Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2
Série Mathématiques

J.-F. Pabion

Π_2 - Théorie des ensembles

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 73, série *Mathématiques*, n° 21 (1982), p. 15-45
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__73_21_15_0>

Ann. Sci. Univ. Clermont II, Sér. Math., Fasc. 21, 1982, pp. 15-45

Π_2 - THEORIE DES ENSEMBLES

J.-F. PABION

Département de Mathématiques
Université Claude Bernard
43, Bd. du 11 novembre 1918
69621 VILLEURBANNE Cédex

Introduction.

La tendance du jour est aux techniques douces : cultures biologiques, énergies non polluantes ..... pour apporter une (modeste) contribution à ce mouvement sympathique, demandons-nous si les mathématiciens ont *vraiment* besoin du non-dénombrable. La question n'est même pas neuve : elle est présente depuis que l'on s'interroge sur les fondements. Mais le récent développement de la théorie des ensembles admissibles apporte sûrement la réponse la plus élégante et la plus profonde, dans la lignée des théories «faibles» [1].

L'attitude adoptée ci-dessous part d'un point de vue différent : au lieu de mettre en évidence une théorie faible mais pratiquement suffisante, nous voulons conserver l'essentiel du pouvoir démonstratif initial, tout en ne le faisant pas reposer sur une hiérarchie d'infinis.

Les théorèmes d'indépendance qui ont foisonné depuis le travail de Cohen montrent combien les axiomes usuels nous disent peu sur des notions telles que celle de cardinal. On peut y voir une lacune de ces axiomes. On peut penser aussi que s'ils ne disent rien - ou si peu - c'est peut-être simplement parce que le non-dénombrable n'est qu'un détour stratégique sans *réelle* signification mathématique. Que ce détour soit profitable, voilà ce qu'on ne peut nier. Qu'il soit *inévitable* est une autre question, aisément récusée : le principe de réflexion procure des univers dénombrables satisfaisant autant de conditions de clôture qu'on le désire.

Cette idée mène à la prise en considération de la partie Π_2 de la théorie des ensembles. On s'aperçoit alors qu'à défaut d'être une «bonne» théorie - du point de vue des fondements, ce n'est sûrement pas le cas - elle offre une classe de modèles extrêmement plaisants, et conduit à nombre d'interrogations, dont certaines ne paraissent pas aisées. C'est l'objet du travail suivant. Il doit beaucoup à ceux qui ont bien voulu réfléchir avec moi à ces questions, en particulier Maurice BOFFA et Richard DALIN.

Organisation du texte.

Le § I présente les notations et les définitions principales.

Le § II étudie des caractérisations des sous-modèles de Π_2 - ZF et de ses extensions.

Au § III, ces techniques sont utilisées pour établir divers résultats d'indépendance (fondation, séparation).

Le § IV est une tentative pour cerner l'analyse de ZFC.

Enfin le § V étudie quelques aspects de la définissabilité en termes d'ordinaux dans Π_2 - ZF.

Nous proposons pour finir une liste de questions ouvertes.

I - NOTATIONS ET DEFINITIONS.

I-1. - Langage.

$\mathscr{L}$ est le langage de la théorie de Zermelo-Fraenkel (ZF). Δ_o désigne l'ensemble des formules à quantificateurs bornés. Les classes Σ_n et Π_n sont définies de la manière usuelle, par alternance de quantificateurs à partir de Δ_o.

Dans tout ce qui suit, et sauf spécification contraire, les majuscules latines A, B, ..., Y, Z, utilisées comme variables dans $\mathscr{L}$, sont réservées aux ensembles transitifs non vides, c'est-à-dire astreintes aux conditions :

(i) $\exists x\,(x \in X)$

(ii) $\forall x \in X \quad \forall y \in x\,(y \in X)$

ϕ étant une formule de $\mathscr{L}$, et X une variable du type précédent, ϕ^X désigne la *relativisée* de ϕ à X, obtenue en restreignant à X les quantificateurs de ϕ. Grâce à l'astreinte (i), si A est une thèse de la logique, il en est de même de $\forall X\ A^X$.

Si $\vec{x} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, $\vec{x} \in X$ est mis pour : $x_1 \in X \wedge x_2 \in X \ \ldots \wedge x_n \in X$.

α, β, ..., dénotent des ordinaux.

I-2. - Théories.

Soit T une théorie dans le langage $\mathscr{L}$. Une notion définissable dans T est Σ^T_n (resp. Π^T_n) si elle y est exprimable par une formule Σ_n (resp. Π_n). Elle est Δ^T_n si elle est à la fois Σ^T_n et Π^T_n. Un cas particulier important est celui des notions Δ^T_1, où T est une extension de ZF. On dit en général que ces notions sont *absolues dans* T. Elles ont ici une caractérisation remarquable : soit $A_o, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ une liste des axiomes de T (T extension de ZF). Alors $\phi[\vec{x}]$ définit une notion Δ^T_1 si et seulement si il existe un entier n (intuitif) tel que (prouvablement) tout modèle transitif de $A_o, \ldots, A_n$ *réfléchisse* ϕ.

En formules :

$$T \vdash \forall X\,[(A_o \wedge \ldots \wedge A_n)^X \to \forall \vec{x} \in X(\phi^X[\vec{x}] \longleftrightarrow \phi[\vec{x}]\,)\,]\,.$$

Définition. - Soit T une théorie. Notons Π_{n+1} - T la théorie engendrée par les théorèmes Π_{n+1} de T.

Le premier intérêt de Π_{n+1} - T est dans son bon-comportement vis-à-vis des notions Σ^T_n et Π^T_n :

Lemme 1. - *Soient* $\phi_1[\vec{x}]$, $\phi_2[\vec{x}] \in \Sigma_n$ *et* $\psi[\vec{x}] \in \Pi_n$. *Alors :*

(i) $T \vdash \phi_1 \longleftrightarrow \phi_2$ *si et seulement si* Π_{n+1} - $T \vdash \phi_1 \longleftrightarrow \phi_2$

(ii) $T \vdash \phi_1 \longleftrightarrow \psi$ *si et seulement si* Π_{n+1} - $T \vdash \phi_1 \longleftrightarrow \psi$

(iii) Π_{n+1} - T *est la plus petite théorie à satisfaire (i) et (ii).*

La preuve est immédiate. En conséquence, les notions Δ_n^T et Π_n^T gardent un sens non ambigu dans toutes les extensions de Π_{n+1} - T, en ce que l'équivalence de deux représentants *formellement corrects* reste prouvable. Cette circonstance nous autorise à parler des notions Σ_n^T et Δ_n^T *dans toute extension de* Π_{n+1} - T, sans avoir à choisir une définition privilégiée. De plus, de nombreuses propriétés de ces notions sont prouvables dans Π_{n+1} - T dès lors qu'elles le sont dans T. Il suffit qu'elles aient une expression Π_{n+1}. Ce sont par exemple :

- Définir une relation fonctionnelle (resp. une fonctionnelle partout définie).
- Définir une classe non vide.
- Définir une classe transitive.
- Définir un objet.

Exemples. - Dans les extensions de Π_2 - ZF, on disposera librement des notions d'ordinal, de rang, des objets ω, V_ω, des *classes* $P(\omega)$, L, ω_1, de la fonctionnelle L_α .

Une fonctionnelle (partielle) définie dans T sera dite Σ_n si elle s'exprime par une formule Σ_n. Elle sera dite *totale* si elle est prouvablement partout définie dans T. Il en est alors de même dans toute extension de Π_{n+1} - T. Nous parlerons alors de Δ_n-*fonctionnelle prouvable* de T.

I-3. Modèles. - Les structures considérées sont toutes relatives au langage $\mathscr{L}$. Elles sont donc de la forme $\mathfrak{M} = \langle M, \varepsilon \rangle$, où ε est une relation binaire sur le domaine (non vide) M. Nous désignerons toujours une structure et son domaine par des notations cohérentes, telles que $\mathfrak{M}$ et M, $\mathfrak{N}$ et N, $\mathfrak{A}$ et A, etc....

Une relation $R[\vec{x}]$ sur M est dite $\underset{\sim}{\Sigma}_n$ (resp. $\underset{\sim}{\Pi}_n$) si elle est définissable avec paramètres dans $\mathfrak{M}$ par une formule Σ_n (resp. Π_n). Elle est dite $\underset{\sim}{\Delta}_n$ si elle est $\underset{\sim}{\Sigma}_n$ et $\underset{\sim}{\Pi}_n$. Ceci permet de parler aussi de fonctionnelle $\underset{\sim}{\Sigma}_n$. Si une telle fonctionnelle est *totale* dans $\mathfrak{M}$ (i.e. partout définie), elle est aussi $\underset{\sim}{\Pi}_n$ et par suite $\underset{\sim}{\Delta}_n$.

Il est clair que les Δ_n-fonctionnelles prouvables de T produisent des $\underset{\sim}{\Delta}_n$-fonctionnelles totales dans tous les modèles de Π_{n+1} - T.

