ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

PAUL-JEAN CAHEN
FULVIO GRAZZINI
YOUSSEF HAOUAT

Intégrité du complété et théorème de Stone-Weierstrass

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 73, série *Mathématiques*, n° 21 (1982), p. 47-58
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__73_21_47_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 21, 1982, pp. 47-58

INTEGRITE DU COMPLETE ET THEOREME DE STONE-WEIERSTRASS

Paul-Jean CAHEN, Fulvio GRAZZINI et Youssef HAOUAT

Résumé :

Si la clôture A' d'un anneau intègre A, local, noethérien et de dimension 1, est un A-module de type fini, on montre que les assertions suivantes sont équivalentes : a) A' est local, b) le complété $\hat{A}$ de A est intègre, c) l'anneau des polynômes à valeurs entières sur A est dense dans l'anneau des fonctions continues de $\hat{A}$ sur lui-même. Ceci fournit une généralisation du théorème de Stone-Weierstrass, bien connu dans le cas où A est un anneau de valuation discrète. On donne un contre-exemple dans le cas où A' n'est pas de type fini.

Summary :

In the case where the integral closure A' of a local, Noetherian, dimension 1 domain A is a finitely generated A-module, we show that the following assertions are equivalent : a) A' is a local ring, b) the completion $\hat{A}$ of A is a domain, c) the ring of integral valued polynomials over A is dense in the ring of continuous functions from $\hat{A}$ to itself. This gives a generalisation of the Stone-Weierstrass theorem, which is well-known in the case where A is a discrete valuation ring. We give a counterexample in the case where A' is not finitely generated.

INTRODUCTION :

Si A désigne un anneau de valuation discrète de corps des fractions K, il est classique que l'anneau des polynômes $K[X]$ est dense dans l'anneau des fonctions continues du complété $\hat{A}$ de A à valeurs dans son corps des fractions $\hat{K}$ [(3) V §5 Exercices] [cf. aussi (5)] .

Si, plus généralement A est un anneau noethérien, local, d'idéal maximal $\mathfrak{M}$ on peut considérer le complété $\hat{A}$ de A pour la topologie $\mathfrak{M}$-adique. Pour que $\hat{A}$ soit compact, il faut que le corps résiduel $A/\mathfrak{M}$ soit fini ; mais $\hat{A}$ n'est pas nécessairement intègre. Pour généraliser le théorème de Stone-Weierstrass, on cherche alors à quelles conditions l'anneau A_S des polynômes à valeurs entières (c'est-à-dire qui prennent sur A leurs valeurs dans A) est dense dans l'anneau $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$ des fonctions continues de $\hat{A}$ dans $\hat{A}$; il est nécessaire que A soit un anneau de dimension 1 [(4) § 6 Remarque 6.2].

On montre dans ce cas que si la clôture intègrale A' de A est un A module de type fini, on a de façon équivalente : A' est local, $\hat{A}$ est intègre, A_S est dense dans $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$.

Si A n'est pas intégralement clos, on voit alors que A_S n'est pas contenu dans A'_S.

On donne enfin un exemple où A' est local, mais n'est pas un A module de type fini ; pour cet exemple, $\hat{A}$ n'est pas intègre et A_S n'est pas dense dans $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$.

1. Topologie « $\mathfrak{M}$-adique» de K.

On désigne par A un anneau intègre de corps de fractions K, noethérien, de radical $\mathfrak{M}$ et de dimension 1.

