ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

A. ACQUAVIVA

Mesures aléatoires localement finies

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 25-40

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_25_0>

MESURES ALEATOIRES LOCALEMENT FINIES

A. ACQUAVIVA

Faculté des Sciences et Techniques de BREST

RESUME :

Soit X un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne $\mathbb{B}$. On note $\mathcal{M}_\ell(X, \mathbb{B})$ l'ensemble des mesures localement finies c'est-à-dire finies au voisinage de tout point. On étudie dans cet article la topologie faible de $\mathcal{M}_\ell$, ses parties compactes et on étend les théorèmes classiques de convergence des mesures aléatoires.

INTRODUCTION :

On trouve dans la littérature de nombreux résultats sur les espaces de mesures finies ainsi que finies à distance finie sur les espaces métriques ([4], [3] et [5] pour les mesures signées, par exemple). L'ensemble $\mathcal{M}_\ell$ des mesures localement finies est apparu lors de l'étude des mesures aléatoires. On sait en effet construire une loi sur $(\mathcal{M}_\ell(X, \mathbb{B}), \mathcal{L}_{\mathbb{B}})$ où $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$ est la tribu sur $\mathcal{M}_\ell$ engendrée par les applica-

$\{\omega(B)\ B \in \mathbb{B}\}$ dont les distributions marginales sont fixées à l'avance et ce dans le cas où X est polonais (en fait, même si X est Souslinien régulier). On sait également que toute loi sur $(\mathcal{M}_\ell, \mathcal{L}_{\mathbb{B}})$ est tendue ce qui justifie l'intérêt pour les parties compactes. Le problème de la convergence des lois sur $\mathcal{M}_\ell$ est enfin étudié à l'aide de la fonctionnelle génératrice de probabilité

$$\phi(f) = \int_{\mathcal{M}_\ell} e^{-\int f d\omega} P(d\omega)$$

I Soit donc X espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne $\mathbb{B}$. On note $\mathcal{M}_\ell(X, \mathbb{B})$ l'ensemble des mesures sur $(X,\mathbb{B})$ telles que pour tout ω de $\mathcal{M}_\ell$ et tout x de X il existe une boule ouverte de centre x et de rayon r (r dépendant de x et de ω) telle que $\omega(B(x,r)) < \infty$.
On pose alors $R(x,\omega) = \text{Sup}\{r : \omega(B(x,r)) < \infty\}$ et pour $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}_\ell$
$R(x,\mathcal{D}) = \text{Sup}_r\{r > 0 : \text{Sup}_{\omega \in \mathcal{D}} \omega(B(x,r)) < \infty\}$ si $\{r : \text{Sup}_{\omega\in\mathcal{D}} \omega(B(x,r)) < \infty\} \neq \phi$ et 0 sinon.

On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des réunions finies de boules ouvertes : un élément de $\mathcal{G}$ s'écrira par exemple : $A_I = \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i)$ ($I \subset \mathbb{N}$ I fini)
puis $\mathcal{G}_\omega = \{A_I = \bigcup_{i\in I} B(x_i,r_i) \in \mathcal{G} : \omega(\partial A_I) = 0\ r_i < R(x_i,\omega) \forall i \in I\}$

I Définition 1. a - Un ensemble $B \in \mathbb{B}$ sera dit ω-borné s'il existe $A_I \in \mathcal{G}_\omega$ tel que $B \subseteq A_I$

b - Soit $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{M}_\ell$: un ensemble $B \in \mathbb{B}$ sera dit $\mathcal{P}$-borné si $B \subseteq \bigcup_{i\in I} B(x_i,r_i)$ $I \subset \mathbb{N}$ I fini et $0 < r_i < R(x_i, \mathcal{P})$ $\forall i \in I$

Par analogie avec la topologie des mesures finies ([8]) on introduit l
définition suivante

I Définition 2. On appelle topologie faible sur $\mathcal{M}_e(X, \mathbb{B})$ la topologie ayant pour sous-base la famille $V(\omega)$ définie par

$V(\omega)=\{\nu: \nu(A_I)>\omega(A_I)-\varepsilon \quad ; \quad \nu(\bar{A}_I)<\omega(\bar{A}_I)+\varepsilon ; A_I\in\mathcal{G}_\omega$ et A_I ν-borné$\}$

Les deux lemmes suivants sont simples, donnés sans démonstration

I Lemme 1. Le filet ω_α converge faiblement vers ω si et seulement si on a les deux relations suivantes

a - Pour tout ouvert U : $\omega(U) \leqslant \underline{\lim}_{\alpha} \omega_\alpha(U)$

b - Pour tout fermé F ω-borné : $\overline{\lim}_{\alpha} \omega_\alpha(F) \leqslant \omega(F)$

I Lemme 2. L'ensemble $\mathcal{M}_d$ des mesures discrètes$\{\sum_{i\in I} c_i\delta_{x_i}$ $I\subset\mathbb{N}$ I fini $c_i\in\mathbb{Q}$ $x_i\in D$ dense dans X$\}$ est dense dans $\mathcal{M}_e$ pour la topologie faible qui est à base dénombrable.

On montre en effet que la famille $U_J(d)=\{\nu:\nu(A_J)>d(A_J)-\varepsilon ; \nu(\bar{A}_J)<d(\bar{A}_J)+\varepsilon ; A_J\nu$-borné avec $\varepsilon\in\mathbb{Q}$ $d\in\mathcal{M}_d$ et où les A_J sont des réunions finies de boules ouvertes à rayons rationnels et centrés appartenant à D, est une sous-base dénombrable génératrice pour la topologie faible. $V(\omega)$ est une base de voisinage de ω .

I Lemme 3. La topologie faible est métrisable.