Soit $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. La notation $\mathfrak{N} \prec_n \mathfrak{M}$ signifie que pour tout $\phi\,[\vec{x}\,] \in \Sigma_n$ et tout $\vec{a} \in N$:

$$\mathfrak{N} \models \phi\,[a] \longleftrightarrow \mathfrak{M} \models \phi\,[\vec{a}]$$

On dit encore que $\mathfrak{N}$ est Σ_n-*restriction* de $\mathfrak{M}$, et que $\mathfrak{M}$ est Σ_n-*extension* de $\mathfrak{N}$. Toute Σ_n-extension préserve les formules Σ_{n+1}.

Ces notions permettent de relier les modèles de Π_{n+1} - T à ceux de T :

Lemme 2. $\mathfrak{M} \models \Pi_{n+1}$ - T *si et seulement si il existe* $\mathfrak{N} \models$ T *tel que :*

$$\mathfrak{M} \prec_n \mathfrak{N}$$

Preuve. - Application standard de la méthode du diagramme.

I-4. - Π_2 - ZF et au-delà.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons d'abord aux extensions de Π_2 - ZF. Néanmoins de nombreux résultats seront énoncés dans le cas général de Π_{n+1} - ZF, simplement parce que la preuve est la même. Les raisons de notre intérêt pour Π_2 - ZF sont - entre autres - les suivantes :

- Π_2 - ZF et ses extensions sont, en vertu du lemme 1, «bonnes» pour les notions absolues de ZF, dont la stabilité par rapport aux modèles de ZF suggèrent que ce sont des notions mathématiquement plus significatives que les autres.

- Une autre justification vient du lemme suivant :

Lemme 3. - *Soit* T *une extension de* ZF *, d'axiomes* $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$
Π_2 - T *est engendré par les énoncés suivants :*

(1) $\forall x y \quad \exists X (x, y \in X)$ *(axiome de cohérence)*

(2n) $\forall x \ \exists X (x \in X \wedge (A_o \wedge \dots \wedge A_n)^X)$

(1) et (2n) sont déduits dans T (pour (2n), cf. le principe de réflexion). Puisqu'ils sont Π_2, ils sont déduits dans Π_2 - T.

Supposons inversement que $T \vdash A$ avec $A = \forall \vec{x} \ \exists \vec{y} \ \phi[\vec{x}, \vec{y}]$, où $\phi \in \Delta_o$. Il existe n tel que $A_o, \dots, A_n \vdash A$. En appliquant (1) plusieurs fois, on montre qu'étant donné $\vec{a}$ il existe A transitif, avec $\vec{a} \in A$. Puis il existe B avec $A \in B$ et $(A_o \wedge \dots \wedge A_n)^B$. Par la seule logique, $(A_o \wedge \dots \wedge A_n)^B \rightarrow A^B$. D'où A^B, et puisque $\vec{a} \in B$ (par transitivité) il existe $\vec{b} \in B$ tel que $\phi^B [\vec{a}, \vec{b}]$. ϕ étant Δ_o, on a aussi $\phi[\vec{a}, \vec{b}]$.

Ainsi la signification de Π_2 - T s'éclaire : elle permet d'appliquer *localement* les principes de T. Le pouvoir démonstratif de T est donc en gros conservé, mais on abandonne une description globale de l'univers.

Remarque. - «L'axiome de cohérence» exprime l'homogénéité de l'univers (on peut simultanément connaître deux objets et tous leurs ancêtres). On ne peut en général le déduire des autres. Ainsi si T = ZF ou T = ZFC, la réunion de deux extensions génériques d'un modèle standard dénombrable M de T par des réels constructivement indépendants l'un de l'autre sur M donne une structure qui vérifie (2n) et falsifie (1) (cf. R. DALIN [2]).

II - SOUS-MODELES DES MODELES DE Π_2 - ZF.

Soit une structure $\mathfrak{M} = \langle M, \varepsilon \rangle$. A chaque partie $P \neq \emptyset$ de M, on associe la structure induite par $\mathfrak{M}$, soit $\mathcal{P}$. Si $\mathfrak{M}$ est fixé, $\mathcal{P}$ est complètement déterminé par P, et nous confondrons en général P et $\mathcal{P}$ pour alléger les énoncés.

Nous étudions dans ce paragraphe le problème suivant : $\mathfrak{M}$ étant un modèle de T, comment caractériser les restrictions de $\mathfrak{M}$ qui sont encore des modèles de T ?

Si T = ZF, il n'y a pas de réponse simple. Si l'on passe à Π_2 - ZF, la classe des modèles est bien plus stable, et on obtient des critères commodes, du moins en se limitant aux Δ_0*-restrictions.*

II-1. - SOUS-MODELES TRANSITIFS DANS Π_2 - ZF.

Un type important de Δ_0-restriction est constitué par les restrictions transitives. Soit T une théorie (quelconque pour le moment). On donne $\mathfrak{M} \models \Pi_2$ - T et $\mathfrak{N} \prec_0 \mathfrak{M}$, avec $\mathfrak{N} \models \Pi_2$ - T. Il est clair que :

(i) N est clos pour les Δ_1-fonctionnelles prouvables de T

(ii) Si $\mathfrak{N} \prec_1 \mathfrak{M}$, N est de plus clos par les $\underset{\sim}{\Delta}_1$-fonctionnelles totales sur $\mathfrak{M}$ à paramètres dans N.

Nous verrons que, dans certains cas, les réciproques sont exactes.

Soit X $\subseteq$ M. Disons que X est *transitive* (relativement à $\mathfrak{M}$) si pour a, b $\in$ M :

$$a \in X \text{ et } \mathfrak{M} \models b \in a \rightarrow b \in X$$

Pour chaque X $\subseteq$ M, notons TR(X) la plus petite partie transitive contenant X. Si notons encore TR($\mathfrak{N}$) la structure induite sur TR(N).

Soient X $\subset$ Y $\subset$ M. Disons que X est *cofinal* dans Y si pour tout a $\in$ Y il existe b $\in$ X avec $\mathfrak{M} \models a \in b$. Le lemme de base est le suivant :

Lemme 4. - *Soient* $\mathfrak{M} \models \Pi_2$ - ZF *et* X $\subset$ M . *Si* X *est clos par les* Δ_1*-fonctionnelles prouvables de* ZF *, alors* TR(X) $\models \Pi_2$ - ZF *et* X *est cofinal dans* TR(X).

Preuve. - X est clos pour la formation des singletons, réunions finies, clôtures transitives, le tout réinterprété dans $\mathfrak{M}$ évidemment. D'où la cofinalité de X dans TR(X), et aussi la validité de l'axiome de cohérence.

Soit A_0 , A_1, ..., A_n, ... une énumération des axiomes de ZF. Dans ZF, on définit une Δ_1-fonctionnelle prouvable en x et α en posant :

$$L_0[x] = TC(x) \quad \text{(clôture transitive de x)}$$

$$L_{\alpha+1}[x] = DF(L_\alpha[x])$$

$$\lambda \in \mathrm{Lim} : L_\lambda[x] = \bigcup_{\alpha < \lambda} L_\alpha[x]$$

où DF(X) désigne l'ensemble des parties de X paramétriquement définissables dans la structure $\langle X, \in \rangle$. On sait (cf. par exemple [3]) que

$$L[x] = \bigcup_\alpha L_\alpha[x]$$

est un modèle de ZF. Il vérifie en particulier le schéma de réflexion pour la hiérarchie des $L_\alpha[x]$, ce qui permet de définir pour chaque entier *intuitif* n deux Δ_1-fonctionnelles prouvables :

$$\alpha_n(x) = \mu\alpha \quad \exists X (X = L_\alpha[x] \wedge (A_0 \wedge \ldots \wedge A_n)^X)$$

$$H_n(x) = L_{\alpha_n(x)}[x].$$

On a pour chaque n :

$$ZF \vdash \forall x \ \exists X [x \in X \wedge X = H_n(x) \wedge (A_0 \wedge \ldots \wedge A_n)^X]$$

Or cet énoncé est Π_2 : donc il reste déduit dans Π_2 - ZF.

Revenant à $\mathfrak{M}$, soit a $\in$ TR(X). Il existe A $\in$ X tel que :

$$\mathfrak{M} \models A \text{ est transitif } \wedge a \in A.$$

Soit B $= H_n(A)$ - calculé dans $\mathfrak{M}$ -. On a B $\in$ X, donc B $\in$ TR(X). De plus, puisque $\mathfrak{M} \models \Pi_2$ - ZF :

$$\mathfrak{M} \models a \in B \wedge (A_0 \wedge \ldots \wedge A_n)^B$$

TR(X) étant transitif, on a aussi :

$$TR(X) \models a \in B \wedge (A_0 \wedge \ldots \wedge A_n)^B$$

D'où la satisfaction de l'axiome 2n.

Enonçons quelques conséquences de ce lemme :

Corollaire 1. - *Si* $\mathfrak{M} \models \Pi_2$ - ZF *, toute partie de* $\mathfrak{M}$ *transitive et close par les* Δ_1 *-fonctionnelles prouvables de* ZF *est un modèle de* Π_2 - ZF.

