ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

ANTOINE EHRHARD

Lois stables et propriété de Slépian

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 81-94

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_81_0>

LOIS STABLES ET PROPRIETE DE SLEPIAN

Antoine EHRHARD

Université Louis-Pasteur STRASBOURG

RESUME . -

Après une démonstration simple du lemme de Slépian pour les vecteurs gaussiens, on souligne l'aspect spécifique d'une telle propriété. On exprime ensuite en terme de propriété de Slépian vectorielle pour les vecteurs aléatoires stables et symétriques une caractérisation des normes d'espace L^p , $p \in [1,2[$.

0. - INTRODUCTION.

En 1858 Shläfli met en évidence une propriété des polyhèdres **sphériques** qui devient dans les années 70, sous la forme du lemme de Slépian, l'argument essentiel dans la recherche de conditions nécessaires de régularité des fonctions aléatoires gaussiennes. Nous savons que les propriétés du type de celle de Slépian ne s'étendent sous aucune forme aux fonctions aléatoires stables d'indice strictement plus petit que deux. On peut cependant se demander si certaines formes affaiblies de ces propriétés de comparaison s'étendent aux vecteurs aléatoires stables.

1. - Le lemme de Slépian pour les fonctions aléatoires gaussiennes.

Sur un ensemble T , on considère deux fonctions aléatoires gaussiennes centrées , $X = \{X_t \; ; \; t \in T\}$ et $Y = \{Y_t \; ; \; t \in T\}$; $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ désigne l'espace d'épreuve. On note VX et VY respectivement, les bornes supérieures latticielles de X et de Y dans $L^0(\Omega, \mathcal{G}, P)$:

$$VX = \operatorname{Sup} \{\operatorname{Sup}(X_s : s \in S) \; ; \; S \subset T \; , \; {}^{\#}S < +\infty \} .$$

La lemme de Slépian s'énonce alors de la façon suivante :

1.1. LEMME de Slépian .

Si pour tout couple (s,t) de $T \times T$ on a $E|X_s - X_t| \le E|Y_s - Y_t|$ alors on a $E\ VX \le E\ VY$.

Ceci est l'énoncé utile. Il suffit en fait de considérer la situation en dimension finie. Sur $\mathbb{R}^n$, l'espace euclidien de dimension n , $n \in \mathbb{N}$, Z est un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,Id)$; $\{a_1,\dots,a_m\}$ et $\{b_1,\dots,b_m\}$ sont deux ensembles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de même cardinal fini $m \in \mathbb{N}$. On montre la propriété suivante.

1.2. PROPOSITION.

Si pour tout couple $(k,\ell) \in \{1,\dots,m\}^2$ on a :

$$E|<a_k,Z> - <a_\ell,Z>| \le E|<b_k,Z> - <b_\ell,Z>|$$

alors on a

$$E\ \mathrm{Sup}(<a_k,Z> ;\ k \in \{1,\dots,m\}) \le E\ \mathrm{Sup}(<b_k,Z> ;\ k \in \{1,\dots,m\})$$

Sous cette forme équivalente, le lemme de Slépian admet une démonstration purement géométrique qui s'appuie, grâce à un calcul simple, sur un résultat ancien. L'idée d'une telle démonstration est due à SUDAKOV [6] .

Démonstration du lemme de Slépian :

Un premier lemme ramène le calcul de l'espérance du maximum des composants d'un vecteur gaussien à celui de la mesure d'angles solides dans un espace euclidien.

1.3. LEMME.

Soit $(Z_1,\dots,Z_m)$ un vecteur gaussien centré tel que $\mathrm{Sup}\ Z_j \ge 0$ p.s. ;

on note Z_o une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante de $(Z_1,\dots,Z_m)$. On a alors l'égalité :

$$1.3.1.\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ E\ \mathrm{Sup}\{Z_j;\ j=1,\dots,m\} = \lim_{\substack{\alpha\to o\\ \alpha>o}} \frac{\frac{1}{2}-P\{\alpha Z_1+Z_0>0,\dots,\alpha Z_m+Z_0>0\}}{\alpha}$$

Le lemme 1.3. résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned} P\{\alpha Z_1+Z_0>0,\dots,\alpha Z_m+Z_0>0\} &= P\{\alpha Z_1+Z_0<0,\dots,\alpha Z_m+Z_0<0\} \\ &= 1-P\{\mathrm{Sup}\ Z_j>\tfrac{1}{\alpha}Z_0\} \\ &= \tfrac{1}{2}-\int_0^\infty P\{\mathrm{Sup}\ Z_j>t\}\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2t^2}\,\alpha dt/\sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

On obtient la formule 1.3.1., en faisant tendre α vers zéro, le lemme 1.3. est démontré.