Preuve : Il est clair que la topologie faible est séparée ; étant à base dénombrable il suffit de montrer la régularité ou ce qui est équivalent, l'existence d'une base de voisinage de ω constitué d'ensembles fermés (cf [8])

soit $V(\omega)=\{\nu: \nu(A)>\omega(A)-\varepsilon ; \nu(\bar{A})<\omega(\bar{A})+\varepsilon ; A\ \nu\text{-borné}\}$ $A=\bigcup_{i\in I} B(x_i,r_i)\in\mathcal{G}_\omega$

et donc $r_i<R(x_i,\omega)$. Les rayons de continuité (c'est-à-dire les r tels que $(\omega(\partial B(x,r))=0)$ sont denses sur $]0,R(x_i,\omega)[$, on peut donc en gardant les centres trouver A_0 et $A_1\in\mathcal{G}_\omega$ tels

que $A_0\subset A\subset\bar{A}\subset A_1$ avec $\omega(A)-\omega(A_0)<\delta$ et $\omega(A_1)-\omega(\bar{A})<\delta$ et $\delta<\varepsilon/2$

Soit $W(\omega)=\{\nu : \omega(A_i)-\varepsilon/2<\nu(A_i)\leqslant\nu(\bar{A}_i)<\omega(\bar{A}_i)+\varepsilon/2 \quad i=0,1$

A_1 ν-borné $\}$

Soit $\nu\in\overline{W}(\omega)$. La topologie étant à base dénombrable on peut se ramener aux suites : Soit donc $\nu_k\in W(\omega)$ telle que ν_k converge vers ν .

$\nu(A_1) \leq \overline{\lim_k}\ \nu_k(A_1) < \omega(A_1) + \varepsilon/_2 < \infty$

on peut donc trouver, par densité des rayons, B_0 et $B_1 \in \mathcal{G}_\nu$ tels que

$A_0 \subset B_0 \subset A \subset \bar{A} \subset B_1 \subset A_1$

on a alors : $\omega(A) - \varepsilon < \omega(A_0) + \delta - \varepsilon < \underline{\lim_k}\ \nu_k(A_0) \leq \underline{\lim_k}\ \nu_k(B_0) = \nu(B_0) \leq \nu(A)$

et $\nu(\bar{A}) \leq \nu(B_1) = \lim_k \nu_k(B_1) \leq \overline{\lim_k}\ \nu_k(\bar{A}_1) \leq \omega(A_1) + \varepsilon/_2 < \omega(\bar{A}) + \delta + \frac{\varepsilon}{2}$

$< \omega(A) + \varepsilon$

d'où le lemme.

Cependant une expression simple de la métrique n'apparaît pas contrairement au cas des mesures finies à distance finie où Harris ([4]) a défini une extension de la distance de Levy-Prohorov. Nous verrons enfin au paragraphe III la relation entre la tribu borélienne engendrée par la topologie faible et la tribu $\mathcal{L}_B$.

II Ensembles relativement compacts de $\mathcal{M}_\ell(X, \mathbb{B})$.

Nous montrons dans cette partie, ou nous supposons de plus que X est complet, qu'un sous-ensemble de $\mathcal{M}_\ell$ est relativement compact si et seulement si il est localement relativement compact*. Nous utiliserons, à cette fin, la définition de la compacité relative en terme de filets pour pouvoir utiliser la notion de filet universel ([2], [9]) ; un filet $\varphi(\alpha)$ sur un espace $\mathfrak{X}$ est universel si pour toute partie A de $\mathfrak{X}$ on a $\varphi(\alpha) \in A$ ou $\varphi(\alpha) \in \complement A$ (pour tout α à partir d'un certain rang). Dans un espace topologique régulier une partie A est relativement compacte si et seulement si tout filet admet un sous-filet convergeant ou si tout filet universel converge. Si $Y \subseteq X$ on note $\mathcal{M}_b(Y, Y \cap \mathbb{B})$ l'ensemble des mesures bornées définies sur $(Y, Y \cap \mathbb{B})$ et on utilisera le résultat classique de Prohorov suivant lequel un ensemble $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}(Y, Y \cap \mathbb{B})$ est relativement compact si et seulement si pour tout ε, il existe un compact K_ε de Y tel que $\sup_{\mu \in \mathcal{N}} \mu(Y - K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ Avec les notations de la partie précédente (déf. I -1) on peut énoncer la proposition suivante

I Proposition 1 Soit un sous-ensemble $\mathcal{P}$ de $\mathcal{M}_\ell(X, \mathbb{B})$ relativement compact alors :

a - Pour tout x de X : $R(x, \mathcal{P}) > 0$

b - Pour tout fermé F $\mathcal{P}$-borné $\mathcal{P}_F = \{\omega_{|F}$ restriction de $\omega \in \mathcal{P}$

* et satisfaisant certaines conditions

à F $\}$ est relativement compacte dans $\mathcal{M}_b(F, F\cap\mathcal{B})$

Preuve.

a - Soit $x \in X$ et supposons que $R(x,\mathcal{S}) = 0$. Il existe alors une suite ω_n d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que $\omega_n[B(x,\frac{1}{n})] > n$.
$\mathcal{S}$ étant relativement compacte on peut extraire une sous-suite, notée encore ω_n, convergente vers $\omega \in \mathcal{M}_\ell$. Si r est tel que $\omega(B(x,r)) < \infty$ et $\omega(\partial B(x,r)) = 0$ alors $\omega_n(B(x,r))$ converge vers $\omega(B(x,r))$ ce qui implique $\omega_n(B(x,r)) < \infty$ pour tout n à partir d'un certain rang ce qui est impossible.

b - Soit F un fermé $\mathcal{S}$-borné : il en existe de non triviaux d'après ce qui précède. On a donc, par définition $\mathcal{S}_F \subset \mathcal{M}_b(F, F\cap\mathcal{B})$.
Soit alors $\tilde{\omega}_\alpha = \omega_{\alpha|F}$ un filet sur $\mathcal{S}_F$ et montrons qu'il contient un sous-filet convergent. Puisque ω_α est un filet sur $\mathcal{S}$ il existe un sous-filet universel, noté ω_{α_β} et qui converge vers $\omega \in \mathcal{M}_\ell$.
Par hypothèse on a $F \subset U = \bigcup_{i\in I} B(x_i,r_i)$ avec $0<r_i < R(x_i,\mathcal{S})$. Choisissons ε_i tel que $r_i + \varepsilon_i < R(x_i,\mathcal{S})$ l'ouvert $V = \bigcup_{i\in I} B(x_i, r_i+\varepsilon_i)$ est encore $\mathcal{S}$-borné et la convergence de ω_{α_β} vers ω implique $\omega(V) < \infty$. La densité des rayons de continuité pour les mesures bornées implique qu'il existe $G \in \mathcal{G}_\omega$ tel que $F \subset \mathcal{U} \subset G \subset \bar{G} \subset V$ et donc $\lim_\beta \omega_{\alpha_\beta}(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$ d'où $\omega_{\alpha_\beta|\bar{G}}$ converge vers $\omega_{|\bar{G}}$ dans $\mathcal{M}_b(\bar{G}, \bar{G}\cap\mathcal{B})$. Il existe alors un compact K_ε de $\bar{G}$ tel que
$\forall_\beta : \omega_{\alpha_\beta}(\bar{G} - K_\varepsilon) \leq \varepsilon$ et donc, en posant $K_{o,\varepsilon} = K_\varepsilon \cap F$
$\forall_\beta : \omega_{\alpha_\beta}(F - K_{o,\varepsilon}) \leq \varepsilon$.