Les idéaux $\mathfrak{M}^k$ sont des sous-groupes du groupe K. Ils forment une filtration de K et définissent ainsi une topologie, qu'on appelle topologie « $\mathfrak{M}$-adique» : les $\mathfrak{M}^k$ constituent un système fondamental de voisinages de l'origine [(3), III] (observons que la topologie $\mathfrak{M}$-adique usuelle du A module K est la topologie grossière). Muni de cette topologie, K est un groupe topologique et même un anneau topologique, car le produit est continu sur $K \times K$
En effet :

$$xy - x'y' = x(y - y') + y'(x - x')$$

avec

$$x = \frac{a}{d} \quad \text{et } y' = \frac{a'}{d'}$$

Puisque A est noethérien et de dimension 1, il existe deux entiers naturels n_1 et n_2

tels que : $\mathfrak{M}^{n_1} \subset Ad$ et $\mathfrak{M}^{n_2} \subset Ad'$

donc si $y - y' \in \mathfrak{M}^{n_1 + n}$ et $x - x' \in \mathfrak{M}^{n_2 + n}$, alors $xy - x'y'$ appartient à $\mathfrak{M}^n$.

Proposition préliminaire :

On appelle A' la clôture intégrale de A et $\mathfrak{M}'$ *le radical de A' où A est un anneau noethérien, de dimension 1, de radical* $\mathfrak{M}$ *. Soit B un anneau tel que* $A \subset B \subset A'$ *et qui est un A module de type fini. Soit* $\mathfrak{N}$ *le radical de B. Alors les topologies «* $\mathfrak{M}$*-adique» et «* $\mathfrak{N}$ *-adique» de K coïncident.*

Preuve :

Comme B est un A module de type fini, il existe d dans A tel que $dB \subset \mathfrak{M}$. Puisque B est noethérien et de dimension 1, il existe un entier k strictement positif tel que :

$$\mathfrak{N}^k \subset dB \subset \mathfrak{M}$$

Puisque A est noethérien et de dimension 1, il existe un entier strictement positif k_1 tel que $\mathfrak{M}^{k_1} \subset \mathfrak{N}^k$. Ainsi, quel que soit l'entier naturel n, on a les inclusions :

$$\mathfrak{M}^{k_1 n} \subset \mathfrak{N}^{k\,n} \subset \mathfrak{M}^n$$

2. Intégrité du complété.

On suppose désormais A local.

On note $\hat{A}$ et $\hat{K}$ les complétés respectifs de A et K pour la topologie $\mathfrak{M}$-adique. On a alors :

Proposition :

Soit A un anneau noethérien local, intègre, de dimension 1. On suppose que A' est un A module de type fini.

Alors si $\hat{A}$ *est intègre, A' est local.*

Soit S la partie multiplicative formée par les éléments non nuls de A. Si $\hat{A}$ est intègre, $S^{-1}\hat{A}$ est intègre et contient $\hat{A}$.

$S^{-1}\hat{A}$ est un anneau topologique pour la topologie $\hat{\mathfrak{M}}$-adique dont les voisinages de l'origine sont les $\hat{\mathfrak{M}}^k$ et qui induit sur K la topologie $\mathfrak{M}$ -adique.

On voit que K est dense dans $S^{-1}\hat{A}$ qui est complet.

On a donc :

$$\hat{K} = S^{-1}\hat{A}.$$

Soit maintenant B un anneau tel que : $A \subset B \subset A'$ et qui est un A module de type fini ; B est un anneau semi-local [6], d'idéaux maximaux $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_r$.

On a pour tout k :

$$B/_{\mathfrak{P}^k} = \prod_{i=1}^{r} B/_{\mathfrak{P}_i^k}$$

donc

$$\hat{B} = \varprojlim (B/_{\mathfrak{P}^k}) = \prod_{i=1}^{r} \hat{B}_i$$

où $\hat{B}_i$ est le complété de B pour la topologie $\mathfrak{P}_i$-adique.

Mais B est un sous-anneau de K et d'après la proposition préliminaire, la topologie $\mathfrak{M}$-adique de K coïncide avec la topologie $\mathfrak{P}$-adique, donc $\hat{B} \subset \hat{K}$ et nécessairement $\hat{B}$ est intègre.

Donc B est local.

Comme ceci est vrai pour tout sous-anneau B de A' qui est un A-module de type fini, alors A' est local.

