ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

MARC YOR

Sur un processus associé aux temps locaux browniens

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 140-148

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_140_0>

SUR UN PROCESSUS ASSOCIE AUX TEMPS LOCAUX BROWNIENS.

Marc YOR
Université de PARIS VI

1. *Introduction.*

1.1) Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement Brownien réel, et $(L_t^a\ ;\ a \in \mathbb{R},\ t \geq 0)$ une version bicontinue de ses temps locaux. On note $(\mathcal{B}_t)$ la filtration naturelle de (B_t), convenablement complétée.

Plusieurs personnes, dont M. Emery, P.A. Meyer, E. Perkins, ont proposé, depuis quelque temps, de montrer que le processus $Y_t \equiv L_t^{B_t}$ n'est pas une $(\mathcal{B}_t)$-semi-martingale, ce qui a effectivement été prouvé par M. Barlow [1] en Août 81.

On montre ici un résultat plus faible (une conséquence du Théorème ci-dessous est que, pour tout $t > 0$, $(Y_{s\wedge t}, s \geq 0)$ n'est pas une semi-martingale de H^2), mais qui apporte des informations complémentaires sur (Y_t).

1.2) On utilise les notations suivantes : A est un réel strictement positif fixé. τ désigne une subdivision finie de $[0,A]$; si $s \in \tau$, s' est le point de τ qui est immédiatement supérieur à s ; enfin, $\phi(\tau) = \sup\limits_{s\in\tau} (s'-s)$.

ξ désignera toujours une variable aléatoire gaussienne, centrée, réduite, dont on note $\gamma(dx)$ la loi $\left(\gamma(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx\right)$.

1.3) Le résultat principal de cette note est le

Théorème : 1) Pour tout $p \in [2,4[$, $\sup\limits_{\tau} E\left[\sum\limits_{s\in\tau} |E(Y_{s'}-Y_s/\mathcal{B}_s)|^p\right] = \infty$.

2) $\varliminf\limits_{\phi(\tau)\to 0} E\left[\sum\limits_{s\in\tau} \{E(Y_{s'}-Y_s/\mathcal{B}_s)\}^4\right] > 0$.

3) $\sup\limits_{\tau} E\left[\sum\limits_{s\in\tau} (Y_{s'}-Y_s)^4\right] < \infty$.

4) Pour tout $p > 4$, $\lim\limits_{\phi(\tau)\to 0} E\left[\sum\limits_{s\in\tau} |Y_{s'}-Y_s|^p\right] = 0$.

1.4) Le paragraphe 2 est consacré à la démonstration du théorème .

Le paragraphe 3 est constitué de remarques concernant :

- l'existence du processus de densité de temps d'occupation associé à Y :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t ds \; 1_{(x \leq Y_s \leq x+\varepsilon)}$$

- l'identité : $\sup_{s\leq t} Y_s = \sup_a L_t^a$, dûe à Emery

- la continuité du processus $(Y_t, t \geq 0)$.

2. *Démonstration du théorème.*

2.1) Rappelons la formule de Tanaka: pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$(1) \qquad (B_t - a)^+ = (-a)^+ + \int_0^t 1_{(B_s > a)} dB_s + \frac{1}{2} L_t^a.$$

D'autre part, si pour $t > 0$, on note $\mathcal{B}_s^{(t)} = \mathcal{B}_s \vee \sigma(B_t)$ $(s \geq 0)$, le processus $(B_s \; ; \; s \geq 0)$ est une $(\mathcal{B}_s^{(t)})$-semi-martingale, dont la décomposition canonique, dans cette filtration, est donnée par :

$$(2) \qquad B_s = \beta_s^{(t)} + \int_0^{s\wedge t} du \frac{B_t - B_u}{t-u} ,$$

où $(\beta_s^{(t)}, s \geq 0)$ est un $(\mathcal{B}_s^{(t)}, s \geq 0)$ mouvement Brownien.