Plaçons-nous sur $\mathcal{M}_b(F, F\cap\mathcal{B})$: $\tilde{\omega}_{\alpha_\beta}$ est encore un filet universel sur $\mathcal{S}_F$ et par conséquent si $\operatorname{Sup}_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(B) < \infty$ $(B \in F\cap\mathcal{B})$ alors $\lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(B)$ existe et est finie. Sur la famille $\mathcal{U}_F$ des ouverts de F on peut définir une fonction d'ensemble λ en posant $\lambda(u) = \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(u)$:
λ est monotone fortement additive et finie donc d'après Topsöe ([9]) il existe une plus grande mesure t-régulière, notée δ_F, telle que

$\delta_F(u) \leqslant \lambda(u)$ pour tout u de $\mathcal{U}_F$, δ_F étant définie par $\delta_F(B) = \sup_{K \subset B} \inf_{U \supset K} \lambda(u)$ pour $B \in F \cap \mathbb{B}$. Il reste à voir que le sous filet $\tilde{\omega}_{\alpha_\beta}$ converge vers δ_F dans $\mathcal{M}_b(F, F \cap \mathbb{B})$.

Par construction on a $\delta_F(u) \leqslant \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(u)$ pour tout ouvert u de F et donc en particulier $\delta_F(F) \leqslant \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(F)$ mais

$\lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(F) \leqslant \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(K_{o,\varepsilon}) + \varepsilon \leqslant \inf_{u \supset K_{o,\varepsilon}} \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(u) + \varepsilon$

$\leqslant \sup_{K \subset F} \inf_{U \supset K} \lambda(u) + \varepsilon \leqslant \delta(F) + \varepsilon$ et ce pour tout ε donc, à la limite on a : $\lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(F) = \delta_F(F)$ ce qui avec $\delta_F(u) \leqslant \lim_\beta \tilde{\omega}_{\alpha_\beta}(u)\ \forall u \in \mathcal{U}_F$ équivaut à la convergence de $\tilde{\omega}_{\alpha_\beta}$ vers δ_F dans $\mathcal{M}_b(F, F \cap \mathbb{B})$.

Une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}_\ell$ possédant les deux propriétés de l'énoncé sera dite localement relativement compacte. Introduisons la notion suivante : une boule ouverte $B(x,r)$ sera dite de continuité pour le filet $\{\omega_\alpha\}$ si on a :

$$\lim_{r' \downarrow r} \overline{\lim_\alpha}\ \omega_\alpha [B(x,r')] = \lim_{r'' \uparrow r} \overline{\lim_\alpha}\ \omega_\alpha [\bar{B}(x,r'')] \text{ et } 0 < r < R(x;\{\omega_\alpha\})$$

Son appellation est justifiée par le fait que, quelque soit $\{\omega_{\alpha_\beta}\}$ sous-filet universel convergeant vers une limite ω, $B(x,r)$ est une boule de continuité pour ω (c'est-à-dire $\omega(\partial B) = 0$). Il est simple de voir que pour tout filet $\{\omega_\alpha\}$ extrait de $\mathcal{S}$ relativement compact, pour toute boule $B(x,r)$ $\mathcal{S}$-bornée il existe une sous-boule $B(x,r')$ de continuité pour $\{\omega_\alpha\}$: il suffit pour cela de prendre $B(x,r')$ boule de $\mathcal{G}_\omega$ de continuité pour la limite ω d'un sous-filet universel. Dans le cas où $\mathcal{S}$ est relativement compact on peut donc construire un recouvrement de X de voisinage fini (X paracompact) par des boules $B_i = B(x_i, r_i)$ qui soient $\mathcal{S}$-bornées et de continuité pour $\{\omega_\alpha\}$: la partition associée $\{A_i = B_i - \bigcup_{j<i} B_j\}$ sera dite alors partition de continuité pour $\{\omega_\alpha\}$ et si $\{\omega_{\alpha_\beta}\}$ est un sous-filet universel et donc convergeant vers ω les boules B_i étant de continuité pour ω on a $\omega(\partial B_i) = 0$ pour tout i et donc aussi $\omega(\partial A_i) = 0$. Si $u \in \mathcal{G}_\omega$ on peut donc écrire :

$$\underline{\lim}_{\alpha}\ \omega_\alpha(\bar u) \leq \lim_{\beta}\ \omega_{\alpha_\beta}(\bar u) = \omega(\bar u) = \sum_i \omega(\bar u \cap A_i) = \sum_i \lim_{\beta}\ \omega_{\alpha_\beta}(\bar u \cap A_i) \overbrace{\leq \sum_i \overline{\lim}_{\alpha}\ \omega_\alpha(\bar u \cap A_i)}^{\leq \omega(\bar u) < \infty}$$

Toutes les conditions nécessaires sont maintenant réunies et nous allons montrer qu'elles sont aussi suffisantes. Dans ce qui suit on pose $\mathcal{U}_\varepsilon = \{x : d(x,u) < \varepsilon\}$ où d est une métrique pour la topologie de X. Avec les notations ainsi introduites, on a :

II <u>Proposition 2</u> Soit $\mathcal{S}$ une partie de $\mathcal{M}_\ell$ localement relativement compacte satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a- Pour tout filet $\{\omega_\alpha\}$ extrait de $\mathcal{S}$, toute boule ouverte $\mathcal{S}$-bornée possède une sous-boule ouverte de même centre et de continuité pour $\{\omega_\alpha\}$

b- Pour toute partition de continuité $\{A_i\ i \in N\}$ pour $\{\omega_\alpha\}$ (~~qui soit de voisinage fini~~) et pour tout ouvert u de $\mathcal{G}$ tel qu'il existe ε vérifiant