Corollaire 2. - *Si* $\mathfrak{M} \models \Pi_2$ - ZF *, toute partie* X *de* M *est contenue dans une plus petite partie transitive qui soit modèle de* Π_2 - ZF.

Corollaire 3. - *Soient* $\mathfrak{M}$ *,* $\mathfrak{N} \models \Pi_2$ - ZF *, avec* $\mathfrak{N} \prec_0 \mathfrak{M}$ *. Alors*

$$TR(\mathfrak{N}) \models \Pi_2 - ZF \qquad \mathfrak{N} \prec_1 TR(\mathfrak{N}).$$

Les corollaires 1 et 2 sont immédiats. Pour le corollaire 3, notons déjà que $TR(\mathfrak{N}) \models \Pi_2$ - ZF puisque $\mathfrak{N}$ est clos par les Δ_1-fonctionnelles prouvables de ZF. Supposons que $\mathfrak{N} \models \forall \vec{x} \;\; \phi[\vec{x},\vec{b}]$ avec $\vec{b} \in$ N et $\phi[\vec{x},\vec{y}] \in \Delta_0$.

Soit $\vec{a} \in TR(N)$. Il existe $A \in N$ tel que $\mathfrak{M} \models \vec{a} \in A$. D'autre part $\mathfrak{N} \models \forall \vec{x} \in A \;\; \phi[\vec{x},\vec{b}]$. $TR(\mathfrak{N})$ étant transitif, $TR(\mathfrak{N}) \prec_0 \mathfrak{M}$, donc $\mathfrak{N} \prec_0 TR(\mathfrak{N})$. D'où :

$$TR(\mathfrak{N}) \models \forall \vec{x} \in A \;\; \phi[\vec{x},\vec{b}]$$

En particulier :

$$TR(\mathfrak{N}) \models \phi[\vec{a},\vec{b}]$$

Ainsi, toute Δ_0-restriction entre modèles de Π_2 - ZF se décompose en une Σ_1-extension cofinale et une extension finale (propriété à rapprocher d'un résultat de Gaifmann [4]).

Dans le cas général, il ne semble pas que l'on puisse supprimer totalement l'hypothèse de transitivité du corollaire 1. Nous allons voir que cela devient possible modulo l'axiome de constructibilité.

II-2. CAS D'UNE EXTENSION DE ZFL.

Soit ZFL = ZF + V = L. La classe des Σ_1-fonctionnelles de ZF présente des analogies profondes avec celle des fonctions récursives partielles sur N. En particulier, le lemme suivant est l'analogue du lemme de sélection en théorie classique de la récursion.

Lemme 5. - *Soit* $n \geq 1$ *. Soit* $\phi[\vec{x}, y] \in \Sigma_n$ *. Il existe* $\psi[\vec{x}, y] \in \Sigma_n$ *tel que l'on puisse prouver dans* Π_{n+1} - ZFL :

(i) $\exists y \; \phi[\vec{x}, y] \rightarrow \exists y \; [\phi[\vec{x}, y] \wedge \psi[\vec{x}, y]]$

(ii) $\psi[\vec{x}, y] \wedge \psi[\vec{x}, z] \rightarrow y = z$

Autrement dit, Ψ définit un sélecteur Σ_n relatif à ϕ et y.

La forme de (i) et (ii) montre qu'il suffit de prouver ces implications dans ZFL.

Introduisons des Δ_1-fonctionnelles prouvables K, J_o, J_1 établissant un couplage des ordinaux :

$$J_k(K(\alpha_o, \alpha_1)) = \alpha_k \qquad (k = 0,1)$$

$$K(J_o(\alpha), \; J_1(\alpha)) = \alpha$$

F(α) étant l'énumération de Gödel de l'univers constructible L, posons encore :

$$I_o(\alpha) = F(J_o(\alpha))$$

$$I_1(\alpha) = F(J_1(\alpha))$$

Prenons alors pour $\Psi[\vec{x}, y]$ une formulation Σ_n de la condition :

$$\exists \alpha \; [y = I_o(\alpha) \wedge \forall \; \phi_1[\vec{x}, I_o(\alpha), I_1(\alpha)] \wedge \forall \beta \in \alpha \; \neg \phi_1 \; [\vec{x}, I_o(\beta), I_1(\beta)]] \;.$$

où ϕ_1 est tel que ϕ se mette sous la forme :

$$\exists z \;\; \phi_1 \; [x, y, z], \quad \text{avec} \;\; \phi_1 \in \Pi_{n-1}.$$

(ceci est toujours possible modulo des contractions de quantificateurs).

On en tire une caractérisation simple des Δ_o-sous-modèles.

Lemme 6. - *Soient* T *une extension de* ZFL , $\mathfrak{M} \models \Pi_2$- T *et* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$

Il y a équivalence entre :

(i) $\mathfrak{N} <_o \mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{N} \models \Pi_2$ - T

(ii) $\mathfrak{N}$ *est clos par les* Δ_1*-fonctionnelles prouvables de* T .

Nous savons déjà que (i) $\rightarrow$ (ii). Supposons (ii). Il existe une collection de fonctionnelles prouvables de ZFL formant un système complet de fonctions de Skolem pour les Δ_o-formules.

On a déjà $\mathfrak{N} \prec_o \mathfrak{M}$. Supposons que $T \vdash \forall \vec{x} \ \exists \vec{y} \ \phi[\vec{x}, \vec{y}]$, avec $\phi \in \Delta_o$.

On a aussi :

(1) $$T \vdash \forall \vec{x} \ \exists u \ \exists \vec{y} \in u \ \phi[\vec{x}, \vec{y}]$$

Le lemme 5 assure l'existence d'une Σ_1-fonctionnelle $F(\vec{x})$ telle que dans Π_2 - ZFL (et a fortiori dans Π_2 - T) :

(2) $$\exists u \ \exists \vec{y} \in u \ \phi[\vec{x}, \vec{y}] \rightarrow \exists \vec{y} \in F(\vec{x}) \ \phi[\vec{x}, \vec{y}]$$

La condition (1) assure que F(x) est prouvablement totale dans T, donc est une Δ_1-fonctionnelle prouvable de T. Cela étant, soit $\vec{a} \in N$. Posons $A = F(\vec{a})$, calculé dans $\mathfrak{M}$. On a $A \in N$ et $\mathfrak{M} \models \exists \vec{y} \in A \ \phi[\vec{a}, \vec{y}]$. Puisque $\mathfrak{N} \prec_o \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \models \exists \vec{y} \in A \ \phi[\vec{a}, \vec{y}]$ et il existe $\vec{b} \in N$ tel que $\mathfrak{N} \models \phi[\vec{a}, \vec{b}]$.
Donc $\mathfrak{N} \vdash \forall \vec{x} \ \exists \vec{y} \ \phi[\vec{x}, \vec{y}]$.

Corollaire 4. - *Si* $\mathfrak{M} \models \Pi_2$ - ZFL *, la famille des* Δ_o *-restrictions de* $\mathfrak{M}$ *qui sont modèle de* Π_2 - ZFL *est close par intersection.*

Nous verrons que ce résultat a aussi des conséquences pour les modèles de Π_2 - ZF. Auparavant, montrons que l'hypothèse V = L simplifie aussi l'étude des Σ_1-restrictions.

Lemme 7. - *Soit* T *une extension de* ZFL. *Soient* $\mathfrak{M} \models \Pi_2$ - T *et* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$
Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathfrak{N} \prec_1 \mathfrak{M}$

(ii) N *est clos par les* Σ_1*-fonctionnelles sur* $\mathfrak{M}$ *à paramètres dans* N .

(iii) N *est clos par les* Δ_1*-fonctionnelles totales sur* $\mathfrak{M}$ *à paramètres dans* N .

(i) → (ii) et (ii) → (iii) sont évidents. Supposons (iii) :

Soit $\phi[\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}] \in \Delta_o$. Soit $\vec{c} \in N$ tel que l'on ait :

(1) $$\mathfrak{M} \models \forall \vec{x} \ \exists \vec{y} \ \phi[\vec{x}, \vec{y}, \vec{c}]$$

On a aussi (cf. axiome de cohérence) :

$$\mathfrak{M} \models \forall \vec{x} \quad \exists u \quad \exists \vec{y} \in u\, \phi\, [\vec{x}, \vec{y}, \vec{c}]$$

Soit $F(\vec{x},\vec{z})$ un sélecteur Σ_1 pour $\exists \vec{y} \in u\, \phi\, [\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}]$.

$F(\vec{x},\vec{c})$ détermine une $\underset{\sim}{\Sigma}_1$-fonctionnelle sur $\mathfrak{M}$, totale d'après (1) et donc aussi $\underset{\sim}{\Delta}_1$ sur $\mathfrak{M}$. Donc si $\vec{a} \in N$, $F(\vec{a},\vec{c}) \in N$. La condition (iii) impliquant $\mathfrak{N} <_0 \mathfrak{M}$ pour la même raison qu'au lemme 6, on conclut de la même manière.