Sur $\mathbb{R}^n$, si Z est un vecteur aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,\mathrm{Id})$, $\{C_1,\dots,C_m\}$ un ensemble de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et Z_o une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante de Z, la probabilité $P\{\alpha < C_1,Z> + Z_0>0,\dots,\alpha< C_m,Z>+Z_0>0\}$ est la mesure normalisée de l'angle solide de $\mathbb{R}^{n+1}$ d'équation $\{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} : \alpha < C_1|x> + t>0,\dots,\alpha< C_m,x>+t>0\}$, pour tout α réel.

Concernant la mesure des angles solides dans un espace euclidien, on a le théorème de Shläfli [5] (1858) qui suit.

1.4. THEOREME.

$\mathbb{R}^d$ est l'espace euclidien de dimension d, S_{d-1} est la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, σ_{d-1} la mesure uniforme et de masse 1 sur S_{d-1}. Soient $\{u_1,\dots,u_m\}$ et $\{v_1,\dots,v_m\}$ deux ensembles de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^d$, de même cardinal m, $m\in\mathbb{N}$; si pour tout couple $(k,\ell)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,m\}$ on a l'inégalité : $< u_k,u_\ell> \le < v_k,v_\ell>$, alors on a :

$$\int_{\{x\,:\,\forall j,\ <u_j|x>\geq o\}} d\,\sigma_{d-1} \leq \int_{\{x\,:\,\forall j,\ <v_j|x>\geq o\}} d\,\sigma_{d-1}\ .$$

On peut donc, grâce au théorème de Shläfli, comparer les probabilités qui apparaissent dans le membre de droite de 1.3.1. Dans R^{n+1} on pose pour tout $\alpha > 0$:

$$u_k(\alpha) = (\alpha\, a_k^1,\ldots,\alpha\, a_k^n,1)/(\alpha^2\Sigma_j(a_k^j)^2+1)^{\frac{1}{2}},1 \leq k \leq m\ ,$$

$$v_k(\alpha) = (\alpha\, b_k^1,\ldots,\alpha\, b_k^n,1)/\ (\alpha^2\Sigma_j(b_k^j)^2+1)^{\frac{1}{2}},1 \leq k \leq m\ .$$

On a alors

$$<u_k(\alpha),u_\ell(\alpha)> \ = (\alpha^2 < a_k,a_\ell > +1)/(\alpha^2\|a_k\|^2+1)^{\frac{1}{2}}\,(\alpha^2\|a_\ell\|^2+1)^{\frac{1}{2}}\ .$$

Lorsque α est voisin de zéro, on a :

$$<u_k(\alpha),u_\ell(\alpha)> \ = (1+\alpha^2 < a_k,a_\ell >)(1-\tfrac{1}{2}\alpha^2\|a_k\|^2)(1-\tfrac{1}{2}\alpha^2\|a_\ell\|^2)+0(\alpha^4)$$

$$= 1-\tfrac{1}{2}\,\|a_k-a_\ell\|^2\,\alpha^2+0(\alpha^4)\ .$$

Puisque Z suit une loi $\mathcal{N}(0,Id)$, $E|<a_k,Z>-<a_\ell,Z>|$ est proportionnel à $\|a_k-a_\ell\|$, les inégalités $E|<a_k,Z>-<a_\ell,Z>|<E|<b_k,Z>-<b_\ell,Z>|$ impliquent que pour α assez petit : $<u_k(\alpha),u_\ell(\alpha)>\ >\ <v_k(\alpha),\ v_\ell(\alpha)>$.
Grâce au lemme 1.3. on conclut au lemme de Slépian par passage à la limite lorsque α tend vers zéro dans le théorème 2.4. . Ceci en achève la démonstration.