On peut donc écrire, dans la filtration $(\mathcal{B}_s^{(t)})$, d'après (1) et (2) :

$$(3) \qquad \frac{1}{2} Y_t = - \int_0^t 1_{(B_s > B_t)} dB_s - (-B_t)^+.$$

On en déduit aisément qu'il suffit de prouver les assertions du théorème en remplaçant partout (Y_t) par $X_t \equiv \int_0^t 1_{(B_s > B_t)} dB_s$. De plus, on a, pour $0 < s < t$:

$$X_t - X_s = Z_{(s,t)} + \int_s^t dB_u \, 1_{(B_u > B_t)},$$

où :

$$(4) \qquad Z_{(s,t)} = \int_0^s dB_u \{ 1_{(B_u > B_t)} - 1_{(B_u > B_s)} \}.$$

D'autre part, pour tout $p > 0$, on a, d'après (2) :

$$E\left[\left|\int_s^t dB_u\, 1_{(B_u > B_t)}\right|^p\right] \leq C_p\{(t-s)^{p/2} + E(\int_0^{(t-s)} \frac{du}{u} B_u^+)^p\}$$

$$\leq C^p\{(t-s)^{p/2} + (\int_0^{(t-s)} \frac{du}{u} \|B_u^+\|_{L^p})^p\} \leq C_p (t-s)^{p/2},$$

où C_p désigne, ici et dorénavant, une constante universelle qui varie de ligne en ligne .

En conséquence, on peut, pour prouver les assertions du théorème, remplacer partout $(Y_{s'}-Y_s)$ par $Z_{(s,s')}$.

2.2) L'objet de ce sous-paragraphe est la démonstration des assertions 3) et 4). Fixons à nouveau $0 < s < t$. La variable $(B_t - B_s)$ étant indépendante de $\mathcal{B}_s$, on a :

$$E\left[|Z_{(s,t)}|^p\right] = \int \gamma(dx)\, E\left[|\phi^{(1)}_{(s,t)}(x) + \phi^{(2)}_{(s,t)}(x)|^p\right],$$

où :

$$(5) \quad \begin{cases} \phi^{(1)}_{(s,t)}(x) = \int_0^s d\beta_u^{(s)}\, H(u,x) \quad ; \\ \phi^{(2)}_{(s,t)}(x) = \int_0^s \frac{du(B_s - B_u)}{(s-u)} H(u,x) \quad ; \end{cases}$$

et :

$$(6) \qquad H(u,x) = 1_{(B_u > B_s + \sqrt{t-s}\cdot x)} - 1_{(B_u > B_s)}.$$

Les assertions 3) et 4) se déduisent immédiatement du

Lemme : <u>Pour tout</u> $p \in [1,\infty[$, <u>il existe une constante universelle</u> C_p <u>telle que, pour tout</u> x :

$$\text{(i)} \qquad \|\phi^{(1)}_{(s,t)}(x)\|_{L^p} \leq C_p\, (t-s)^{1/4}\, |x|^{1/2}\, s^{1/4}.$$

$$\text{(ii)} \qquad \|\phi^{(2)}_{(s,t)}(x)\|_{L^p} \leq C_p\, (t-s)^{1/2}\, |x|^{1/2}.$$

<u>Démonstration du lemme</u> : On suppose, pour simplifier la présentation, $x > 0$ (le cas : $x < 0$ s'y ramène aisément), et on pose $y = \sqrt{(t-s)}\cdot x$.

i) On a, d'après les inégalités de Burkholder :

$$\|\phi^{(1)}_{(s,t)}(x)\|_{L^p} \leq C_p \left\|\left(\int_0^s du \, 1_{(B_s \leq B_u \leq B_s + y)}\right)^{1/2}\right\|_{L^p}$$

$$\leq C_p \left\|\left(\int_{B_s}^{B_s+y} da \, L_s^a\right)^{1/2}\right\|_{L^p}$$

$$\leq C_p \, y^{1/2} \, \|(L_s^*)^{1/2}\|_{L^p} \quad (\text{où } L_s^* \equiv \sup_a L_s^a)$$

$$\leq C_p \, y^{1/2} \, s^{1/4} \quad \text{(d'après [2], par exemple).}$$

ii) Le processus $(B_{s-u} - B_s \; ; \; 0 \leq u \leq s)$ étant un mouvement Brownien, on a :

$$\|\phi^{(2)}_{(s,t)}(x)\|_{L^p} = \left\|\int_0^s \frac{du}{u} B_u^+ \, 1_{(B_u \leq y)}\right\|_{L^p}.$$

Notons $C_u = \frac{1}{y} B_{u\cdot y^2}$, autre mouvement Brownien. Il vient :

$$\int_0^s \frac{du}{u} B_u^+ \, 1_{(B_u \leq y)} \leq y \int_0^\infty \frac{dv}{v} C_v^+ \, 1_{(C_v \leq 1)}.$$

Il reste à montrer la finitude de : $\left\|\int_0^\infty \frac{dv}{v} C_v^+ \, 1_{(C_v \leq 1)}\right\|_{L^p}$.