$\sum_i \overline{\lim}_{\alpha}\ \omega_\alpha\ (u_\varepsilon \cap A_i) < \infty$ on ait

$\underline{\lim}_{\alpha}\ \omega_\alpha\ (\bar u) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\lim}_{\alpha}\ \omega_\alpha\ (\bar u \cap A_i)$ alors $\mathcal{S}$ est relativement compacte pour la topologie faible de $\mathcal{M}_\ell$

<u>Preuve</u> Soit $\{\omega_\alpha\}$ un filet extrait de $\mathcal{S}$ que l'on peut supposer être universel. $\mathcal{S}$ étant localement relativement compacte $\omega_{\alpha|\bar A_i}$ converge vers $\delta_{\bar A_i}$ dans $\mathcal{M}_b(\bar A_i, \bar A_i \cap \mathcal{B})$. Si $r' > r_i$* on a $\bar A_i \subset B(x_i,r') - \bigcup_{j<i} B_j \cap B_i$ donc $\delta_{\bar A_i}(\bar A_i) = \overline{\lim}_{\alpha}\ \omega_\alpha(\bar A_i) \leq \lim_{\alpha}\ \omega_\alpha(B(x_i,r')) - \lim_{\alpha}\ \omega_\alpha(\bigcup_{j<i} B_j \cap B_i)$ en utilisant le fait que ω_α étant universel la fonction d'ensemble $\lambda(A) = \lim_{\alpha}\ \omega_\alpha\ (A)$ est additive et monotone sur l'anneau des parties $\mathcal{S}$-bornées. L'inégalité ci-dessus est vraie quelque soit r' donc se conserve à la limite et le fait que $B(x_i,r_i)$ soit de continuité

* r' étant tel que $\mathcal{B}(x_i,r')$ soit encore $\mathcal{S}$-bornée.

pour $\{\omega_\alpha\}$ implique

$$\delta_{\bar{A}_i}(\bar{A}_i) = \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{A}_i) \leq \lim_{r''\uparrow r_i} \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{B}(x_i,r'') - \lim_\alpha \omega_\alpha(\bigcup_{j<i} B_j \cap B_i)$$

$$\leq \lim_{r''\uparrow r_i} \lim_\alpha \left[\omega_\alpha(\bar{B}(x_i,r'') - \omega_\alpha(\bigcup_{j<i} B_j \cap B_i)\right]$$

d'où $\lim\limits_\alpha \omega_\alpha(\bar{A}_i) \leq \lim\limits_{r''\uparrow r_i} \lim\limits_\alpha \omega_\alpha\left[(\bar{B}(x_i,r'') - \bigcup\limits_{j<i} B_j \cap \bar{B}(x_i,r'')\right]$

soit $C_{i,r''} = \bar{B}(x_i,r'') - \bigcup\limits_{j<i} B_j \cap B(x_i,r'') = \bar{B}(x_i,r'') - \bigcup\limits_{j<i} B_j \subset A_i \subset \bar{A}_i$

$C_{i,r''}$ est donc un fermé de $\bar{A}_i$ contenu dans A_i d'où

$\lim\limits_\alpha \omega_\alpha(\bar{A}_i) \leq \lim\limits_{r''\uparrow r_i} \delta_{\bar{A}_i}(\bar{B}(x_i,r'') - \bigcup\limits_{j<i} B_j) = \delta_{\bar{A}_i}(A_i)$ et on a aussi

la majoration $\lim\limits_\alpha \omega_\alpha(\bar{A}_i) \leq \lim\limits_\alpha \omega_\alpha(A_i)$ puisque $C_{i,r''} \subset A_i \ \forall r''$

on a donc les égalités $\delta_{\bar{A}_i}(\bar{A}_i) = \delta_{\bar{A}_i}(A_i) = \lim\limits_\alpha \omega_\alpha(A_i) = \lim\limits_\alpha \omega_\alpha(\bar{A}_i)$ (R)

On peut alors poser pour tout A de B : $\omega(A) = \sum\limits_i \delta_{\bar{A}_i}(A \cap A_i)$ et montrons que ω_α converge vers ω dans $\mathcal{M}_\ell$

d'abord ω appartient à $\mathcal{M}_\ell$ car par hypothèse la partition est de voisinage fini : tout x possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de A_i et donc pour un tel voisinage la série ci-dessus se réduit à une somme finie.

Soit ensuite $\mathcal{U}$ appartenant à $\mathcal{G}_\omega$: il existe donc ε tel que

$\omega(\bar{u}_\varepsilon) < \infty$ et on a : $\omega(\bar{u}_\varepsilon) = \sum\limits_i \delta_{\bar{A}_i}(\bar{u}_\varepsilon \cap A_i) = \sum\limits_i \delta_{\bar{A}_i}(\bar{u}_\varepsilon \cap \bar{A}_i)$

et donc $\sum\limits_i \lim\limits_\alpha \omega_\alpha(u_\varepsilon \cap A_i) \leq \sum\limits_i \lim\limits_\alpha \omega_\alpha(\bar{u}_\varepsilon \cap \bar{A}_i) \leq \sum \delta_{\bar{A}_i}(\bar{u}_\varepsilon \cap \bar{A}_i) < \infty$

on peut donc appliquer les hypothèses et écrire compte tenu des relations (R)

$$\omega(u) = \sum_i \delta_{\bar{A}_i}(u \cap A_i) = \sum_i \delta_{\bar{A}_i}(u \cap \bar{A}_i) \leq \sum_i \lim_\alpha \omega_\alpha(u \cap \bar{A}_i) = \sum_i \lim_\alpha \omega_\alpha(u \cap A_i)$$

$$\leq \lim \omega_\alpha(u) < \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{u}) \leq \sum_i \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{u} \cap A_i) = \sum \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{u} \cap \bar{A}_i)$$

$$\leq \sum_i \delta_{\bar{A}_i}(\bar{u} \cap \bar{A}_i) = \sum_i \delta_{\bar{A}_i}(\bar{u} \cap A_i) = \omega(\bar{u})$$

d'où la proposition

Le corollaire suivant donne un critère plus simple de compacité relative en montrant qu'une partie $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}_\ell$ peut - être relativement compacte si elle est suffisamment "imbriquée" dans l'ensemble des mesures finies à distance finie.