Le lemme de Slépian ne s'étend pas aux fonctions aléatoires stables. On a en effet montré dans [2] , que pour tout $\alpha \in\ ]0,2[$, on peut construire un ensemble T et deux fonctions aléatoires stables et symétriques d'indice $\alpha, X = \{X_t\ ;\ t \in T\}$ et $Y = \{Y_t\ ;\ t \in T\}$, telles que pour tout couple (s,t) de $T \times T$, $X_s - X_t$ ait même loi que $Y_s - Y_t$, que de plus $\mathrm{Sup}\{X_t\ ;\ t \in T\}$ soit fini p.s. et $\mathrm{Sup}\{Y_t;\ t \in T\}$ infini p.s. . On ne peut pas comparer deux fonctions aléatoires stables d'indice plus petit que deux en ne comparant que leurs accroissements.

2. - Une autre propriété de comparaison pour les variables gaussiennes.

Un théorème de Léonard Gross permet de comparer les mesures gaussiennes de convexes symétriques dans les espaces vectoriels , c.f. [3] .

2.1. THEOREME (L. Gross)

Dans $\mathbb{R}^n$, γ est la mesure $\mathcal{N}(0,Id)$ et C est un convexe symétrique. Si L est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $\|L(x)\| \leq \|x\|$ alors on a $\gamma(L(C)) \leq \gamma(C)$.

L'inégalité de Gross permet d'obtenir la proposition suivante :

2.2. PROPOSITION.

Dans $\mathbb{R}^n$, X et Y sont deux vecteurs aléatoires gaussiens centrés. On suppose que pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ on a $E|\langle u,X\rangle| \leq E|\langle u,Y\rangle|$, alors pour toute norme N sur $\mathbb{R}^n$, on a $E\, N(X) \leq E\, N(Y)$.

Cette dernière proposition apparaît comme un affaiblissement du lemme de Slépian. On va voir que même sous cette forme, il est difficilement généralisable aux vecteurs stables.

Remarque : On peut étendre les propositions 1.2. et 2.2. aux mesures invariantes par rotation sur $\mathbb{R}^n$. Or en dimension infinie, c'est-à-dire sur un espace de Hilbert H de dimension infinie, toute promesure invariante par isométrie est un mélange d'homothétiques de la promesure gaussienne canonique $\mathcal{N}(0,Id_H)$.

3. - Propriétés de comparaisons et caractérisation des normes d'espaces L^p .

Si $(B,\|.\|)$ est un espace de Banach de dimension 2 , il existe une application linéaire isométrique de B dans un espace $L^1(\Omega,\mu)$.
Cette propriété typique résulte du fait bien connu que tout convexe symétrique de $\mathbb{R}^2$ est un convexe de Steiner (autrement dit, dans $\mathbb{R}^2$, un polygone convexe symétrique est la somme au sens de Minkowski d'un nombre fini de segments symétriques) . Donc, si X et Y sont deux vecteurs aléatoires à valeur dans un espace de Banach $(B,\|.\|)$ de dimension 2 et si, pour tout u élément de dual B' de B , on a $E|<u|X>| \leq E|<u|Y>|$ alors nécessairement $E\|X\| \leq E\|Y\|$. Un tel énoncé, dans un espace normé $(\mathbb{E}, \|.\|)$ est en général toujours vrai si X et Y sont des vecteurs gaussiens : c'est la proposition 2.2. . Introduisons une définition générale.

DEFINITION 3.0.

Soient $(\mathbb{E},\|.\|)$ un espace vectoriel normé, séparé par son dual et α un réel, $\alpha \in [1,2[$; on dira que $(\mathbb{E},\|.\|)$ possède la propriété $P(\alpha)$ si pour tout couple de vecteurs aléatoires simples (c'est-à-dire à valeur dans un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{E}$) les inégalités $E|<u,X>|^\alpha \leq E|<u|Y>|^\alpha$, u parcourant $\mathbb{E}'$, impliquent la suivante : $E\|X\|^\alpha \leq E\|Y\|^\alpha$.