Cette norme est majorée par :

$$\int_0^\infty \frac{dv}{v} \left\|\xi^+ \, 1_{(\xi \leq \frac{1}{\sqrt{v}})}\right\|_{L^p} = 2 \int_0^\infty dw \left\|\xi^+ \, 1_{(\xi \leq \frac{1}{w})}\right\|_{L^p}.$$

Or, la fonction : $\left\|\xi^+ \, 1_{(\xi \leq \frac{1}{w})}\right\|_{L^p}$ est aisément majorée par : $C_p \dfrac{1}{w^{1+\frac{1}{p}}}$, fonction intégrable à l'infini, d'où le résultat.

2.3) Pour démontrer les assertions 1) et 2) du théorème, on remplace la variable $\mathfrak{z}_{(s,t)}$ par $\tilde{\mathfrak{z}}_{(s,t)} \equiv E[\mathfrak{z}_{(s,t)} / \mathcal{B}_s] = \tilde{\mathfrak{z}}^{(1)}_{(s,t)} + \tilde{\mathfrak{z}}^{(2)}_{(s,t)}$, où :

$$(7) \quad \begin{cases} \tilde{\mathfrak{z}}^{(1)}_{(s,t)} = \int \gamma(dx)\ \phi^{(1)}_{(s,t)}(x) = \int_0^s d\beta_u^{(s)} \{ \int \gamma(dx)\ H(u,x) \} \\ \\ \tilde{\mathfrak{z}}^{(2)}_{(s,t)} = \int \gamma(dx)\ \phi^{(2)}_{(s,t)}(x). \end{cases}$$

D'après l'inégalité (ii) du lemme, on peut, pour prouver les assertions 1) et 2) du théorème, remplacer les variables $E[Y_{s'} - Y_s / \mathcal{B}_s]$ par $\tilde{\mathfrak{z}}^{(1)}_{(s,s')}$.

Notons enfin qu'il suffit de montrer l'existence d'une fonction $C(s)$, strictement positive sur $]0,A]$, et continue sur $[0,A]$, telle que, pour tous $0 < s < t$:

$$(8) \qquad E\left[(\tilde{\mathfrak{z}}^{(1)}_{(s,t)})^2 \right] \geq C(s)\ (t-s)^{1/2}.$$

Or, on a, d'après (7) :

$$E\left[(\tilde{\mathfrak{z}}^{(1)}_{(s,t)})^2 \right] = E\left[\int_0^s du \left(\int \gamma(dx)\ H(u,x) \right)^2 \right]$$

$$= E\left[\int_0^s du\ 2 \iint_{x<x'} \gamma(dx)\ \gamma(dx')\ H(u,x)\ H(u,x') \right].$$

D'après (6), on a :

$$H(u,x)\ H(u,x') = \begin{cases} |H(u,x)|, & \text{si } 0 < x < x' \\ 0 \qquad , & \text{si } x < 0 < x' \\ H(u,x') \geq 0, & \text{si } x < x' < 0. \end{cases}$$

Ce produit est donc positif ou nul, et on a :

$$E\left[(\tilde{\mathfrak{z}}^{(1)}_{(s,t)})^2 \right] \geq 2 \int_0^1 \gamma(dx)\ P(\xi > x)\ E\left[\int_0^s du\ 1_{(B_s \leq B_u \leq B_s + y)} \right]$$

où on a encore posé $y = \sqrt{t-s} \cdot x$.