Corollaire 5. - *Soit* T *une extension de* ZFL. *Soient* $\mathfrak{M} \models \Pi_2$ - T *et* $A \subset M$ *Il existe une plus petite* Σ_1*-restriction de* $\mathfrak{M}$ *, soit* $\mathfrak{N}$ *, telle que* $A \subset N$ *. Son domaine se compose de l'ensemble des éléments de* M Σ_1*-définissables dans* $\mathfrak{M}$ *avec paramètres dans* N .

Soit $\tilde{A}$ cet ensemble. $\tilde{A} \subset \tilde{A}$, et il est clair que toute Σ_1-restriction de $\mathfrak{M}$ contient A. Il suffit de vérifier, ce qui est aisé, que $\tilde{A}$ est clos par les $\underset{\sim}{\Sigma}_1$-fonctionnelles sur $\mathfrak{M}$ à paramètres dans $\tilde{A}$.

II-3. - SOUS-MODELES INTERIEURS.

La méthode des modèles intérieurs est bien connue pour ZF. Soit une structure de $\mathscr{L}$. Soient $\phi\, [\vec{x},\vec{y}]$ une formule et $\vec{b} \in M$ tel que :

$$\mathfrak{M} \models \exists x \quad \phi\, [x,\vec{b}]$$

Posons $N = \{a \in M \mid \mathfrak{M} \models \phi\, [a,\vec{b}]\}$.

Puisque $N \neq \emptyset$, $\mathfrak{M}$ induit sur N une structure $\mathfrak{N}$, dite *intérieure*.

A chaque formule ψ associons la formule ψ^{ϕ} obtenue en relativisant les quantificateurs de ψ selon les règles :

$$\exists x \; \ldots\ldots \twoheadrightarrow \exists x \; (\; \phi\, [x,\vec{y}\,] \; \wedge \; \ldots\ldots)$$

$$\forall x \; \ldots\ldots \twoheadrightarrow \forall x \; (\; \phi[\, x,\vec{y}\,] \rightarrow \; \ldots\ldots)$$

On respecte bien entendu les précautions d'usage concernant les variables liées.

L'assignation de $\vec{y}$ étant constamment donnée par $\vec{b}$, on a :

$$\mathfrak{M} \models \psi^{\phi}\ (.....) \longleftrightarrow \mathfrak{N} \models \psi(.....)$$

Ces rappels étant faits, soit $\mathfrak{N}$ une sous-structure de $\mathfrak{M}$ (sans lien avec la précédente). On suppose désormais que $\phi \in \Sigma_1$ et que l'on a :

(i) $\mathfrak{M} \models \exists \phi\ [x, \vec{b}]$

(ii) $\mathfrak{M} \models \forall\ xy\ [\ \phi[x,\vec{b}]\ \wedge\ y \in x \longrightarrow \phi[x,\vec{b}]\ ]]$

Notons que si $\mathfrak{N} \prec_1 \mathfrak{M}$ les conditions (i) et (ii) sont encore valides dans $\mathfrak{N}$, sous réserve que $\vec{b} \subset N$.

Lemme 8. - *On donne* $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$, *avec* $\mathfrak{N} \prec_1 \mathfrak{M}$, $\phi[x,\vec{y}] \in \Sigma_1$ *et* $\vec{b} \in N$ *tel que (i) et (ii) soient satisfaits. Pour tout énoncé* $A \in \Pi_2$ *on a :*

$$\mathfrak{M} \models A^{\phi} \Rightarrow \mathfrak{N} \models A^{\phi}$$

Un calcul simple permet de touver un énoncé $A^* \in \Pi_2$ tel que $A^{\phi} \longleftrightarrow A^*$ dans tout modèle qui vérifie (i) et (ii). On a alors :

$$\mathfrak{M} \models A^{\phi} \longleftrightarrow \mathfrak{M} \models A^* \Rightarrow \mathfrak{N} \models A^* \longleftrightarrow \mathfrak{N} \models A^{\phi}$$

En d'autres termes, si $\mathfrak{N} \prec_1 \mathfrak{M}$, tout modèle intérieur d'une théorie T défini dans $\mathfrak{M}$ par une classe Σ_1 à paramètres dans N fournit dans $\mathfrak{N}$ un modèle intérieur de Π_2 - T. En combinant ce résultat avec le lemme 2, on obtient un moyen canonique de transférer à Π_2 - ZF des modèles intérieurs transitifs de ZF.

Exemples.

1) - L est un modèle de ZFL dans ZF : donc L est un modèle de Π_2 - ZFL dans Π_2 - ZF.

2) - Un résultat de Levy assure que HC $\prec_1$ V dans ZFC (cf. [3]). Donc HC - qui est une Σ_1-classe - est dans Π_2 - ZFC un modèle intérieur de Π_2 - ZFC.

3) - En relativisant à L l'exemple 2, on voit que L_{ω_1} et $L_{\omega_1^L}$ sont des modèles

intérieurs de Π_2 - ZFC dans Π_2 - ZF.

Nous mettrons en évidence d'autres modèles intérieurs intéressants.

Corollaire 6. - $(\Pi_2 - ZF) + V = L = \Pi_2 - ZFL$.

$V = L$ étant Π_2, on a $\Pi_2 - ZFL \vdash V = L$.

Supposons que Π_2 - ZFL $\vdash$ A. Soit $\mathfrak{M} \models (\Pi_2 - ZF) + V = L$.

$L^{\mathfrak{M}} \models \Pi_2$ - ZFL, donc $L^{\mathfrak{M}} \models A$. Mais $L^{\mathfrak{M}} = M$, d'où $\mathfrak{M} \models A$.

Corollaire 7. - *Soit* $\mathfrak{M} \models \Pi_2 - ZF$ *. Il existe une plus petite* Δ_0 *-restriction* $\mathfrak{M}_0$ *de* $\mathfrak{M}$ *qui soit modèle de* $\Pi_2 - ZF$ *.* $\mathfrak{M}_0 \models V = L = HC$ *, et* $TR(\mathfrak{M}_0)$ *est le plus petit sous-modèle transitif de* $\mathfrak{M}$ *. Tout élément de* $\mathfrak{M}_0$ *est* Σ_1*-définissable dans* $\mathfrak{M}_0$ *.*

Soit N l'intersection des parties de $L^{\mathfrak{M}}$ closes par les Δ_1-fonctionnelles prouvables de ZFL (ce qui a un sens, puisque $L^{\mathfrak{M}} \models$ ZFL). D'après le lemme 6, N est un modèle de Π_2 - ZFL.

Considérons $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M}_1 \prec_0 \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_1 \models \Pi_2 - ZF$. $L^{\mathfrak{M}_1}$ est un sous-modèle de $\mathfrak{M}_1$, transitif dans $\mathfrak{M}_1$ et validant Π_2 - ZFL. On a en particulier $L^{\mathfrak{M}_1} \prec_0 \mathfrak{M}_1 \prec_0 \mathfrak{M}$, donc $L^{\mathfrak{M}_1} \prec_0 \mathfrak{M}$. D'où :

$$N \subset L^{\mathfrak{M}_1} \subset \mathfrak{M}_1.$$

Ceci prouve la minimalité de N. D'après cette minimalité, on a nécessairement :

$$L^N = HC = N.$$

Plus généralement tout modèle intérieur transitif de Π_2 - ZF défini dans $\mathfrak{N}$ coïncide avec $\mathfrak{N}$.

Par le corollaire 3, TR(N) est aussi un modèle de Π_2 - ZF. C'est nécessairement le plus petit sous-modèle transitif, puisqu'un tel modèle est Δ_0-restriction et doit donc contenir N. Nous savons de plus que $\mathfrak{N} \prec_1 \mathrm{TR}(\mathfrak{N})$.

L'argument de minimalité appliqué cette fois aux sous-modèles transitifs montre que $\mathrm{TR}(\mathfrak{N}) \models V = L = HC$.

D'après le corollaire 5, les éléments de N qui sont Σ_1-définissables dans N (sans paramètres) est une Σ_1-restriction de $\mathfrak{N}$ (puisque $\mathfrak{N} \models \Pi_2$ - ZFL). Celle-ci ne pouvant être stricte, tout élément de N est bien Σ_1-définissable dans $\mathfrak{N}$.

III - MODELES PARTICULIERS DE Π_2 - ZF.

Dans cette section, nous construisons divers types de modèles, en vue notamment d'établir des résultats d'indépendance.

III-1. MODELES MINIMAUX.

Disons qu'une structure $\mathfrak{M}$ est *minimale* si elle n'a pas de Δ_0-restriction propre. Avec cette définition, le corollaire 7 peut être retranscrit sous la forme suivante : tout modèle de Π_2 - ZF contient un sous-modèle minimal. Les modèles minimaux de Π_2 - ZF vérifient $V = L = HC$. Ils ont tous leurs éléments Σ_1-définissables.

Dans ce qui suit, nous établissons qu'il existe une grande variété de modèles minimaux.

Soit $\mathfrak{M} \models \Pi_2$ - ZF. Notons $\mathrm{AR}(\mathfrak{M})$ la structure induite par sur $V_\omega^{\mathfrak{M}}$: c'est «l'arithmétique» de $\mathfrak{M}$.