Nous allons montrer dans un premier temps que la propriété $P(\alpha)$ caractérise les espaces normés qui s'injectent isométriquement dans un espace $L^\alpha(\Omega,\mu)$. On verra ensuite ce qu'il advient lorsque l'on se restreint à la classe des vecteurs aléatoires stables.
Notre point de départ est ici l'article [1] de Bretagnolle, Dacunha-Castelle, Krivine (1965) paru dans les Annales de l'Institut Henri Poincaré, vol. II, n° 3 , 1966, p. 231-259 . Nous adoptons leur définition du type des espaces de Banach en modifiant la dénomination.

3.1. DEFINITION

Un espace de Banach B est dit de type L^p , $p \in [1,2]$, s'il existe une isométrie linéaire de B dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$.

On admet quelques résultats démontrés dans l'article précité, en particulier le théorème suivant.

3.2. THEOREME.

Pour qu'un espace vectoriel B, normé, sur $\mathbb{R}$, soit de type L^p (p étant un réel compris entre 1 et 2 inclus) , il faut et il suffit que tous les sous-espaces de dimension finie le soient.

Ce théorème permet de n'avoir à travailler qu'en dimension finie. Un espace normé de dimension finie est toujours isométriquement isomorphe à l'espace $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|.\|_C$ issue d'un convexe symétrique C de $\mathbb{R}^n$ par la formule : $\|.\|_C = \operatorname{Sup}\{ <.,u> \; ; u \in C\}$, les crochets $<.,.>$ désignant le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. On va supposer que la norme $\|.\|_C$ possède, pour un réel $\alpha \in [1,2[$, la propriété $P(\alpha)$ de 3.0. , et montrer qu'alors il existe un vecteur aléatoire Z , symétrique, à valeur dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait : $\|x\|_C^\alpha = E|<x,Z>|^\alpha$.

On pourra, dans le théorème suivant, ne considérer que le cas où les vecteurs X et Y sont en norme quelconque à la puissance α-ième intégrables, toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ étant équivalentes.

3.3. THEOREME.

Soient C un convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ et α un réel, $\alpha \in]0,2[$; si pour tout couple de vecteurs aléatoires (X,Y) à valeur dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ on a l' implication

3.3.1. $\forall u \in \mathbb{R}^n : E|\langle u|X\rangle|^\alpha \leq E|\langle u,Y\rangle|^\alpha \Rightarrow E\|X\|_C^\alpha \leq E\|Y\|_C^\alpha$,

<u>alors il existe un vecteur aléatoire</u> Z , <u>symétrique dans</u> $\mathbb{R}^n$, <u>tel que pour tout</u> $x \in \mathbb{R}^n$ <u>on ait</u> :

3.3.2. $$\|x\|_C = (E|\langle x,Z\rangle|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} .$$

En vue de la démonstration du théorème 3.3. on introduit les notations suivantes : S_{n-1} est la sphère euclidienne de rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$; σ_{n-1} est la mesure uniforme et de masse 1 sur S_{n-1} induite par la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n-1}$ et $d\sigma_{n-1}$ l'élément correspondant. On note $C_s(S_{n-1})$ l'ensemble des fonctions continues et symétriques sur S_{n-1} que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie pour tout $f \in C(S_{n-1})$ par $\|f\|_\infty = \operatorname{Sup}\{|f(x)| ; x \in S_{n-1}\}$. Pour $\alpha \in]0,2[$ on note $\mathcal{R}_\alpha(S_{n-1})$ le sous-espace vectoriel de $C_s(S_{n-1})$ engendré par les fonctions $x \mapsto |\langle u|x\rangle|^\alpha$ de S_{n-1} dans $\mathbb{R}$, u parcourant S_{n-1} ; $\mathcal{M}_s(S_{n-1})$ est l'espace des mesures symétriques sur S_{n-1} que l'on identifie au dual topologique de l'espace de Banach $(C_s(S_{n-1}), \|\cdot\|_\infty)$. La démonstration du théorème 3.3. que l'on va donner ici se fonde essentiellement sur le théorème de caractérisation des lois stables de Paul LEVY [4] .