II Corollaire | Avec les notations de la proposition précédente supposons que tout filet extrait de $\mathcal{S}$ possède la propriété suivante : il existe un sous-filet ω_{α_β} tel que pour toute boule ouverte $B = B(x,r)$ on ait :

$$\sum_i \operatorname{Sup}_\beta \omega_{\alpha_\beta} (B \cap A_i) < \infty$$

$\mathcal{S}$ est alors relativement compacte.

Preuve Il s'agit simplement de voir que la condition b) de la proposition précédente est automatiquement satisfaite pour tout élément u de $\mathcal{G}$. Soit en effet $u \in \mathcal{G}$ donc contenu dans une boule ouverte $B(x,r)$ pour r assez grand et soit ω_{α_β} le sous-filet de ω_α possédant la propriété de l'énoncé. On a alors

$$\underline{\lim}_\alpha\, \omega_\alpha\,(\bar{u}) \leqslant \underline{\lim}_\alpha\, \omega_{\alpha_\beta}\,(\bar{u}) \leqslant \lim_\beta\, \omega_{\alpha_\beta}\,(\bar{u}) = \overline{\lim}_\beta \sum_i \omega_{\alpha_\beta}\,(\bar{u} \cap A_i)$$

or $\omega_{\alpha_\beta}(\bar{u} \cap A_i) \leqslant \omega_{\alpha_\beta}(B \cap A_i) \leqslant \alpha_i$ avec $\sum_i \alpha_i < \infty$ on peut donc appliquer le lemme de Fatou : $\overline{\lim}_\beta \sum_i \omega_{\alpha_\beta}(\bar{u} \cap A_i) \leqslant \sum_i \overline{\lim}_\beta\, \omega_{\alpha_\beta}\,(\bar{u} \cap A_i)$

$$< \sum_i \overline{\lim}_\alpha\, \omega_\alpha\,(\bar{u} \cap A_i)$$

d'où le corollaire.

III Convergence des mesures aléatoires localement finies

Soit P une loi de probabilité sur $(\mathcal{M}_\ell(X, \mathbb{B}), \mathcal{L}_{\mathbb{B}})$ où X est un espace métrique complet séparable. On considère sur X un criblage c'est-à-dire une famille dénombrable de partitions emboitées $\{A_{i,n} : \forall_n \quad X = \sum_i A_{i,n} \quad A_{i,n} = \sum_j A_{j,n+1}\}$ constituée d'ensembles mesurables de diamètre tendant vers zéro quand n augmente indéfiniment. Par définition de $\omega \in \mathcal{M}_e$ pour tout x de X il va exister un premier couple (i,n) pour le préordre $(i,n) \leqslant (j,m)$ si $n < m$ ou $n = m$ et $i < j$, tel que $\omega(A_{i,n}) < \infty$. On peut associer ainsi à chaque mesure ω une partition formée d'éléments du criblage la rendant σ-finie et telle que si on l'énumère sous la forme $\{A_{n,\omega}\}$ l'application de $\mathcal{M}_e$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par $\omega \to \omega(A_{n,\omega})$ soit mesurable [la preuve de la mesurabilité est purement technique, nous ne la donnerons pas ici].

On peut donc poser $\rho_P(A) = \int_{\mathcal{M}_e} \sum_n \frac{\omega(A_{n,\omega} \cap A)}{2^n(1+\omega(A_{n,\omega}))} \, dP$ et obtenir sur $(X, \mathbb{B})$ une mesure bornée ayant la propriété suivante : $\rho_P(N) = 0$ implique $\omega(N) = 0$ P. ps.* Nous pouvons alors établir la relation entre la tribu borélienne engendrée par la topologie faible et la tribu $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$.

III Lemme 1 | Soit P une loi de probabilité sur $(\mathcal{M}_e(X, \mathbb{B}), \mathcal{L}_{\mathbb{B}})$ où $\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$ est la tribu engendrée par les variables $\varphi_B(\omega) = \omega(B)$ pour $B \in \mathbb{B}$. Soit $\mathcal{B}$ la tribu borélienne définie par la topologie faible. L'indice P désignant la complétion, on a

$$\mathcal{L}_{\mathbb{B}}^{P} = \mathcal{B}^{P}$$

Preuve : Il est clair que $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}_{\mathbb{B}}$. Inversement, l'existence de ρ_P implique que $P\{\omega : \omega(B) > \alpha\} = P\left[\lim_i \uparrow \{\omega : \omega(K_i) > \alpha\}\right]$ où K_i compact et $\rho_P(\lim_i \uparrow K_i) = \rho_P(B)$. Or si K est compact, $\{\omega : \omega(\bar{u}) < \delta\}$ est ouvert si $u \in \mathcal{G}$ et $\{\omega : \omega(K) < \delta\} = \lim_i \{\omega(\bar{u}_i) < \delta\}$ avec $u_i \in \mathcal{G}$ implique $\varphi_K(\omega)$ est $\mathcal{B}$ mesurable et $\varphi_B(\omega)$ est $\mathcal{B}^P$ mesurable d'où le lemme.

On ne distinguera donc plus, par la suite, les deux tribus.