Etant donnés $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \models \Pi_2$ - ZF si $\mathfrak{M} \prec_0 \mathfrak{N}$, $V_\omega^{\mathfrak{M}}$ $V_\omega^{\mathfrak{N}}$ car la définition de V_ω est absolue. Par préservation des Δ_0-formules, on en déduit :

$$\mathrm{AR}(\mathfrak{M}) \prec \mathrm{AR}(\mathfrak{N}).$$

où $\prec$ est le symbole de l'extension élémentaire.

Ainsi l'arithmétique d'un modèle est caractérisé par celle de sa restriction minimale.

La théorie classique de la récursion est formalisable dans l'arithmétique élémentaire, et a fortiori dans Π_2 - ZF.

Lemme 9. - *Soit* $F(x)$ *une fonction récursive partielle, non extensible en fonction récursive totale, et telle que (pour une expression correcte de* F *dans* Π_2 - ZF *) :*

$$\Pi_2\text{-}ZF \vdash \forall x \,[F(x) \text{ existe} \rightarrow F(x) = 0 \vee F(x) = 1]$$

Pour toute extension consistante et récursivement axiomatisable T *de* Π_2 - ZF *, il existe un entier intuitif* n *tel que* T *,* $F(n) = 0$ *et* T, $F(n) = 1$ *soient consistantes.*

Nous supposons bien entendu que F(x) est explicitement définie par une Σ^0_1 formule. Un exemple de telle fonction est donné par :

$$f(x) \simeq r(\{x\})\ (0),\ 2)$$

où r(u,v) est le reste de la division de u par v, et $\{x\}$ (.) la semi-fonction récursive d'indice x.

Soit R(n, m) la relation semi-récursive définie par :

$$T,\quad F(n) \text{ existe} \vdash F(n) = m.$$

Soit S(n) un sélécteur récursif pour R(n,m). Montrons que S prolonge F : supposons en effet que F(n) = 0 par exemple.

Alors Π_2 - ZF $\vdash F(n) = 0$, et a fortiori $T \vdash F(n) = 0$ et $T \vdash F(n)$ existe. Donc S(n) existe, et a une certaine valeur q. Si $q \neq 0$, il vient :

$$T,\quad F(n) \text{ existe} \vdash F(n) = q.$$

D'où $T \vdash q = 0$, ce qui est absurde, puisque T est consistante.

Puisque S prolonge F, elle ne saurait être totale. Donc il existe que :

$$n \notin \mathrm{dom}(S).$$

En particulier :

(1) $T, F(n)$ existe $\nvdash F(n) = 0$

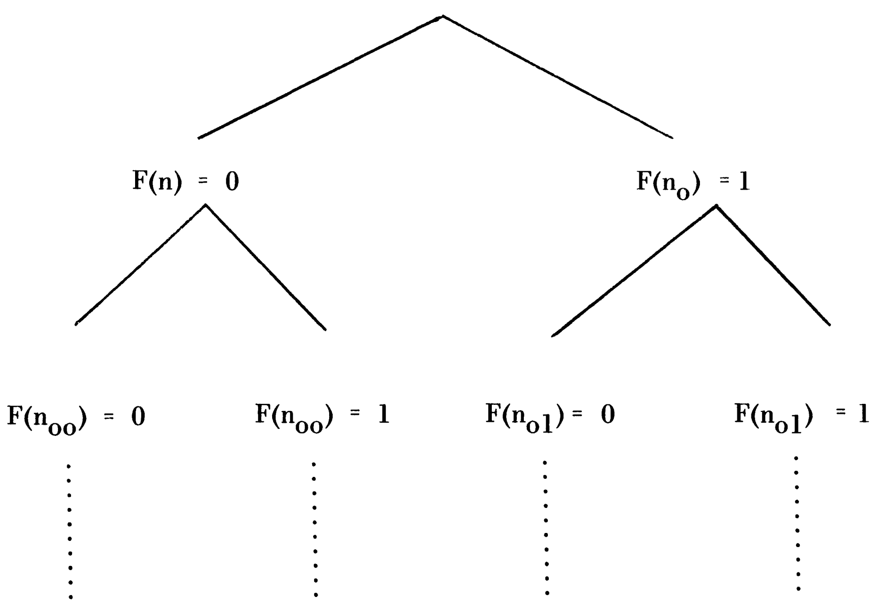
(2) $T, F(n)$ existe $\nvdash F(n) = 1$

or $T, F(n)$ existe $\vdash F(n) = 0 \vee F(n) = 1$.

Donc $T, F(n)$ existe, $F(n) \neq 0 \vdash F(n) = 1$.

Si l'on avait $T \vdash F(n) \neq 0$, on aurait T, F(n) existe $\vdash F(n) = 1$ en contradiction avec (2). On voit de même que $T \nvdash F(n) \neq 1$.

Le lemme 9 permet de construire un arbre du type suivant :



de telle sorte que toute branche soit consistante avec Π_2 - ZF. Alors :

Corollaire 8. - *Il existe* $2^{\aleph_0}$ *modèles minimaux de* Π_2 - ZF *non deux à deux élémentairement équivalents, relativement à l'arithmétique.*

Remarque. - Si M est modèle *standard* de Π_2 - ZF, toute restriction de M est isomorphe à un modèle standard (transitif). En particulier la restriction minimale M_0 est isomorphe à un modèle standard. Comme $M_0 \models V = L$, M_0 est nécessairement de la forme L_α, où α est le premier ordinal tel que $L_\alpha \models \Pi_2$ - ZF.

Ainsi il n'y a *qu'un type* (au plus) de modèle standard minimal.

III-2. - INDEPENDANCE DU SCHEMA DE FONDATION.

Π_2 - ZF contient l'axiome de fondation. Mais il est rendu inutilisable à cause de l'absence d'une séparation raisonnable. En fait le *schéma de fondation* n'est dérivable dans Π_2 - ZF. Nous allons même montrer que le *schéma de récurrence* (non restreint) lui-même n'est pas déductible dans Π_2 - ZF.

La méthode suivie s'inspire de techniques analogues dans l'arithmétique de Péano, en exploitant l'analogie de cette dernière avec ZFL. Le principe de la méthode remonte à Rabin [10] [11], et nous adaptons une idée de Wilkie en [13].

La formalisation dans ZF de la métathéorie de ZF est absolue (cf. par exemple [3]). En particulier, on peut construire pour tout $n \geq 1$ une formule Σ_n, $T_n(y,x)$, telle que :

1) - ZF $\vdash \forall y \in \omega \ \forall x (T_n(y,x) \rightarrow x \in \omega)$

2) - Pour tout $\phi[x] \in \Sigma_n$ il existe un entier (intuitif) m tel que

ZF $\vdash \forall x \in \omega (\phi[x] \longleftrightarrow T_n(m,x))$.

$T_n(y,x)$ est donc l'analogue d'un prédicat de Kleene, et sert à énumérer les relations Σ_n sur ω.

Assumant V = L, qui permet l'emploi du lemme 5, on peut recopier la construction classique d'un ensemble simple (plus précisément : n-simple au sens de Wilkie [13]) :

Partant de la relation Σ_n :

$T_n(x,y) \wedge x > 2y$ (où $>$ et 2 ont leur sens canonique sur ω).

On lui associe la formule Σ_n, S(y,x), qui définit un sélecteur. Il reste à poser :

$$A = \{x \in \omega \mid \exists y \in \omega (S(y,x))\}$$

On a alors :

ZFL $\vdash \forall y \in \omega[\forall x \in \omega(T_n(y,x) \rightarrow x \in A) \rightarrow \forall x \in \omega(T(y,x) \rightarrow x \leq 2y)]$

D'autre part, dans tout modèle $\mathfrak{m}$ de ZFL et pour tout m standard il existe au plus m éléments de $A^{\mathfrak{m}}$ qui soient $\leq$ 2m. En particulier, tout m standard est majoré par un k tel que :

$$\mathfrak{M} \models k \notin A$$

Lemme 10. - *Soit* $n > 0$. *On considère* $\mathfrak{M} \models$ ZFL *, non* ω*-standard, et soit un entier non-standard de* $\mathfrak{M}$. *Il existe* $\mathfrak{M}' \models$ ZFL *,* $\mathfrak{M} \prec_n \mathfrak{M}'$ *, tel que* $\mathfrak{M}' \models \alpha \in A$.

Supposons le contraire. La méthode classique du diagramme montre qu'il existe une formule $\phi[x,\vec{y}]$ et des paramètres $\vec{a} \in M$ tels que :

(1) $\mathfrak{M} \models \phi[\alpha,\vec{a}]$

(2) ZFL, $\phi[\alpha,\vec{a}] \vdash \alpha \notin A$ (dans le langage $\mathscr{L}$ étendu par les constantes α et $\vec{a}$).

Il existe m *standard* tel que :

ZF $\vdash \exists y \quad \phi[x,y] \longleftrightarrow T_n(m,x)$

D'où : ZFL $\vdash T_n(m,x) \rightarrow x \in A$

Donc : ZFL $\vdash T_n(m,x) \rightarrow x \leq 2m$.