3.4. THEOREME.

<u>Un vecteur aléatoire</u> T <u>est stable et symétrique, d'indice</u> α , <u>dans</u> $\mathbb{R}^n$, <u>si et seulement si il existe une mesure</u> $\mu \in \mathcal{M}_s^+(S_{n-1})$ <u>telle que pour tout</u> $u \in \mathbb{R}^n$ <u>on ait</u> :

$$E \exp i\langle u,T\rangle = \exp - \int |\langle u,t\rangle|^\alpha \mu(d\sigma_{n-1}(t)) ,$$

<u>de plus, la donnée de la loi de</u> T <u>détermine de manière unique l'élément</u> μ <u>de</u> $\mathcal{M}_s^+(S_{n-1})$.

Démonstration du théorème 3.3. :

On n'utilise le théorème 3.4. que sous la forme d'un corollaire qui en résulte immédiatement.

3.5. COROLLAIRE.

Pour tout $\alpha \in]0,2[$, $\mathcal{R}_\alpha(S_{n-1})$ est total dans $(C_s(S_{n-1}),\|\cdot\|_\infty)$ et pour tout $f \in \mathcal{R}_\alpha(S_{n-1})$ l'écriture $f(x) = \Sigma a_j |<u_j,x>|^\alpha, a_j \in \mathbf{R}$, $u_j \in S_{n-1}$, est essentiellement unique :

A toute fonction $f, f(x) = \Sigma a_j |< u_j,x>|^\alpha$, de $\mathcal{R}_\alpha(S_{n-1})$ on associe le nombre $L(f)$ donné par $L(f) = \Sigma a_j \|u_j\|^\alpha$. Le corollaire 3.5. du théorème de Paul Lévy montre clairement que L est une application bien définie sur $\mathcal{R}_\alpha(S_{n-1})$.
De plus, l'hypothèse 3.3.1. du héorème 3.3. assure que L est une forme linéaire positive sur $\mathcal{R}_\alpha(S_{n-1})$. En effet, si f et g sont deux éléments de $\mathcal{R}_\alpha(S_{n-1})$, $f(x) = \Sigma a_j |<u_j,x>|^\alpha$ et $g(x) = \Sigma b_j |<v_j,x>|^\alpha$, avec $a_j > 0$, $b_j > 0$, et $f(x) \leq g(x)$, on prend

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\Sigma a_j . \delta_{\{(\Sigma a_j)^{1/\alpha} u_j\}}).(\Sigma a_j)^{-1} ,$$

$$Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} (\Sigma b_j . \delta_{\{(\Sigma b_j)^{1/\alpha} v_j\}}) (\Sigma b_j)^{-1} ,$$

de sorte que pour tout $w \in \mathbf{R}^n$ on ait :

$$E|<w,X>|^\alpha = f(w) \quad \text{et} \quad E|< w,Y>|^\alpha = g(w) ;$$

(3.3.1) implique alors $E\|X\|_C^\alpha \leq E\|Y\|_C^\alpha$, ce qui s'écrit :

$$\Sigma a_j(\Sigma a_j)^{-1} \|(\Sigma a_j)^{\frac{1}{\alpha}} u_j\|_C^\alpha \leq \Sigma b_j(\Sigma b_j)^{-1}\|(\Sigma b_j)^{\frac{1}{\alpha}} v_j\|_C^\alpha ,$$

c'est-à-dire $L(f) \leq L(g)$. On en déduit (Bourbaki , chap. III, § 2, p.56, prop.2) que L se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur

$(\mathcal{C}_s(S_{n-1}), \|\cdot\|_\infty)$, qui provient d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_s^+(S_{n-1})$. De plus μ est positive. Ceci implique qu'il existe un vecteur aléatoire Z à valeur dans R^n tel que :

$$L(\Sigma a_j |< u_j,x>|^\alpha) = \int \Sigma a_j |<u_j,x>|^\alpha \mu(d\sigma_{n-1}(x)) = E\{\Sigma a_j |< u_j,Z>|^\alpha\} .$$

Par définition même de L , pour tout $\mu \in R^n$, $\|u\|_C$ s'écrit donc :
$\|u\|_C^\alpha = E| < u,Z >|^\alpha$, ce qui prouve le théorème 3.3.