3. Stone - Weierstrass - Condition nécessaire.

Soit $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$ l'ensemble des fonctions continues de $\hat{A}$ dans $\hat{A}$; A_S l'ensemble des polynômes à valeurs entières, c'est-à-dire :

$$A_S = \{ P \in K[X] \ / \ P(A) \subset A \}$$

Tout élément de A_S peut être considéré comme une application uniformément continue de A dans A. Comme $\hat{A}$ est complet et séparé, cette application est prolongeable par continuité à $\hat{A}$ tout entier [4]. Ainsi l'anneau A_S s'injecte dans l'anneau $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$.

On suppose le corps résiduel $A/_{\mathfrak{M}}$ fini : c'est une condition nécessaire pour que $\hat{A}$ soit compact.

On dira que «A est S - W» (Stone - Weierstrass) si A_S est dense dans $\mathscr{C}(\hat{A}, \hat{A})$. Chabert

[4] a démontré qu'une condition nécessaire est que A soit de dimension 1. On établit ici une condition supplémentaire :

Proposition :

Soit A un anneau noethérien, local, intègre, de dimension 1, de corps résiduel fini. Pour que A soit S-W, il faut que $\hat{A}$ soit intègre.

On notera $\chi_{\hat{\mathfrak{m}}^k}$ la fonction caractéristique de $\hat{\mathfrak{m}}^k$ dans $\hat{A}$ et $\chi_{\mathfrak{m}^k}$ la fonction caractéristique de $\mathfrak{m}^k$ dans A.

Puisque A est S-W, $\chi_{\hat{\mathfrak{m}}^k}$ est approché par un polynôme f de A_S. On a donc, en particulier, sur A :

$$f(x) \in \mathfrak{m} \quad \text{si } x \notin \mathfrak{m}^k$$

$$f(x) \in 1 + \mathfrak{m} \quad \text{si } x \in \mathfrak{m}^k$$

Soit $\mathfrak{m}_1$ un des idéaux maximaux de A'.

Alors $A'_{\mathfrak{m}_1}$ est un anneau de valuation discrète.

Le polynôme f est également une fonction continue sur $A'_{\mathfrak{m}_1}$ à valeurs dans K, pour la topologie $\mathfrak{m}_1$-adique. Comme $f(0) \in 1 + \mathfrak{m}_1$ (car $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_1$), alors dans un voisinage $\mathfrak{m}_1^{k_1}$ de 0, on a encore :

$$f(x) \in 1 + \mathfrak{m}_1 \quad \text{si } x \in \mathfrak{m}_1^{k_1}$$

et donc en particulier $x \in \mathfrak{m}^k$ (sinon $f(x) \in \mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_1$)

D'où

$$\mathfrak{m}_1^{k_1} \cap A \subset \mathfrak{m}^k$$

et comme A est de dimension 1, il existe un entier r, tel que :

$$\mathfrak{m}^r \subset \mathfrak{m}_1^{k_1} \cap A \subset \mathfrak{m}^k.$$

Ainsi la topologie $\mathfrak{m}_1$ adique de $A'_{\mathfrak{m}_1}$ induit sur A la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Si

$\hat{A}'_{\mathfrak{M}_1}$ désigne le complété de $A'_{\mathfrak{M}_1}$ pour la topologie $\mathfrak{M}_1$ adique, on a donc :

$$\hat{A} \subset \hat{A}'_{\mathfrak{M}_1}$$

Or $\hat{A}'_{\mathfrak{M}_1}$ est intègre (car $A'_{\mathfrak{M}_1}$ est un anneau de valuation discrète) donc $\hat{A}$ est intègre.

4. Stone - Weierstrass - Condition suffisante.

Proposition :

Pour que A soit S-W, il suffit que A' soit local et un A-module de type fini.

