de convergence localement compacts.

Proposition 2.1

La catégorie des espaces de convergence localement compacts est une sous-catégorie coréflexive de la catégorie des espaces de convergence séparés.

Montrons pour cela qu'à tout espace de convergence séparé (X, q), on peut associer un espace de convergence localement compact qui soit couniversel.

$\mathscr{K}$ (q) désignant l'ensemble des parties compactes de (X, q), et pour toute partie compacte K de (X, q), k l'injection canonique de K dans X, posons $\hat{q} = \inf\limits_{K \in \mathscr{K}(q)} k_* k^* q$.

$\hat{q}$ est (v.f) une structure de convergence localement compacte plus fine que q. Montrons que (X, $\hat{q}$) est l'espace localement compact couniversel associé à (X, q), c'est-à-dire que, pour tout espace de convergence localement compact (X',q') et toute application f de X' dans X, f est une application continue de (X',q') dans ($\hat{X}$, $\hat{q}$) si et seulement si f est une application continue de (X', q') dans (X, q). Comme $\hat{q}$ est plus fine que q, il suffit de prouver que si f est continue de (X', q') dans (X, $\hat{q}$), elle l'est également de (X', q') dans ($\hat{X}$, $\hat{q}$).

Soit alors Φ' un filtre sur X' convergeant pour q' vers x'.
Comme (X', q') est localement compact, Φ' contient un compact K' de (X', q') contenant x'. f(K') est alors un compact de (X, q) contenant f(x') et appartenant à $f_* \Phi'$. Comme d'autre part $f_* \Phi'$ converge pour q vers f(x'), on en déduit que $f_* \Phi'$ converge pour $\hat{q}$ vers f(x'), d'où le résultat.

Corollaire 2.2

La catégorie des espaces de convergence localement compacts est initiallement structurée et cartésienne fermée.

C'est en effet une sous-catégorie coréflexive, stable par produits finis de la catégorie des espaces de convergence séparés qui est elle-même initiallement structurée et cartésienne fermée (5).

3. Espaces de convergence localement compacts et espaces de Kelley

Proposition 3.1

Un espace topologique (X, T) est un espace de Kelley si et seulement s'il existe une structure de convergence q sur X telle que (X, q) soit localement compact et $T = \tau(q)$.

C. N. : Soit $(X, \hat{q}_T)$ l'espace de convergence localement compact couniversel associé à (X, q_T).
D'après 1.1 et 1.2, $\tau(\hat{q}_T) = \inf_{K \in \mathcal{K}(T)} k_* k^* T$, d'où puisque (X,T) est de Kelley,
$\tau(\hat{q}_T) = T$.

C. S. : Soit F une partie de X telle que, pour toute partie compacte K de (X,T), $K \cap F$ soit une partie fermée de (X,T) et soit Φ un filtre sur F convergeant pour q vers x. (X,q) étant localement compact, il existe une partie compacte K de (X,q) et par suite de (X,T) contenant x et appartenant à Φ. Φ induit alors un filtre sur $K \cap F$. $K \cap F$ étant fermé, on en déduit que x appartient à $K \cap F$ donc en particulier à F. F est par suite une partie fermée de $(X, \tau(q))$, donc de (X,T).

Corollaire 3.2.

La catégorie des espaces topologiques de Kelley est une sous-catégorie de la catégorie des espaces de convergence localement compacts.

Proposition 3.3

Si (X, q) est un espace de convergence compact τ-séparé, (X',T') un espace topologique de Kelley, et si $\hat{q}_{T'}$ désigne la structure de convergence localement compacte couniverselle associée à $q_{T'}$, $\tau(\hat{q}_{T'} \times q) = T' \times \tau(q)$.

Comme $\tau(\hat{q}_{T'} \times q)$ est plus fine que $\tau(\hat{q}_{T'}) \times \tau(q)$, c'est-à-dire puisque (X',T') est de Kelley, que $T' \times \tau(q)$, il suffit de montrer que $\tau(\hat{q}_{T'} \times q)$ est moins fine que $T' \times \tau(q)$. Soit 0 un ouvert de $\tau(\hat{q}_{T'} \times q)$. Supposons que 0 ne soit pas ouvert pour $T' \times \tau(q)$. Il existe alors (x', x) appartenant à 0 et un ultrafiltre Φ sur $X' \times X$ convergeant pour $T' \times \tau(q)$ vers (x', x) et contenant $\complement 0$. Comme (X, q) est compact, la première projection pr_1 est une application propre de $(X' \times X, \hat{q}_{T'} \times q)$ dans $(X', \hat{q}_{T'})$ et par suite τ-propre de $(X' \times X, \tau(\hat{q}_{T'} \times q))$ dans (X', T').
Comme $(pr_1)_* \Phi$ converge pour T' vers x', on en déduit qu'il existe un point y de X tel que Φ converge pour $\tau(\hat{q}_{T'} \times q)$ vers (x', y).
Comme la seconde projection pr_2 est une application continue de $(X' \times X, \hat{q}_{T'} \times q)$ dans (X, q) et par suite de $(X' \times X, \tau(\hat{q}_{T'} \times q))$ dans $(X, \tau(q))$, comme $(pr_2)_* \Phi$ converge pour $\tau(q)$ vers x, et comme $(X, \tau(q))$ est séparé, on en déduit que $y = x$. Il en résulte que Φ converge pour $\tau(\hat{q}_{T'} \times q)$ vers (x', x). 0 appartient par suite à Φ, ce qui est impossible, puisque par construction $\complement 0$ appartient à Φ.

Corollaire 3.4

Si (X', T') est un espace topologique de Kelley et si (X, T) est un espace topologique localement compact, $(X' \times X, T' \times T)$ est un espace de Kelley.

Soit $(X', \hat{q}_{T'})$ l'espace localement compact couniversel associé à $(X', q_{T'})$.
$(X' \times X, \hat{q}_{T'} \times q_T)$ est par construction un espace de convergence localement compact. Montrons que $\tau(\hat{q}_{T'} \times q_T) = T' \times T$. Soit $(i, (\tilde{X}, \tilde{T}))$ le compactifié d'Alexandroff de (X,T) de point à l'infini ω. Comme $q_T = i^* q_{\tilde{T}}$ et comme i est un plongement ouvert de (X,T) dans $(\tilde{X}, \tilde{T})$, $\tau(\hat{q}_{T'} \times q_T) = (Id_{X'} \times i)^* \tau(\hat{q}_{T'} \times q_{\tilde{T}})$, soit d'après 3.3,

$\tau(\hat{q}_{T'} \times q_T) = (Id_{X'} \times i)^*(T' \times \tilde{T})$, d'où le résultat, puisque

$(Id_{X'} \times i)^*(T' \times \tilde{T}) = T' \times i^*\tilde{T}$ et $i^*\tilde{T} = T$.

REFERENCES

(1) B. BRUNET : *Sur la classe des morphismes propres dans la catégorie des espaces de convergence.* Annales scientifiques de l'Université de Clermont, Série Math., Fasc 16, 1978, pages 107 à 120.

(2) J. DUGUNDJI : *Topology.* Allyn and Bacon, Boston, Mass., 1966.

(3) Peter GABRIEL and Michel ZISMAN : *Calculus of fractions and homotopy theory.* Springer Verlag, page 47.

(4) D.C. KENT and G.D. RICHARDSON : *Locally compact convergence spaces .* Michigan. Math. J. 22, (1975), pages 353 à 360.

(5) L.D. NEL : *Initially structured catégories and Cartesian closedness.* Canadan. J. Math, Vol XXVII, 6, (1975), pages 1361 à 1377.