Remarque : On peut aussi dire que sous les hypothèses du théorème 3.3., il existe un vecteur aléatoire stable et symétrique T , d'indice α , de mesure de Lévy μ , à valeur dans R^n , tel que $\|u\|_C^\alpha = -\log E \exp i < u,T >$. Comme par ailleurs la réciproque du théorème 3.3. est évidente, on a grâce au théorème 3.3. le théorème suivant qui complète le théorème 2. p. 238 de [1] :

3.6. THEOREME.

Pour qu'un espace vectoriel $\mathbb{E}$, sur R , soit de type L^p , avec $1 \leq p < 2$, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit vérifiée.

3.6.1. L'application de $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ dans R_+ qui, au couple $(x,y) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$, associe le réel $\|x-y\|^p$ est une application de type négatif.

3.6.2. Pour tout couple de vecteurs aléatoires simples (X,Y) à valeur dans $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$, les inégalités $E|<u,X>| \leq E|< u,Y >|^p$, $u \in \mathbb{E}'$, entraînent que $E\|X\|^p \leq E\|Y\|^p$.

Pour $p = 2$ seule la condition 3.6.1. subsiste.

4. Le cas des vecteurs aléatoires stables et symétriques.

Si X est un vecteur aléatoire stable d'indice $\alpha \in]0,2[$, à valeur dans un espace vectoriel normé $\mathbb{E}$ et si X n'est pas p.s. nul, X n'est jamais en norme à la puissance α-ième intégrable. Pour caractériser comme précédemment les espaces normés à l'aide de vecteurs aléatoires stables, d'indice α , il faut envisager des énoncés en puissance β-ième pour $\beta < \alpha$. Le théorème suivant en donne un exemple.

4.1. THEOREME.

$\mathbb{E}$ est un espace normé sur $\mathbb{R}$ et α un réel, $\alpha \in [1,2[$. On suppose que pour tout couple (X,Y) de vecteurs aléatoires simples, stables et symétriques, d'indice α à valeur dans $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$, on a l'implication

4.1.1. $\forall \beta < \alpha \quad (\forall u \in \mathbb{E}' \ , \ E| < u,X > |^{\beta} \leq E| < u,Y > |^{\beta}) \Rightarrow E\|X\|^{\beta} \leq E\|Y\|^{\beta}$.

Alors $\mathbb{E}$ est de type L^{α} .

Le théorème 4.1. sera une conséquence du théorème 3.6. grâce à la proposition suivante :

4.2. PROPOSITION.

Soient μ un élément non nul de $\mathcal{M}_s^+(S_{n-1})$ et α un réel , $\alpha \in]0,2[$; on note X et θ respectivement un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^n$ et une variable aléatoire dont les transformées de Fourier sont :

4.2.1. $E \exp i < u,X > = \exp - \int_{S_{n-1}} | < u,x > |^{\alpha} \mu(d\, \sigma_{n-1}(x))$,

4.2.2. $E \exp i\, t.\theta = \exp - |t|^{\alpha}$.

Pour toute fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$, positivement homogène d'ordre 1 , $h(x) = \|x\| \ h(x/\|x\|)$, on a :

4.2.3. $$\lim_{\beta\to\alpha} \frac{E\{h(X)\}^\beta}{E|\theta|^\beta} = \int_{S_{n-1}} h^\alpha(x)\ \mu(d\ \sigma_{n-1}(x))\ .$$

Avant de donner une démonstration du théorème 4.1. on démontre la proposition 4.2.

Démonstration de la proposition 4.2. : Par homogéneité, on a, grâce aux formules 4.2.1. et 4.2.3. , pour tout vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\beta \in]0,\alpha[$:

4.2.4. $$E|<u,X>|^\beta = E|\theta|^\beta \quad (\int |<u,x>|^\alpha \mu\,(d\ \sigma_{n-1}(x)))^{\beta/\alpha}\ .$$

On en déduit l'existence d'une constante M telle que, pour tout $\beta < \alpha$, on ait : $E\|X\|^\beta \leq M\ E|\theta|^\beta$. Si $\beta \in]0,\alpha[$, on désigne par μ_β l'image de la mesure $\|x\|^\beta P^X / E|\theta|^\beta$ par l'application de $\mathbb{R}^n$ sur S_{n-1} qui, à tout x , associe $x/\|x\|$. De toute suite $\{\mu_{\beta_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, où β_n tend vers α lorsque n tend vers l'infini , on peut extraire une sous-suite qui converge dans $\mathcal{M}_s(S_{n-1})$ vers un élément ν de $\mathcal{M}_s^+(S_{n-1})$. Le corollaire 1.5. du théorème de Paul Lévy permet d'identifier ν grâce à la formule 4.2.4. . On a $\mu = \nu$. Ceci achève la démonstration de la proposition.