Il suffit de montrer que les fonctions caractéristiques $\chi_{a+\hat{\mathfrak{M}}^n}$ $(a \in \hat{A})$ peuvent être approchées par des polynômes de A_S : en effet, une fonction continue de $\hat{A}$ dans $\hat{A}$ est approchée par une fonction localement constante qui est une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques de $\hat{A}$. ($\hat{A}$ est compact, puisque $A/_{\mathfrak{M}}$ est fini).

Il suffit d'approcher $\chi_{\hat{\mathfrak{M}}^n}$ par des polynômes de A_S, car alors par translation, on peut approcher $\chi_{a+\hat{\mathfrak{M}}^n}$.

Il suffit d'approcher $\chi_{\mathfrak{M}^n}$ par des polynômes de A_S, car A étant dense dans $\hat{A}$, on peut alors approcher $\chi_{\hat{\mathfrak{M}}^n}$.

Pour approcher $\chi_{\mathfrak{M}^n}$, modulo $\mathfrak{M}^k$, il suffit de le faire modulo $\mathfrak{M}$. En effet, si $f \in A_S$ approche $\chi_{\mathfrak{M}^n}$ modulo $\mathfrak{M}$, on a :

$$f(x) \in 1 + \mathfrak{M} \text{ si } x \quad \mathfrak{M}^n$$

$$f(x) \in \mathfrak{M} \text{ si } x \notin \mathfrak{M}^n$$

Et comme $A/_{\mathfrak{M}}$ est fini, il existe $p \in \mathbf{Z}$, tel que $p \in \mathfrak{M}$.

Mais alors, f^p approche $\chi_{\mathfrak{M}^n}$, modulo $\mathfrak{M}^2$, et par récurrence, on montre que $f^{p^{k-1}}$ approche $\chi_{\mathfrak{M}^n}$, modulo $\mathfrak{M}^k$.

Il reste donc à montrer que $\chi_{\mathfrak{M}^n}$ peut être approché par un polynôme de A_S, modulo $\mathfrak{m}$, sous les hypothèses de la proposition.

Comme A' est de type fini sur A, il existe k tel que $\mathfrak{m}'^k \subset \mathfrak{m}$ et donc $\mathfrak{m}'^{kn} \subset \mathfrak{m}^n$. Comme $A/_{\mathfrak{m}^n}$ est fini, alors $\mathfrak{m}^n/_{\mathfrak{m}'^{kn}}$ est fini et $\mathfrak{m}^n$ est la réunion disjointe de translatés de $\mathfrak{m}'^{kn}$ de la forme $a_i + \mathfrak{m}'^{kn}$, en nombre fini.

Comme A' est local, c'est donc un anneau de valuation discrète ; il est par conséquent S-W [(3), V] , et on peut approcher $\chi_{a_i+\mathfrak{m}'^n}$ par f_i dans A'_S, modulo $\mathfrak{m}'^k$, donc

$$\text{si } x \in a_i + \mathfrak{m}'^n,\ f_i(x) \in 1 + \mathfrak{m}'^k \quad \text{d'où} \quad f_i(x) \in 1 + \mathfrak{m}$$
$$\text{si } x \notin a_i + \mathfrak{m}'^n \text{ et } x \in A',\ f_i(x) \in \mathfrak{m}'^k \quad \text{d'où} \quad f_i(x) \in \mathfrak{m}$$

En particulier $f_i \in A_S$ et la somme f des f_i approche $\chi_{\mathfrak{m}^n}$ modulo $\mathfrak{m}$.

On peut alors rassembler les résultats démontrés :

Théorème :

Soit A un anneau intègre, noethérien de dimension 1, local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel fini. $\hat{A}$ son complété pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Si la clôture intégrale A' de A est un A module de type fini, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) A' est local ; 2) $\hat{A}$ est intègre ; 3) A_S est dense dans $\mathscr{C}(\hat{A},\hat{A})$.

<u>Une application</u> :

Si A est noethérien, local, de dimension 1, si A' est local et de type fini sur A, alors $A_S \not\subset A'_S$.