Mais ceci est absurde, puisque $\mathfrak{M} \models$ ZFL et $\mathfrak{M} \models T_n(m,\alpha)$ avec α non-standard. On en déduit un résultat de type Rabin :

Lemme 11. - *Soit* $\mathfrak{M} \models$ ZFL *dénombrable non* ω*-standard. Il existe*

$$\mathfrak{M}' \models \Pi_{n+1}\text{ - ZFL}$$

avec $\mathfrak{M} \prec_n \mathfrak{M}'$ *, tel que pour tout entier non-standard* α *de* $\mathfrak{M}$ *'on ait*

$$\mathfrak{M}' \models \alpha \in A$$

On construit d'abord $\mathfrak{M}'_o$ tel que $\mathfrak{M}'_o \models \alpha \in A$ pour tout entier non-standard *de* $\mathfrak{M}$. Pour cela on applique ω fois le lemme 10, à partir d'une liste des entiers non-standards de $\mathfrak{M}$. L'union de la chaîne des modèles obtenue est une Σ_n-extension de $\mathfrak{M}$, modèle de Π_2 - ZFL. On se ramène à un modèle de ZFL en lui appliquant le lemme 2. Il suffit alors d'itérer le processus précédent :

$$\mathfrak{M} \prec_n \mathfrak{M}'_o \prec_n \mathfrak{M}'_1 \prec_n \cdots$$

L'union des $\mathfrak{M}'_k$ a les propriétés requises.

Corollaire 9. - *Dans le modèle* $\mathfrak{M}'$ *obtenu au lemme 11,* N *est définissable par la formule :* $\exists y \in \omega\ (y \not\subseteq A \wedge x \in y)$. *En particulier, il existe un exemple du schéma de* Σ_{n+1}*-récurrence falsifié dans* $\mathfrak{M}'$.

Corollaire 10. - *Dans* Π_2 - ZF + *schéma de récurrence, on ne peut remplacer le schéma de récursion par un nombre fini d'axiomes. Le même résultat vaut pour le schéma de fondation.*

Sinon, le schéma de récurrence serait finitisable au-dessus de Π_2 - ZFL = Π_2 - ZF + V = L, ce qu'empêche le corollaire 9.

III-3. - INDEPENDANCE DU SCHEMA DE SEPARATION.

Dans Π_2 - ZF + Séparation, le schéma de fondation est dérivable. Donc le schéma de séparation est (globalement) indépendant de Π_2 - ZF.

Dans ce qui suit, nous montrons que le schéma de Σ_1-séparation est indépendant de Π_2 - ZF *même augmenté du schéma de fondation.*

La méthode repose sur la construction d'un modèle intérieur convenable.

Partons d'une énumération récursive (donc Δ_1) des axiomes de ZFL :

$$A_o, A_1, \ldots, A_n, \ldots$$

Définissons une Σ_1-classe H par la condition suivante :

$$x \in H \longleftrightarrow \exists n \in \omega\ \exists \alpha\ \{x \in L_\alpha \wedge L_\alpha \models A_o, \ldots, A_n \wedge \forall \beta \in \alpha\ L_\beta \not\models A_o, \ldots, A_n\}$$

(n est une variable et ne dénote pas un entier intuitif).

H est transitive comme réunion d'ensembles L_α.

Lemme 12. - H *est dans* Π_2 - ZF *un modèle intérieur de* Π_2 - ZFL.

D'après les lemmes 2 et 8, il suffit de raisonner dans ZF.

On a $H \subset L$. Il suffit donc de montrer que H est clos par les Δ_1-fonctionnelles prouvables de ZFL (lemme 6). Soit F(x) une telle fonctionnelle, définie par $\phi[\vec{x}, y]$, avec $\phi \in \Sigma_1$. D'après la section 1.2, il existe n standard tel que tout modèle transitif $A_o, \ldots, A_n$ réfléchisse ϕ. On peut choisir n assez grand pour que $A_o, \ldots, A_n \vdash \forall \vec{x}\ \exists y\ \phi[\vec{x}, y]$.

Soit alors $\vec{a} \in H$. Il existe $p \in \omega$ et un ordinal α tels que $\vec{a} \in L_\alpha$, α étant le premier ordinal tel que $L_\alpha \models A_o, ..., A_p$. Puisque n est standard, il existe un premier β tel que $L_\beta \models A_o, ..., A_n$. Si $p < n$, on a $\beta \geqq \alpha$ donc $\vec{a} \in L_\beta$. On peut donc supposer $p \geqq n$ et $L_\alpha \models A_o, ..., A_n$. ϕ définit alors dans L_α la restriction de F à L_α. En particulier :

$$F(\vec{a}) \in L_\alpha \subset H$$

N.B. - Une autre démonstration du lemme 12 se trouve dans [9] .

Lemme 13. - *Il existe une* Σ_1 *-fonctionnelle dont le domaine est inclus dans* ω *et qui énumère* H *, prouvablement dans* Π_2 - ZF.

Il suffit de l'établir pour ZF. Le théorème de Löwenheim-Skolem appliqué dans L montre que $H \subset L_{\omega_1^L}$. Posons :

$$D = \{ n \in \omega \mid \exists \alpha \ , \ L_\alpha \models A_o, ..., A_n \}$$

D est un ensemble dans ZF (et une Σ_1-classe dans Π_2 - ZF).

Soit F(α) l'énumération de l'univers L par les ordinaux construite par Gödel. A chaque $n \in D$, associons l'ordinal K(n) tel que K(n) soit le premier α tel que F(α) soit une surjection de ω sur L_β , β étant le premier ordinal tel que $L_\beta \models A_o, ..., A_n$.

Tout $n \in \omega$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$n = 2^i (2j + 1) - 1$$

Si $i \in D$, posons $W(n) = F_{(\alpha)}(j)$ avec $\alpha = K(n)$.

D'où une relation Σ_1 $y = W(x)$, fonctionnelle en y, pour laquelle :

$$\forall x \in H \quad \exists n \in D \ (W(n) = x).$$

Corollaire 11. - Π_2 - ZF + V = H *est inconsistant avec le schéma de* Σ_1 *-séparation.*

Soit $A = \{ x \in \omega \mid \exists y (y = W(x)) \}$

A est une Σ_1-classe. Par Σ_1-séparation, c'est un ensemble.

Si H $=$ V, H étant codable par A, on aurait une formule de satisfaction sur l'univers, ce qui est impossible.

Lemme 14. - *Soit* $\mathfrak{M} \models \Pi_2$ - ZF . *Le sous-modèle minimal (resp. transitif minimal) de vérifie* V $=$ H.

Soit $\mathfrak{M}_0$ le sous-modèle minimal. On a donc $H^{\mathfrak{M}_0} = M_0$.

H étant un modèle intérieur transitif, le même raisonnement s'applique au modèle transitif minimal (c'est-à-dire TR($\mathfrak{M}_0$)).

Il en résulte que tout modèle minimal de Π_2 - ZF falsifie un exemple du schéma de Σ_1-séparation.

En particulier, c'est le cas d'un modèle minimal *standard.* D'où :

Corollaire 12. - (en supposant l'existence d'un modèle standard de Π_2 - ZF) :
Π_2 - ZF $+$ *schéma de fondation* $\nvdash$ Σ_1*-séparation.*

N.B. - Le recours à l'hypothèse de l'existence d'un modèle standard peut être éliminé, par exemple au moyen de la technique de l'extension conservative (cf. par exemple [12]). Une question naturelle est celle de l'existence d'un modèle intérieur de Π_2 - ZF vérifiant *prouvablement* V $=$ H. Le lemme suivant l'interdit :

Lemme 15. - *Soit* U *un modèle intérieur transitif défini dans* ZF *par une formule sans paramètres. On suppose que pour tout axiome* A *de* Π_2 - ZF *on a* ZF $\vdash A^U$
Alors, si T *est une extension de* ZF *équiconsistante avec* ZF ,

$$T \nvdash H^U = U.$$

Plaçons-nous dans ZF + $H^U = U$. Pour tout $n \in \omega$, s'il existe α tel que $L_\alpha \models A_0, \ldots, A_n$, notons H(n) l'ensemble L_β , où β est le premier ordinal à convenir. $y = H(x)$ est Σ_1 , donc définit une fonctionnelle dans Π_2 - ZF. Dans Π_2 - ZF on a :

$\forall n \in \omega$, H(n) existe et H(n) $\in$ H $\rightarrow$ H(n + 1) existe

En effet, il existe k tel que H(n) $\in$ H(k), avec forcément k > n.
En relativisant à U, on peut prouver dans ZF :

$\forall n \in \omega$, $H^U(n)$ existe et $H^U(n) \in H^U \rightarrow H^U(n+1)$ existe

Si U = H^U, ceci se réduit à :

$\forall n \in \omega$, $H^U(n)$ existe $\rightarrow$ $H^U(n+1)$ existe.

Comme ZF $\vdash$ $H^U(O)$ existe, on a :

$\forall n \in \omega \quad \exists \alpha \; (L_\alpha \models A_o , \ldots, A_n)$.