Or, on a :

$$E\left[\int_0^s du\ 1_{(B_s \leq B_u \leq B_s + y)} \right] = \int_0^s du \int_0^{y/\sqrt{u}} \gamma(dx)$$

$$= \int_0^s du \int_0^\infty 1_{(u \leq (y/x)^2)} \gamma(dx) = \int_0^\infty \inf\{(\frac{y}{x})^2, s\} \gamma(dx)$$

$$\geq \int_0^{y/\sqrt{s}} \frac{s\, dx\, e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(e^{-y^2/2s} y\sqrt{s})$$

On en déduit :

$$E\left[(\tilde{Z}^{(1)}_{(s,t)})^2\right] \geq C \sqrt{s}\sqrt{t-s}\, e^{-\frac{(t-s)}{2s}} \geq C \sqrt{(t-s)}\, e^{-A/2s} \sqrt{s},$$

où C est une constante universelle. Le théorème est démontré.

3. *Quelques remarques complémentaires sur* (Y_t).

3.1) (Y_t) possède un processus de "densité de temps d'occupation" très régulier, comme l'indique la

Proposition : Pour tout $t > 0$, $P(d\omega)$ p.s, la fonction $\phi_\omega(x) = \int_0^t ds\, 1_{(L_s^{B_s}(\omega) > x)}$ est deux fois continument différentiable sur $(0,\infty)$.

Nous commençons la démonstration de cette proposition par le

Lemme : 1) Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, borélienne, on a :

$$\int_0^t ds\, f(L_s^{B_s}) = \int dx\, f(x)\, \Lambda_t^x, \quad \text{où} \quad \Lambda_t^x = \int_{-\infty}^\infty da\, 1_{(L_t^a > x)}$$

2) Λ_t^o est égal à l'amplitude de l'oscillation de la trajectoire Brownienne sur $(0,t)$.

Démonstration du lemme : 1) On a :

$$\int_0^t ds\, f(L_s^{B_s}) = \int da \int_0^t f(L_s^a) d_s L_s^a = \int da\, F(L_t^a),$$

si $F(x) = \int_0^x dy\, f(y)$. Le résultat cherché découle alors du théorème de Fubini.

2) découle de l'identité :

$$\{a : L_t^a > 0\} = \left]\inf_{s \leq t} B_s\, ;\, \sup_{s \leq t} B_s\right[.$$

Démonstration de la proposition :

Il nous reste à démontrer que : $x \to \Lambda_t^x$ est p.s continument différentiable sur $(0,\infty)$.

Or, d'après E.Perkins [6] et T. Jeulin [5], $a \to L_t^a$ $(a \geq 0)$ est une semi-martingale par rapport à sa filtration propre (les deux auteurs ont également des résultats relativement à des filtrations plus grosses). On utilisera en fait les propriétés suivantes de cette semi-martingale :

(9) le processus croissant de sa partie martingale continue est :

$4 \int_0^a L_t^u \, du$ (voir, par exemple, [3]).

(10) sa partie à variation bornée est absolument continue par rapport à da.

Pour tout $t > 0$ fixé, il existe alors un processus bicontinu $n_a^{+,b}(a \geq 0,\ b \geq 0)$ tel que, pour tout $b \geq 0$, $(n_a^{+,b}, a \geq 0)$ soit le temps local de $(L_t^a, a \geq 0)$ en b.

En effet, d'après les résultats de [7], et (10), il suffit de montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $\int_0^\infty da\, 1_{(L_t^a = x)} = 0$.

Or, d'après (9), on a : $4 \int_0^\infty du\, L_t^u\, 1_{(L_t^u = x)} = 0$, ce qui entraîne le résultat cherché.

Enfin, on a : $\Lambda_t^x = \int_{-\infty}^\infty da\, 1_{(L_t^a > x)} = \frac{1}{4} \{ \int_x^\infty \frac{db}{b} \{ n_\infty^{+,b} + n_\infty^{-,b} \} \}$ où $(n_a^{-,b}, a \geq 0, b \geq 0)$ est le processus temps locaux de $(L_t^{-a}, a \geq 0)$.

Le résultat découle alors de la continuité en b (pour $b > 0$) de $n_\infty^{+,b} \equiv n_{S_t}^{+,b}$, et $n_\infty^{-,b} \equiv n_{-s_t}^{-,b}$, avec : $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ et $s_t = \inf_{s \leq t} B_s$.