D'après la proposition préliminaire, A est un ouvert fermé de A' et la fonction g de A' dans A' définie par :

$$g(x) = a \quad \text{si } x \in A$$
$$g(x) = 1 \quad \text{si } x \notin A,\ x \in A'$$

est continue.

On choisit a tel que $a \in A$ mais $a^{-1} \notin A$

(donc $a^{-1} \notin A'$).

Il existe deux entiers naturels s et r tels que :

$$\mathfrak{m}'^r \subset \mathfrak{m}^s \subset Aa.$$

Puisque A' est un anneau de valuation discrète, il est S-W. Il existe donc un polynôme f de A_S qui approche g modulo $\mathfrak{M}'^r$:

Si $x \in A$; $f(x) \in a + \mathfrak{M}'^r$ d'où $f(x) \in a + Aa$.

Si $x \notin A$ et $x \in A'$; $f(x) \in 1 + \mathfrak{M}'^r$ d'où $f(x) \in 1 + Aa$.

Alors $a^{-1}f$ est dans A_S mais n'est pas dans A'_S.

Un exemple :

Exemple d'un anneau B où B' est local, mais n'est pas un B-module de type fini. Alors $\hat{B}$ n'est pas intègre et B_S n'est pas dense dans $\mathscr{C}(\hat{B}, \hat{B})$.

Soit k le corps des fractions rationnelles $F_p(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à une infinité d'indéterminées sur le corps premier F_p.

On considère k((U)) muni de la valuation U-adique, dont l'anneau est k [[U]] et qu'on note v.

On note :

$$T = \sum_1^{\infty} X_n U^n \quad \text{et} \quad V = T^p = \sum_1^{\infty} X_n^p U^{np}$$

U et T, ainsi que U et V sont algébriquement indépendants sur k (parce que T et V font intervenir une infinité de X_i).

Soient K = k(U, V) et L = k(U, T) = K(T),

L est une extension algébrique radicielle de K et [L : K] = p.

La restriction de v à K est une valuation discrète d'anneau A. Cette valuation a un seul prolongement à L = K(T), qui est la restriction de v à L [3]. L'anneau de la restriction de v à L est la fermeture intégrale A' de A dans L.

On note B = A [T], B est un anneau noethérien, local, d'idéal maximal $\mathfrak{n}$ de dimension 1, de corps des fractions L, A' est la clôture intégrale de B.

On peut résumer les inclusions par le diagramme :

$$\begin{tikzcd}[arrows=-]
K \arrow[rr] \arrow[d] & & L \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dr] & & k((U)) \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B = A[T] \arrow[rr] & & A' \arrow[r] & k[[U]]
\end{tikzcd}$$

Le prolongement de la valuation d'anneau A à L est unique et est une extension immédiate, c'est-à-dire d'indice de ramification $e = 1$ et de degré résiduel $f = 1$.

On a $ef = 1$, alors que le degré de l'extension est p ; A' n'est donc pas un A-module de type fini [3].

Et comme $B = A[T]$ est un A-module de type fini, A' n'est pas un B-module de type fini.

Montrons que $\hat{B}$ n'est pas intégre et que, par conséquent, B n'est pas S-W.

Soit $y_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} X_k U^k$.

Alors y_m est dans $\mathfrak{M}$ et $y_m - y_{m+1} = X_{m+1} U^{m+1}$ est dans $\mathfrak{M}^{m+1}$.

La suite $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy dans B et converge vers un élément y de $\hat{B}$.

De plus y_m^p est dans A, sa valuation est $p(m+1)$, donc appartient à $\mathfrak{M}^{p(m+1)}$.

D'où $y^p = 0$.

Montrons que y n'est pas nul. Puisque $\mathfrak{M}^2$ est un ouvert fermé de B, il suffit de montrer que quel que soit m, $y_m \notin \mathfrak{M}^2$. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier m, tel que $y_m \quad \mathfrak{M}^2$.