Démonstration du théorème 4.1. : Grâce au théorème 3.2. , il suffit de démontrer le théorème 4.1. lorsque $\mathbb{E}$ est de dimension finie. Soit $(\mathbb{E},\|.\|) = (\mathbb{R}^n,\|.\|_C)$, où C est un convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ et $\|.\|_C = \operatorname{Sup}\{|<.\ ,\ x>|\ ;\ x \in C\}$; si X et Y sont deux vecteurs aléatoires stables et symétriques d'indice α , de mesures de Lévy discrètes, plaçant respectivement la masse $a_j > 0$ au point $r_j \in S_{n-1}$ et b_j en s_j , alors pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ les espérances figurant dans le nombre de gauche de l'implication 4.1.1. sont données par les formules :

$$(E|<u,X>|^\beta)^{\alpha/\beta} = (E|\theta|^\beta)^{\alpha/\beta}\ \Sigma\ a_j|<r_j,u>|^\alpha,$$

$$(E|<u,Y>|^\beta)^{\alpha/\beta} = (E|\theta|^\beta)^{\alpha/\beta}\ \Sigma\ b_j|<s_j,u>|^\alpha\ .$$

Par hypothèse, l'inégalité $\Sigma\, a_j |< r_j, u >|^\alpha \le \Sigma\, b_j |< s_j, u >|^\alpha$ implique que pour tout $\beta < \alpha$:

$$E\, \|X\|_C^\beta \le \|Y\|_C^\beta .$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par $E|\theta|^\beta$ et en faisant tendre β vers α on obtient grâce à la proposition 4.2. :

$$\Sigma\, a_j \|r_j\|_C^\alpha \le \Sigma b_j \|s_j\|_C^\alpha .$$

Ceci nous ramène à la démonstration du théorème 3.3. et achève celle du théorème 4.1. •

Comme tout espace $L^p(\Omega,\mu)$ s'injecte isométriquement dans un espace $L^q(\Omega',\mu')$ dès que $q \in]0,p]$ pour $p \in]0,2]$, on a en fait caractérisé les espaces normés de ce type avec les vecteurs stables. Voici pour conclure l'énoncé de cette caractérisation.

4.3. THEOREME.

Pour tout espace vectoriel réel normé $\mathbb{E}$ et pour tout $\alpha \in [1,2[$ les propriétés suivantes sont équivalentes.

4.3.1. Il existe une application linéaire isométrique de $\mathbb{E}$ dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$.

4.3.2. Pour tout couple (X,Y) de vecteurs aléatoires stables et symétriques d'indice α , simples, à valeur dans $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$, on a :

$$\forall\, \beta \in]0,\alpha[,\ (\forall\, u \in \mathbb{E}' ,\ E|< u,X >|^\beta \le E|< u,Y >|^\beta) \Rightarrow E\|X\|^\beta \le E\|Y\|^\beta .$$

REFERENCES

[1] BRETAGNOLLE, DACUNHA-CASTELLE, KRIVINE — Annales de l'I.H.P. Vol. II, n° 3, 1966, p. 231-259.

[2] A. EHRHARD et X. FERNIQUE — Comptes rendus C.R. Acad. Sc. Paris n° 23 du 29/6/81 p. 999 .

[3] L. GROSS — Measurable functions on Hilbert spaces. Trans. Ann. Math. Soc. , 105 (1962) , p. 372-390 .

[4] Paul LEVY — Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris , 1937 ch. VII § 63.

[5] L. SHLÄFLI — Quart. J. Pure Appl. Math. 2(1858) ; id. 3(1860)

[6] SUDAKOV — Dokl. Akad. Nauk SSSR Tom 197 (1971) , n° 1 .