Un tel énoncé implique la consistance de ZF, et ne peut être déduit dans T.

IV - L'ANALYSE DE ZFC.

T étant une théorie des ensembles, posons :

$$AN(T) = \{ A \mid T \vdash A^{HC} \} .$$

C'est l'*Analyse de* T. D'un point de vue utilitaire, on peut regarder AN(T) comme le fragment le plus important de T.

Nous nous proposons de préciser l'analyse de ZFC, et si possible d'en donner une axiomatisation directe.

Nous savons déjà que AN(ZFC) est une extension de Π_2 - ZFC. Elle vérifie V = HC et le schéma de fondation.

AN(ZFC) contient aussi le principe de réflexion, et même une forme renforcée de ce principe, qui relie les propriétés locales de HC à celles de l'univers V.

Lemme 16 (ZFC). - *Soit* M *un ensemble transitif tel que* $HC^M = HC$ *(et donc* $HC \subset M$*).*
Pour tout $a \in HC$ *il existe un* N *transitif dénombrable tel que :*

(i) $a \in N$

(ii) $N \equiv M$

(iii) $HC^N \prec HC$

Dans cet énoncé, tout ensemble transitif X est identifié avec la structure $< X, \in >$.
$\equiv$ est le symbole de l'équivalence élémentaire.

Partons de $X_o \prec M$ avec $TC(a) \subset X_o$ et $|X_o| = \aleph_o$

$HC^{X_o} \subset HC$ et $|HC^{X_o}| = \aleph_o$. Donc $HC^{X_o} \in HC$. On pose alors :

$$X_1 = X_o \cup TC(HC^{X_o})$$

on continue de même, en construisant une suite :

$$X_o \subset X_1 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$$

où chaque X_i est dénombrable, $X_{2k} \prec M$ et $X_{2k+1} = X_{2k} \cup TC(HC^{X_{2k}})$.

Soit $X = \bigcup_k X_k$. On a $X \prec M$ et par suite $HC^X \prec HC^M = HC$. De plus $HC^X = \bigcup_k HC^{X_k}$, ce qui assure que HC^X est transitif. Il reste à «collapser» X sur une structure standard, ce qui ne change pas HC^X.

Un ensemble tel que M peut être choisi dans ZFC de manière à vérifier un nombre quelconque d'axiomes de ZFC. On tire du résultat précédent la forme promise du schéma de réflexion :

Corollaire 13. - *Soit* $A_o , \dots , A_n , \dots$ *une liste des axiomes de* ZFC *. Pour tout* n *, et toute formule* $\phi[\vec{x}]$ *, on peut prouver dans* ZFC *:*

$$\forall x \in HC \quad \exists X \in HC \; [x \in X \wedge (A_o \wedge \dots \wedge A_n)^X \wedge \forall \vec{x} \in X(\phi^{HC^X}[\vec{x}] \longleftrightarrow \phi^{HC}[\vec{x}])$$

De ce corollaire, on peut tirer une axiomatisation de AN(ZFC) :

Corollaire 14. - *Soit* $A_o , \dots, A_n , \dots$ *une liste des axiomes de* ZFC . AN(ZFC) *est engendré par les axiomes suivants :*

$$\exists X \quad [(A_o \wedge \dots \wedge A_n)^X \wedge (A^{HC^X} \longrightarrow A)]$$

Le corollaire 13 assure que les énoncés sont déduits dans AN(ZFC).

Supposons que ZFC $\vdash A^{HC}$. Il existe n tel que $A_o, \ldots, A_n \vdash A^{HC}$.

Soit X tel que $(A_o \wedge \ldots \wedge A_n)^X$ et $A^{HC^X} \rightarrow A$. On a $(A_o \wedge \ldots \wedge A_n)^X \rightarrow A^{HC^X}$.
D'où finalement A.

Ce qui précède est valable, mutandis, en remplaçant ZFC par une extension quelconque de ZFC.

Parmi les théorèmes de AN(ZFC) on rencontre notamment :

- les axiomes de Π_2 - ZFC
- V = HC
- les exemples du schéma de fondation
- les exemples du schéma de réflexion.

Cette théorie est-elle engendrée par la liste précédente ? Ceci nous semble peu probable. Pourtant, dans le même temps, il nous paraît difficile d'exhiber un théorème classique de l'analyse qui ne puisse être établi sur les principes précédents. Quant à l'axiomatisation tirée du corollaire 14, elle est obscure et non naturelle.

V - DEFINISSABILITE EN TERMES D'ORDINAUX.

V-1. Définition.

Soit $\mathfrak{m} \models \Pi_2$ - ZF. Posons :

$OD^{\mathfrak{m}} = \{ a \in M \mid a$ définissable en termes d'ordinaux dans $\mathfrak{m} \}$

$HOD^{\mathfrak{m}} = \{ a \in M \mid a \in OD^{\mathfrak{m}}$ et $\forall b \in M \ (\mathfrak{m} \models b \in TC(a) \rightarrow b \in OD^{\mathfrak{m}}) \}$

On sait -cf. [8] , [ ] - que si $\mathfrak{m} \models$ ZF, $OD^{\mathfrak{m}}$ et $HOD^{\mathfrak{m}}$ sont définissables, et ce, par des formules indépendantes de $\mathfrak{m}$. Ces formules ne sont pas Σ_1 , et c'est pourquoi la méthode de transfert automatique développée après le lemme 8 ne s'applique pas aux modèles de Π_2 - ZF. Deux questions se posent alors, a priori indépendantes :

1) - $OD^{\mathfrak{m}}$ et $HOD^{\mathfrak{m}}$ sont-ils définissables dans les modèles de Π_2 - ZF ?

2) - $HOD^{\mathfrak{m}}$ est-il un modèle de Π_2 - ZF ?

Nous n'apporterons pas de réponse complète à ces questions.

V -2 . LES CLASSES OD_k et HOD_k.

Soit k un entier $\geqq 1$. $OD_k^{\mathfrak{m}}$ et $HOD_k^{\mathfrak{m}}$ sont définis comme $OD^{\mathfrak{m}}$ et $HOD^{\mathfrak{m}}$, en se restreignant aux définitions Σ_k. Le fait nouveau est que ces notions sont cette fois uniformément définissables : pour chaque k il existe une formule $T_k(u, x, y)$ qui énumère quand u décrit ω les relations Σ_k de Π_2 - ZF. On peut choisir $T_k \in \Sigma_k$, ce qui provient du caractère absolu de la formalisation de la logique dans ZF. La Σ_k-définissabilité en termes d'ordinaux se ramenant par des procédés standards en Σ_k-définissabilité en termes d'un seul ordinal, on obtient une définition de OD_k comme suit :

Pour chaque k, définissons une fonctionnelle $G_k(n, \alpha)$ par :

- $G_k(n, \alpha) = x$ si x est le seul objet tel que $T_k(n, \alpha, x)$
- $G(n, \alpha) = 0$ sinon.

D'où :

$$x \in OD_k \longleftrightarrow \exists \alpha \; \exists n \quad \omega \quad [x = G_k(n, \alpha)]$$

Cette définition de OD_k est Σ_{n+1}. On en tire une définition de HOD_k. D'où deux suites de classes :

$$OD_1 \subset OD_2 \subset \ldots \subset OD_k \subset \ldots$$

$$HOD_1 \subset HOD_2 \subset \ldots \subset HOD_k \subset \ldots$$

Pour tout $\mathfrak{m} \models \Pi_2$ - ZF, on a :

$$OD^{\mathfrak{m}} = \bigcup_k OD_k^{\mathfrak{m}}$$

$$HOD^{\mathfrak{m}} = \bigcup_k HOD_k^{\mathfrak{m}}$$

Ces «formules» - en fait des formules infinies - nous permettent de parler encore des collections O D et H O D (mais non des classes).

Si dans une extension T de Π_2 - ZF, l'une des suites précédentes est stationnaire, alors il y a définissabilité pour la notion correspondante. Cela se produit dans ZF. Nous ignorons si c'est déjà vrai de Π_2 - ZF.

V-3. - CAS OU L'ON OBTIENT DES MODELES DE Π_2 - ZF.

Ce qui précède traitait de la question 1. La question 2 sera résolue par l'affirmative, moyennant une hypothèse supplémentaire.

Lemme 17. - *Dans* Π_2 - ZF *schéma de fondation, chaque classe* HOD_k $(k \geqq 1)$ *et la collection* HOD *sont des modèles de* Π_2 - ZF . *Ces modèles vérifient le théorème du bon ordre.*

On prouve aisément dans Π_2 - ZF :

$$x \in HOD_k \longleftrightarrow x \in OD_k \wedge x \subset HOD_k$$

$$x \in HOD_k \longleftrightarrow TC(x) \cup \{x\} \subset HOD_k$$

$$x, y \in HOD_k \longrightarrow x \cup y \in HOD_k.$$

D'où en particulier l'axiome de cohérence. On a aussi :

$$\forall \alpha \quad \forall x \in OD_k \quad [L_\alpha [x] \in OD_k]$$

Si l'on admet de plus le principe de fondation, on prouve par induction sur α :

$$\forall \alpha \; \forall x \in HOD_k \; [L_\alpha [x] \in HOD_k]$$

On peut alors raisonner comme au lemme 4 pour montrer que HOD_k est un modèle de Π_2 - ZF.