Introduisons les notations suivantes : $D(x,P) = \{ r \in \mathbb{R}_+ : r \notin R(x,\omega)$ pour (P) presque tout $\omega\}$ et $\mathcal{G}^P = \{u \in \mathcal{G} \ \ u = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) \ \ \omega(\partial u) = 0$ P.ps $r_i \in D(x_i, P)$ $\forall i \in I$ I partie finie de $\mathbb{N}\}$. Pour x fixé dans X on voit que $R(x,\omega)$ est mesurable $-\mathcal{L}_{\mathbb{B}}$, puisque semie-continue inférieurement

* Dans la suite, telle mesure sera appelée localement dominante

et que $\{\omega : R(x\ \omega) \in [\alpha\ \beta\ [\} = \sum_{\alpha \leq r < \beta} \}\omega : R(x,\omega) = r\}$ implique que $P\{ R(x,\omega) = r\} = 0$ sauf pour une infinité dénombrable au plus ce qui montre que $D(x,P) = \mathbb{R}_+ - D_x$ où D_x est dénombrable. Dans ce qui suit, la définition de la convergence de P_α vers P est celle de Parthasaraty puisqu'on se place sur l'espace métrique $(\mathcal{M}_e, (X, \mathbb{B}), \mathcal{B})$

III Proposition 1 | Une condition nécessaire et suffisante pour que $P_\alpha \Rightarrow P$ est que la loi du vecteur $(\omega(u_1)\ldots\omega\ (u_k))$ pour P_α converge vers la loi pour P sur $\mathbb{R}_+^k$, où chaque u_i appartient à $\mathcal{G}^P$.

Preuve : Supposons d'abord que P_α converge vers P et montrons que $P_\alpha\ \{\omega:\omega(\bar{u}_i) < a_i\ \ i=1\ldots k\}$ converge vers $P\{\omega : \omega\ (\bar{u}_i) < a_i\ \ i=1\ldots k\}$ pour des a_i de P-$\omega(u_i)$ continuité c'est-à-dire $P\{\omega(\bar{u}_i) = a_i\} = 0$ et pour des éléments u_i appartenant à $\mathcal{G}^P$. D'après la définition, il existe $N_1\ldots N_k$ négligeables, tels que pour tout $\omega \notin \bigcup_{i=1}^{k} N_i = N$ on ait $R(x_j,\omega) \neq r_j$ pour tous les centres et tous les rayons correspondants intervenant dans la définition des u_i. Soit l'ouvert $A = \{\omega : \omega(\bar{u}_i) < a_i\ \ i=1\ldots k\}$ et considérons ω_o appartenant à $\bar{A} - N$: Si $\omega_o(u_i) = \infty$ il existerait $K_i \subset u_i$ tel que $\omega_o(K_i) > a_i$ et donc aussi $\omega_o(G_i) > a_i$ ou $G_i \in \mathcal{G}_{\omega_o}$ et $K_i \subset G_i \subset u_i$; or il existe $\omega_\alpha \in A$ et $\omega_\alpha \Rightarrow \omega_o$ donc $\omega_o(G_i) \leq \underline{\lim}_\alpha\ \omega_\alpha\ (G_i) < a_i$ ce qui est contradictoire. Donc $\omega_o(u_i) < \infty$ et $\omega_o \notin N$ implique $u_i \in \mathcal{G}_{\omega_o}$ et donc $\omega_o(\bar{u}_i) = \lim_\alpha \omega_\alpha(\bar{u}_i) \leq a_i$.

d'où $\bar{A} - N \subset \{\omega : \omega(\bar{u}_i) \leq a_i\ \ i=1\ldots k\}$ et par définition

Ceci implique $P[\partial A] = 0$ et donc $P_\alpha\ (A) \to P(A)$, inversement, à l'aide de la mesure bornée ρ_P on construit une sous-famille de $\mathcal{G}^P$. Soit en effet une boule $B(x,r)$ fixée et

$r_1 < r < r_2$: on a $\rho_P(\partial B(x,s)) = 0$ pour tout $s \in]r_1, r_2[- D_x$ qui est dénombrable ce qui, associé à la propriété de densité de $D(x,P)$ permet d'approcher tout élément $u \in \mathcal{G}$ par deux suites $u_{i,1} \underset{i}{\uparrow} u$ et $u_{i,2} \underset{i}{\downarrow} u$ éléments de $\mathcal{G}^P$. Il s'en suit que la famille $\{ \omega : |d(u) - \omega(u)| < \alpha \}$ où les éléments u sont dans $\mathcal{G}^P$ et $d \in \mathcal{M}_d$ avec des α tels que $\alpha + d(u)$ soit point de P - continuité pour $\omega(u)$ (de tels points sont denses dans $\mathbb{R}_+$) forme une sous-base que l'on peut prendre dénombrable de la topologie faible de $\mathcal{M}_e$.

Si u est un ouvert de $\mathcal{M}_e$ on a donc $P(u) = \lim_n \uparrow P(\bigcup_{i=1}^{n} u_i)$

et $P(\bigcup_{i=1}^{n} u_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \sum_{j_1 \dots j_n \subset [1,..i]} P[u_{j_1} \cap \dots \cap u_{j_i}]$

où les u_i appartiennent à la sous-base définie ci-dessus ce qui implique, par hypothèse, que $P_\alpha [u_{j_1} \cap \dots \cap u_{j_i}] \to P [u_{j_1} \cap \dots \cap u_{j_i}]$

d'où $P(u) \leqslant \underline{\lim}_{\alpha} P_\alpha(u)$ ce qui achève la preuve

Cette proposition étant les résultats connus dans le cadre de mesures finies à distance finie (cf. [3] et [6]). Nous aurons néanmoins besoin d'une propriété supplémentaire de la suite P_n pour pouvoir caractériser simplement sa convergence. On sait qu'il existe une mesure bornée $\mathcal{S}_{P_n}$ localement dominante pour la suite P_n donc qu'il existe une suite de compact $K_i \uparrow F$ pour tout fermé F $\mathcal{G}$-borné telle que $P_n \{(F - \lim \uparrow K_i)\} = 0$ pour tout n. On introduit donc la propriété suivante : la convergence est uniforme c'est-à-dire :

$\forall \varepsilon \; \exists K_\varepsilon : P_n \{ \omega(F - K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\} > 1 - \varepsilon$ pour tout F $\mathcal{G}$- borné et $\forall n$.