3.2) Voici la démonstration, donnée par Emery, de l'identité :

$$\sup_{s \leq t} L_s^{B_s} = \sup_{a \in \mathbb{R}} L_t^a .$$

On a évidemment : $\sup_{s \leq t} L_s^{B_s} \leq \sup_{a \in \mathbb{R}} L_t^a .$

Inversement, on a : $\sup_{a\in\mathbb{R}} L_t^a(\omega) = L_t^{a_t(\omega)}(\omega)$, pour un certain réel $a_t(\omega)$. Notons

$$\sigma(\omega) = \sup\{u \leq t \ / \ B_u(\omega) = a_t(\omega)\}.$$

Alors, on a : $L_\sigma^{B_\sigma} = L_\sigma^{a_t}$, car $B_\sigma = a_t$

$= L_t^{a_t}$, car le mouvement Brownien ne passe plus en a_t dans l'intervalle de temps $]\sigma, t[$.

Voici une seconde démonstration de la même identité :

$$\sup_{a\in\mathbb{R}} L_t^a = \lim_{p\to\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} da (L_t^a)^p\right)^{1/p} = \lim_{(p\to\infty)} \left(p \int_0^t ds (L_s^{B_s})^{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{s\leq t} L_s^{B_s}.$$

3.3) Le calcul -ci-dessous- d'un module de continuité (local) de (Y_t) a été suggéré par le travail de M. Barlow [1].

On a le résultat suivant, pour tout $s \geq 0$ fixé :

$$\text{(11)} \qquad \text{P-p.s,} \quad \overline{\lim_{\substack{t\to s \\ |t-s|=\delta}}} \frac{|Y_t - Y_s|}{(\delta \log_2 \frac{1}{\delta})^{\frac{1}{4}} \left(\log \frac{1}{\delta \log_2 \frac{1}{\delta}}\right)^{\frac{1}{2}}} \leq 2^{\frac{3}{4}} (L_s^*)^{\frac{1}{2}}$$

où $L_s^* \equiv \sup_{a\in\mathbb{R}} L_s^a$.

<u>Démonstration de (11)</u> :

Ecrivons : $Y_t - Y_s = (L_t^{B_t} - L_s^{B_t}) + (L_s^{B_t} - L_s^{B_s})$.

D'après Itô - Mc Kean ([4], 10.b), p. 65), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que, si $|B_t - B_s| \leq \alpha_\varepsilon$, on ait :

$$|L_s^{B_t} - L_s^{B_s}| \leq 2(1+\varepsilon) (L_s^*)^{1/2} \left(|B_t - B_s| \log \frac{1}{|B_t - B_s|}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La fonction $(x \log \frac{1}{x})$ étant croissante dans un voisinage de 0, on a, d'après la loi usuelle du logarithme itéré, pour δ suffisamment petit :

$$\left(|B_t - B_s| \log \frac{1}{|B_t - B_s|}\right)^{1/2}$$

$$\leq (1+\varepsilon)\left\{(2\delta\log_2\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}}\log\frac{1}{(1+\varepsilon)(2\delta\log_2\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}}}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}}(1+\varepsilon)(\delta\log_2\frac{1}{\delta})^{\frac{1}{4}}\left\{\log\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}(1+\varepsilon)}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{\delta\log_2\frac{1}{\delta}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit alors (11), après avoir utilisé en ce qui concerne $(L_t^{B_t} - L_s^{B_t})$, le résultat 10.a), p. 65, de [4] :

$$\overline{\lim_{\substack{|t-s|=\delta\downarrow 0\\ a\in\mathbb{R}}}}\frac{|L_t^a - L_s^a|}{\{\delta(\log\frac{1}{\delta})^2\}^{1/3}} = 0,$$

et le fait que $\delta^{1/3}$ est négligeable devant $\delta^{1/4}$.

Références :

[1] M. BARLOW : $L(B_t,t)$ is not a semi-martingale. A paraître Sém. Probas XVI. Springer (1982).

[2] M. BARLOW, M. YOR : Semi-Martingale Inequalities and Local Times. Zeitschrift für Wahr, (1981), 237-254.

[3] N. BOULEAU, M. YOR : Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semi-martingales. C.R.A.S Paris, t. 292 (2 Mars 1981).

[4] K. ITÔ, H.P. Mc KEAN: Diffusion Processes and their Sample paths. Springer (1965).

[5] T. JEULIN : Article en préparation.

[6] E. PERKINS : Local Time is a Semi-Martingale. Preprint.

[7] M. YOR : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales. Astérisque 52-53, Soc. Math. France (1978).