Par construction, HOD_k est une section initiale de HOD_{k+1}. Donc H O D est limite d'une suite de Δ_0-extensions, et reste un modèle de Π_2 - ZF.

La preuve usuelle de l'axiome du choix dans H O D (dans ZF) s'étend sans grande modification : on raisonne d'abord dans chaque HOD_k pour établir que tout ensemble y est en bijection avec un ordinal. Le résultat est évidemment hérité par H O D.

N.B. - Les HOD_k étant des modèles intérieurs transitifs héritent du schéma de fondation. Par contre nous ne savons pas ce qu'il en est de H O D. Il se pourrait en particulier que le théorème du bon ordre y perde une grande partie de son pouvoir.

V-4. - TYPIFICATION DE L'UNIVERS.

Soit, dans une théorie T, une classe définissable U.

Disons qu'elle est *typifiable* s'il existe une fonctionnelle $R(\alpha)$, définie sur les ordinaux, telle que l'on ait :

1 - $\forall \alpha \ , R(\alpha) \in U$ et $R(\alpha) \subset U$

2 - $\forall x \in U \ \exists \alpha \ [x \in R(\alpha)]$

Exemples. - dans ZF, V_α typifie l'univers V ;

- dans Π_2 - ZF, L_α typifie la classe L.

Posons pour tout $k \geq 1$:

$$B_k = TR(OD_k).$$

Le lemme 4 montre que B_k est un modèle de Π_2 - ZF. On a :

$$x \in B_k \longleftrightarrow \exists y \in OD_k \ [x \in y]$$

On en tire aisément une typification de B_k.

Inversement, supposons U typifiable par $R(\alpha)$, et que $y = R(x)$ soit Σ_k. Alors $U \subset TR(OD_k) = B_k$.

Enonçons :

Lemme 18. - *Chaque classe* B_k *est typifiable. Inversement toute classe typifiable dans une extension* T *de* Π_2 - ZF *y est incluse dans un* B_k .

En particulier, toute extension de Π_2 - ZF dans laquelle l'univers est typifiable vérifie un énoncé de la forme :

$$V = B_k$$

Voici un exemple de non typification de l'univers : soit $\mathfrak{m}$ un modèle de ZFC falsifiant l'hypothèse du continu. $HC^{\mathfrak{m}}$ est un modèle de Π_2 - ZFC dans lequel toute partie typifiable est réunion de ω_1 ensembles dénombrables (au sens de $\mathfrak{m}$), donc est de cardinal $\leq \omega_1$ dans $\mathfrak{m}$. Ainsi $HC^{\mathfrak{m}}$ lui-même n'est pas typifiable (cf. [2]).

A l'extrême opposé, un modèle de Π_2 - ZFL vérifie $V = B_1$.

La typification de l'univers dans ZF par la fonction de rang est largement considérée comme un idée basique. Ce qui précède tend plutôt à montrer qu'en ce qui concerne les extensions de Π_2 - ZF, l'existence d'une typification de l'univers vient d'une hypothèse assez peu naturelle. Et ceci est normal : sous l'hypothèse V = HC - qui est consistante avec Π_2 - ZF - il n'existe plus de hiérarchie des infinis.

VI - CONCLUSIONS ET PROBLEMES.

Peut-on risquer une conclusion ? Les développements - plutôt techniques - précédents nous ont-ils appris quelquechose sur la possibilité d'une théorie des ensembles consistante avec V = HC ?

Remarquons tout d'abord que la théorie des modèles de Π_2 - ZF est très agréable, et se comporte largement comme la théorie des modèles de la Π_2-arithmétique (cf. [6] [7]). Un aspect dont nous n'avons pas parlé est celui de l'utilisation des techniques de forcing. Elle est très mauvaise : l'absence du principe de récurrence (sous forme de schéma), la non dérivabilité du schéma de Σ_1-séparation, sont des lacunes graves.

Quels principes ajouter pour obtenir une théorie plus naturelle ?

On peut proposer à tout le moins :

- le schéma de fondation
- le schéma de collection (la non-typification de l'univers fait que le schéma de substitution serait insuffisant pour les besoins courrants)

- le schéma de séparation
- et, si l'on y tient, l'hypothèse $V = HC$.

Il serait intéressant de préciser la «force» de l'analyse d'une telle théorie.

Il est vraissemblable que toute l'analyse classique s'y retrouve sans difficulté exagérée.

Terminons en posant quelques questions :

1 - Donner une axiomatisation *naturelle* de l'analyse de ZFC.

2 - Les collections O D et H O D sont-elles définissables dans Π_2 - ZF ? Sinon, donner des axiomes naturels entraînant leur définissabilité.

3 - Les suites OD_k et HOD_k peuvent-elles, ans être stationnaires, présenter des paliers arbitrairement longs ?

4 - Existe-t-il une plus grande classe typifiable dans Π_2 - ZF ?

Il est clair que si O D est définissable, TR(O D) représente la plus grande classe typifiable. Mais il se pourrait qu'une classe maximale existe sans que O D soit définissable.

5 - Peut-on prouver, sans le schéma de fondation, que HOD_k est un modèle de Π_2 - ZF ?

6 - HOD_k est-il un modèle de Π_2 - ZFC ? Plus généralement, comparer Π_2 - ZFC avec (Π_2 - ZF) + axime du choix.

7 - Peut-on tirer parti (comme pour la Π^0_2-arithmétique) des techniques de forcing en théorie des modèles ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BARWISE (1975) - *Admissible sets and structures* - Springer - Berlin.

[2] R. DALIN (1979) - *Une théorie locale des ensembles :* Π_2 - ZF - *Forcing dans cette théorie* - Thèse de 3e Cycle - LYON.

[3] DRAKE (1974) - *Set theory : an introduction to large cardinals* - North-Holland - Pub.

[4] H. GAIFMANN (1972) - *A note on models and submodels of arithmetic* - Conf. in Math. Logic - London 1970 - Lectures Notes in Math. - Vol. 255 - Springer Berlin - pp. 128-144.

[5] M. GUILLAUME (1977) - *Some remarks in set theory* - Math. Logic - Proceedings of the 1st Brazilian conference - Dekker Inc. - New-York.

[6] D.G. GOLDREI, A. MAC INTYRE and H. SIMMONS (1973) - *The forcing companions of number theories* - Isr. J. Math. - Vol. 14 - pp. 317-337.

[7] J. HIRSCHFELD (1975) - *Forcing - Arithmetic and Division Rings* - Lectures Notes in Math. Vol. 454 - Springer Berlin.

[8] J. MYHILL and D. SCOTT (1971) - *Ordinal definability - Axiomatic set theory* - Proceedings of symp. in pure Math. - Providence - pp. 271 - 278.

[9] J.F. PABION (1978) - V = HC ? Non publié.

[10] M.O. RABIN (1962) - *Diophantine equations and non-standard models of arithmetics* - Proceedings of the 1960 Int. Cong. in Logic. Math. and Ph. Sc. - Stanford University Press - pp. 151-158.

[11] M.O. RABIN (1961) - *Non-standard models and the independance of induction axiom* - Essays on the found. of Math. - The Magness Press - Jerusalem - pp. 287-299.

[12] R. SHOENFIELD (1967) - *Mathematical Logic* - Addison Wesley.

[13] A. WILKIE (1973) - *On models of arithmetic* - J.S.L. - Vol. 40 - pp. 41-47.

ERRATA à l'article de J.F. PABION

Page 26 - ligne 11 du haut, lire :

«Soit $\tilde{A}$ cet ensemble. $A \subset \tilde{A}$, ...»

ligne 15 du haut, lire :

..... «Soit $\mathfrak{M}$ une structure de $\mathcal{L}$ ».

Page 27 - ligne 5 du haut, lire :

(i) $\mathfrak{M} \models \exists x \varphi [x, \vec{b}]$

Page 29 - ligne 7 du bas, lire :

$$V_\omega^{\mathfrak{M}} = V_\omega^{\mathfrak{N}}$$

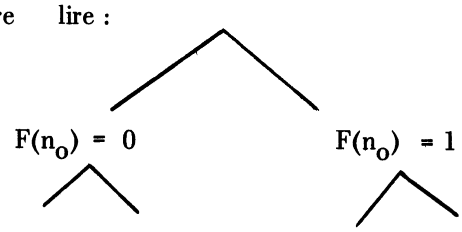
ligne 9 du bas, lire :

.... «Notons $AR(\mathfrak{M})$ la structure induite par $\mathfrak{M}$ sur $V_\omega^{\mathfrak{M}}$ » :

Page 30 - ligne 7 du bas, lire :

... «Donc il existe n tel que : »

Page 31 - figure lire :



Page 33 - ligne 2 du haut, lire :

« ... et soit α »

Page 36 - ligne 3 du haut, lire :

...«(resp. transitif minimal) de $\mathfrak{M}$ ».