III Lemme 1 : Soit P_n une suite satisfaisant à la condition ci-dessus et convergente vers P : on a les inégalités suivantes

$$a - \overline{\lim_n} \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i \, \omega(u_i)} dP_n \leqslant \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i \omega(u_i)} dP$$

$$\forall \; s_i \in R_+ \quad \text{et} \quad u_i \quad \text{ouverts} \quad i=1 \dots k$$

$$b - \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i \omega(F_i)} dP \leqslant \underline{\lim_n} \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i \omega(F_i)} dP_n$$

$$\forall\, s_i \in R_+ \quad \text{et} \quad F_i \ \text{fermés}, \ \mathcal{G}\text{-bornés}$$

<u>preuve</u> : a - Un ouvert est limite croissante d'éléments de $\mathcal{G}^P$ et l'inégalité provient directement de la proposition précédente.

b - Supposons d'abord que les F_i soient compacts : alors $F_i = \lim\limits_j \downarrow u_{i,j}$ ou $u_{i,j} \in \mathcal{G}^P$ et les éléments de $\mathcal{M}_\ell$ étant localement finis il découle des définitions que $\omega(u_{i,j}) \downarrow \omega(F_i)$; il suffit alors de réappliquer la proposition précédente.

Soit maintenant F_i fermés $\mathcal{G}$-bornés : l'hypothèse faite sur la suite P_n implique que

$$I_n(F - K_\varepsilon) = \int (1 - e^{-\omega(F-K_\varepsilon)})\, dP_n \leqslant \varepsilon \text{ pour tout } n.$$

La fonction d'ensemble I_n est monotone sous-additive, donc

$I_n(F) - I_n(K_\varepsilon) \leqslant I_n(F-K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon \ \forall\, n$ et donc pour tout fermé F : $I_n(F) - I_n(F \cap K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon \forall n$. Choisissons $K_i \subset F_i$ tel que $\forall n$ $I_n(F_i) - I_n(K_i) < \frac{\varepsilon}{k}$ donc

$$\int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i\, \omega(F_i)} dP \leqslant \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i\, \omega(K_i)} dP \leqslant \underline{\lim_n} \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i\, \omega(K_i)} dP_n$$

$$\text{et} \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i\, \omega(K_i)} dP_n \leqslant \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i\, \omega(F_i)} dP_n + \varepsilon$$

d'où le lemme en faisant tendre ε vers zéro.

Nous pouvons alors énoncer le résultat principal, en notant $\mathcal{C}_1(\mathcal{G})$ l'ensemble des fonctions continues définies sur X à valeurs dans $[0,1]$ et à support $\mathcal{G}$-bornés.

III <u>Proposition 2</u> Soit P_n une suite de probabilités sur $(\mathcal{M}_\ell, \mathcal{B})$ telle que $\forall \varepsilon\ \exists\ K_\varepsilon$: $P_n\{\omega(F-K_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\} > 1 - \varepsilon$ pour tout n et tout fermé F $\mathcal{G}$-borné. Une condition nécessaire et suffisante pour que P_n converge vers P

et que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_1(\mathcal{G})$

$$\phi_n(f) = \int e^{-\int f d\omega} dP_n(\omega) \to \int e^{-\int f d\omega} dP = \phi(f)$$

Preuve :

Si $P_n \Rightarrow P$: Pour f appartenant à $\mathcal{C}_1(\mathcal{G})$ il existe $f_k \leq f \leq g_k$ où f_k et g_k sont deux suites de fonctions étagées telles que $f_k \uparrow f$ $g_k \downarrow f$. Soit F fermé, support de f* et K compact tel que $P_n\{\omega(F-K)<\varepsilon\} > 1-\varepsilon$ $\forall n$

Soit $g_k = \sum_{i=1}^{N_k} C_i^k \, \mathbb{1}_{\{C_{i-1}^k \leq f < C_i^k\}}$ les points C_i^k de la subdivision de $[0,1]$ étant pris comme points de continuités pour la mesure bornée $\mathcal{P}_p f^{-1}$ ce qui implique par définition que P.ps

$$\omega\{x : f(x) = C_i{}^k\} = 0 \quad \forall (i,k)$$

d'où $\int e^{-\int f d\omega} dP \leq \varepsilon + \int_{\{\omega(F-K)\leq\varepsilon\}} e^{-\int f d\omega} dP \leq \varepsilon + \lim_k \int_{\{\omega(F-K)\leq\varepsilon\}} e^{-\int g_k d\omega} dP$ car si $\omega \in \{\omega(F-K)\leq\varepsilon\}$: $\int g_k d\omega \downarrow \int f d\omega$

donc $\int e^{-\int f d\omega} dP \leq \int e^{-\sum_{i=1}^{N_k} C_i^k \omega\{C_{i-1}^k \leq f \leq C_i^k\}} dP + 2\varepsilon$ pour $k \geq K$

et $\{C_{i-1}^k \leq f \leq C_i^k\}$ fermés $\mathcal{G}$-bornés implique d'après le lemme précédent :

$$\int e^{-\int f d\omega} \leq \underline{\lim}_n \int e^{-\int g_k d\omega} dP_n + \varepsilon \leq \underline{\lim}_n \int e^{-\int f d\omega} dP_n + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon$$

De même on approche f par en dessous à l'aide de la suite f_k en remarquant que d'après le choix des C_i^k on a

$\int f_k \, d\omega = \sum_{i=1}^{N_k} C_{i-1}^k \, \omega\{C_{i-1}^k < f < C_i^k\}$ (P. ps) et on applique l'inéga-

* ainsi que de f_k et g_k

lité a) du lemme ce qui donne $\int e^{-\int f d\omega} dP \geq \overline{\lim_n} \int e^{-\int f d\omega} dP_n$

et donc l'égalité cherchée.

inversement : Soit $u_1 \dots u_k$ ouverts de $\mathcal{G}^P$: Pour chaque u_i soit K_i compact et G_i élément de $\mathcal{G}^P$ tels que $K_i \subset u_i \subset \bar{u}_i \subset G_i$ et

$$\int e^{-\omega(K_i)} dP - \int e^{-\omega(G_i)} dP < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

(l'approximation se faisant à l'aide de la mesure $\mathcal{S}_P$). Soit f_i et g_i fonctions d' Urysohn séparant K_i de u'_i et $\bar{u}_i$ de G'_i ($f_i = 1$ sur K_i $g_i = 1$ sur $\bar{u}_i$) et $f = \sum_{i=1}^{k} s_i f_i$; $g = \sum_{i=1}^{k} s_i g_i$ alors f et g appartiennent à $\mathcal{C}_1(\mathcal{G})$ et on a :

$$\int e^{-\sum_i^k s_i \omega(G_i)} dP \leq \int e^{-\int g d\omega} dP = \lim_n \int e^{-\int g d\omega} dP_n \leq \underline{\lim_n} \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i \omega(u_i)} dP_n$$

$$\leq \overline{\lim_n} \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i \omega(u_i)} dP_n \leq \lim_n \int e^{-\int f d\omega} dP_n = \int e^{-\int f d\omega} dP_n \leq \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i \omega(K_i)} dP$$

d'après le choix des K_i et G_i on a bien en passant à limite

$$\tilde{\lim_n} \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i \omega(u_i)} dP_n = \int e^{-\sum_{i=1}^{k} s_i \omega(u_i)} dP$$

ce qui équivaut d'après la proposition III 1 à la convergence de P_n vers P

Il reste à montrer la propriété d'approximation utilisée qui est spécifique aux suites et possède un intérêt intrinsèque.

