

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

DOMINIQUE BAKRY

Semimartingales à deux indices

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 53-54

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_53_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SEMIMARTINGALES A DEUX INDICES

Dominique BAKRY

Université Louis-Pasteur - STRASBOURG

Le sujet de cet exposé est un travail à paraître dans le Séminaire de Probabilités XVI. Dans le cadre de l'étude des processus à deux indices, tel qu'il a été défini par [CW], on étudie les processus permettant de définir une intégrale stochastique de processus prévisible bornés à deux indices, comme mesure à valeurs dans L^p ($p \geq 1$).

Résumons brièvement les principaux résultats: étant donné un espace de probabilité complet muni de deux filtrations \mathbb{F}_s^1 et \mathbb{F}_t^2 vérifiant la condition de commutation F.4 de [CW], un processus prévisible élémentaire est une combinaison linéaire de processus de la forme $H(\omega)1_{]s_1, s_2]}(s)1_{]t_1, t_2]}(t)$, où $H(\omega)$ est une variable bornée mesurable par rapport à $\mathbb{F}_{s_1}^1$ et à $\mathbb{F}_{t_1}^2$.

Si K est un processus prévisible élémentaire, et X un processus quelconque à deux indices, on sait définir de manière immédiate l'intégrale stochastique $H.X$ de H par rapport à X .

Définition: On dira qu'un processus $X(\omega, s, t)$ est une semimartingale de S_p si:

- X est nul sur les axes ($X_{s,0} = X_{0,t} = 0$);
- X est continu à droite en probabilité;
- X est adapté
- $\|X\|_{S_p} = (\text{déf.}) \sup_H \|H.X\|_p < \infty$, où le sup est pris sur tous les processus prévisibles élémentaires bornés par 1.

On connaît différents types de semimartingales de S_p :

- 1) Les processus à variation finie, dont la variation est dans L^p
- 2) Les martingales de L^p ($p \geq 1$)
- 3) certains processus d'un modèle mixte, étudiés dans [WZ], de la forme $E(A_t / \mathbb{F}_s^1)$, où A_t est un processus à variation finie, adapté à \mathbb{F}_t^2 , et satisfait en outre à des conditions assez restrictives; en particulier, les mesures $dA_t(\omega)$ doivent être absolument continues par rapport à une même mesure déterministe sur R^+ .

4) Evidemment, le modèle symétrique obtenu en échangeant les rôles des deux coordonnées.

On sait donner des exemples de processus A_t à variation bornée, ne satisfaisant pas l'hypothèse d'absolue continuité, et tel que $X_{s,t} = E(A_t / \mathbb{F}_s^1)$ ne soit pas une semimartingale au sens L^0 ; d'autre part, il existe des semimartingales de S_2 qui ne se décomposent pas en somme de processus de la forme précédente.

On montre que tout élément de S_1 se décompose en somme d'un processus prévisible à variation finie et d'une martingale faible de S_1 . Mais, en général, on ne sait pas si la décomposition a lieu dans $S_p^{(p>1)}$. Pour aller plus loin, on fait des hypothèses supplémentaires qui peuvent être de deux types:

1) X reste une semimartingale quand on remplace la filtration \mathbb{F}_t^2 par la filtration constamment égale à \mathbb{F}_0^2 (on dit alors que X est une 1-semimartingale) : la décomposition précédente a alors lieu dans S_p

2) $X_{s,t}$ est, à s (resp. t) fixé, une semimartingale à un indice par rapport à la filtration \mathbb{F}_t^2 (resp. \mathbb{F}_t^1) ; dans ce cas, X se décompose de manière unique en somme de quatre éléments de S_p , $X = M + A + X^1 + X^2$, où M est une martingale, A un processus prévisible à variation finie, X^1 est de la forme $E(A_t^1 / \mathbb{F}_s^1)$, A_t^1 étant prévisible à variation finie dans la filtration \mathbb{F}_t^2 , X^2 étant d'un modèle symétrique. En particulier, X admet une version à trajectoires continues à droite.

Enfin, on donne des conditions suffisantes, généralisant celles de [WZ], pour qu'un processus de la dernière forme soit un élément de S_p .

Références: [CW] Cairoli, R.; Walsh, J.B.; Stochastic integrals in the plane; Acta Math. 134, 1975, 111-183.

[WZ] Wong, E.; Zakai, M.; Weak martingales and stochastic integrals in the plane, ZW 29, 1974, 109-122.