Comme $\mathfrak{M}^2$ est un idéal de B, c'est un A-module de type fini.

Si $y_m \in \mathfrak{M}^2$, on a donc :

$$y_m = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \alpha_i$$

où $\lambda_i \in A$ et $\alpha_i \in \mathfrak{P}^2$.

Comme A et $\mathfrak{P}^2$ sont contenus dans $k[[U]]$, on peut développer en série

$$y_m = \sum_{m+1}^{\infty} X_k U^k \ ; \quad \lambda_i = \sum_{0}^{\infty} C_{n'}(\lambda_i) U^{n'} \quad \text{et} \quad \alpha_i = \sum_{0}^{\infty} C_n(\alpha_i) U^n .$$

D'où :

$$X_\ell = \sum_{i=1}^{r} \sum_{n+n'=\ell} C_n(\alpha_i)\ C_{n'}(\lambda_i) \qquad \forall\ \ell \geq m+2 .$$

De plus, λ_i est dans $K = k(U,V)$. C'est une fraction rationnelle à coefficients dans k. Il n'y a qu'un nombre fini de coefficients et ceux-ci ne font intervenir qu'un nombre fini de variables X_j.

D'où :

$$\lambda_i \in F_p(X_1, \ldots, X_N)(U, V).$$

Or $\lambda_i \in k[[U]]$. Quand on développe cette fraction rationnelle dans $k[[U]]$, comme $V = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^p U^{np}$, on voit que $\lambda_i \in k_N[[U]]$ où k_N est le corps $F_p(X_1, \ldots, X_N, X_{N+1}^p, \ldots, X_{N+k}^p, \ldots)$. Il s'ensuit que $C_n(\lambda_i)$ appartient à k_N pour tout n.

On prend $N > m+1$, par ailleurs, $\mathfrak{P}$ est engendré par U et T comme B-module, $\mathfrak{P}^2$ est donc engendré par U^2, $U\,T$, T^2 et comme B est engendré par $1, T, \ldots, T^{p-1}$ comme A-module, les générateurs α_i de $\mathfrak{P}^2$, peuvent avoir été choisis de la forme $U^k T^{j+k}$ où $0 \leq k \leq 2$, $0 \leq j \leq p\text{-}1$.

De façon précise :

$$U^k\ T^{j+k} = U^k \left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n U^n \right)^{j+k} .$$

Le calcul montre que la variable X_{N+1} n'intervient qu'aux degrés strictement supérieurs à $N + 1$, dans α_i.

Pour finir, si $\ell = N + 1$, on a :

$$X_{N+1} = \sum_{i=1}^{3p} \sum_{n+n'=N+1} C_n(\lambda_i)\ C_{n'}(\alpha_i).$$

Où $X_{N+1} \notin k_N$ mais $C_n(\lambda_i)$ et $C_{n'}(\alpha_i)$ appartiennent à k_N pour tout n et pour tout n'. Une contradiction !

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. AMICE : Analyse p-adique, Séminaire Delange-Pisot (Théorie des nombres) (1959-1960) N° 4.

[2] Y. AMICE : Interpolation p-adique, Thèse Université de Paris (1964).

[3] N. BOURBAKI : Algèbre commutative, Paris - Hermann.

[4] J.-L. CHABERT : Les idéaux premiers de l'anneau des polynômes à valeurs entières. J. reine angew Math. 293/294 (1977) p. 275-283.

[5] K. MAHLER : An interpolation séries for continuous functions of p-adic variable, J. reine angew Math. 199 (1958) 23-34.

[6] M. NAGATA : Local rings New-York (1962).

[7] P. SAMUEL : Théorie algèbrique des nombres, Hermann.

[8] ZARISKI - SAMUEL : Commutative Algebra. Van Nostrand Compagny Inc.

Paul-Jean CAHEN
Dept. de Mathématiques
Faculté des Sciences
TUNIS