III <u>Proposition 3</u> Soit P_n une suite convergeante vers P sur $(\mathcal{M}_\ell, \mathcal{B})$. Pour tout fermé F $\mathcal{G}$-borné dans X et $\forall \varepsilon \exists$ K_ε compact tel que $K_\varepsilon \subset F$ et $P_n\{\omega : \omega(F-K_\varepsilon) \leq \varepsilon\} > 1 - \varepsilon$ pour tout n.

Preuve . Soit $Q = \sum_n \frac{P_n}{2^n}$ la probabilité telle que $P_n \ll Q\ \forall n$ et ρ_Q la mesure bornée sur $(X, \mathbb{B})$ localement dominante associée. Si $x \in X$: $\{r \in R_+ : \omega(\partial B(x,r)) = 0\ Q.\ ps\} = \mathbb{R}_+ - L_x$ où L_x est dénombrable. De même $D(x,Q) = \mathbb{R}_+ - D_x$ où D_x est dénombrable. D'après le théorème de Baire on peut encore exhiber une suite dense dans $R_+ - (L_x \cup D_x)$. Si $T(x)$ est cette suite pour tout $r \in T(x)$ on choisit $K_i(r)$ compacts tels que $\rho_Q(\lim_i\uparrow K_i(r) = \rho_Q(B(x,r))$. En définitive on met en évidence l'existence de $N \in \mathcal{B}$ tel que $Q(N) = 0$ et $\forall \omega \notin N$ on ait $\forall x_i \in S$ dense dans X $\forall r_j \in T(x_i)$: $\omega(\partial B(x_i, r_j) = 0)$

$$r_j \notin R(x_i, \omega) \quad \omega(K^{\ell}_{i,j}) \uparrow_{\ell} \omega(B(x_i, r_j))$$

On note $\mathcal{G}_o$ la sous-famille de $\mathcal{G}^P$ ainsi construite et $\mathcal{K}_o$ la famille des compacts associés.

Toutes les lois P_n et P sont tendues [1] donc d'après le théorème de Le Cam ([10] p. 282) la suite P_n est équitendue donc il existe $\mathbb{K}$ compact de $\mathcal{M}_\ell - N$ tel que $P_n(\mathbb{K}) > 1 - \varepsilon\ \forall n$

Soit alors $u \in \mathcal{G}_o$ $K_i \in \mathcal{K}_o$ tels que $\omega(K_i)\uparrow \omega(u)$ sur $\mathcal{M}_\ell - N$ il existe alors u_i ouverts $\mathbb{K}$-bornés tels que $K_i \subset u_i \subset u$ et on peut trouver $V_i \in \mathcal{G}_o$ tels que $K_i \subset v_i \subset \bar{v}_i \subset u_i \subset u$; $\bar{v}_i$ est alors un fermé $\mathbb{K}$-borné et d'après la proposition II-1 , il existe L_i compact tel que $L_i \subset \bar{V}_i$ et $\omega(\bar{V}_i - L_i) < \varepsilon$ pour tout ω de $\mathbb{K}$.

Pour $\omega \in \mathbb{K}$ et $G \in \mathcal{G}_o$ l'application $\omega \rightsquigarrow \omega(G)$ est continue car si $\omega_\alpha \Rightarrow \omega$, $\omega(G) = \infty$ implique $\lim_\alpha \omega_\alpha(G) = \infty$ et $\omega(G) < \infty$ implique par construction $G \in \mathcal{G}_\omega$ et donc $\omega_\alpha(G) \to \omega(G)$; sur le compact de $\mathcal{M}_\ell - N$, $\mathbb{K}$, on a : $e^{-\omega(u-\bar{v}_i)} \uparrow 1$

et $\omega(u - \bar{v}_i) = \omega(u) - \omega(\bar{v}_i)$ puisque $\bar{v}_i$ $\mathbb{K}$ bornés, on peut appliquer le théorème de Dini et donc

$$\int e^{-\omega(u-\bar{v}_i)} dP_n > 1 - \varepsilon \quad \forall n \quad \text{et aussi} \quad \int e^{-\omega(u-L_i)} dP_n > 1 - \varepsilon$$

ce qui implique $P\left[\omega(u-L_i) \leq \varepsilon\right] > 1 - \varepsilon$ d'où la proposition, puisque tout fermé, borné est contenu dans un élément u de $\mathcal{G}_o$

BIBLIOGRAPHIE

1 -A. ACQUAVIVA C R Acad. Sc. Paris - t 288 (12 mars 79)

2 -DUGUNDJI Topology Albyn and Bacon inc. Boston 1968

3 -M.J. GEFFROY et M. ZEBOULON : Sur certaines convergences stochastiques des mesures aléatoires et des processus ponctuels CR. A.S. p. 280 série A 1975

4 -T.E. HARRIS Counting measures- monotone random set functions Wahrscheinlichtkeitstheorie verw. Geb. 10 102-119(1968)

5 -P. JACOD Convergence uniforme à distance finie de mesures signées Ann. Inst. Poincaré vol. XV n° 4 1979

6 -J.NEVEU Processus Ponctuels Seminaire St-Flour 1976

7 -K.R.PARTHASARATY Probability in Metric spaces - Academic press New York 1967

8 -F. TOPSOE Topology and measures Lectures notes n° 133 Springer Verlag

9 -F. TOPSOE Compactness in spaces of measures Studia Mathematica T.XXXVI 1970

10 -A. TORTRAT Calcul des Probabilités et introduction aux processus aléatoires Masson 1971