ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

M. POURCHALTCHI

D. REVUZ

Sur le schéma de remplissage pour les processus récurrents

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, nº 20 (1982), p. 119-130

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_119_0>

SUR LE SCHEMA DE REMPLISSAGE POUR LES PROCESSUS RECURRENTS

M. POURCHALTCHI et D. REVUZ

Université PARIS VII

Cet article est la suite de l'article [6] dans lequel on étudiait à quelle condition il existait des solutions σ-finies positives à l'équation de Poisson

$$\eta = \eta P + \lambda - \mu$$

où P est une probabilité de transition de Harris et (λ,μ) une paire de probabilités ou de mesures positives, bornées de même masse. La réponse à cette question, qui généralisait un résultat antérieur de Baxter et Chacon ([2]) est fournie par le schéma de remplissage. Lorsqu'il existe de telles solutions, il en existe une qui est minimale et qui est fournie explicitement par le schéma de remplissage. Le but du présent article est de voir si cette réponse tient toujours dans le cas des processus récurrents au sens de Harris. Plus précisément, si (P_t) est le semi-groupe d'un tel processus et (U_α) sa résolvante, on cherche à quelles conditions il existe une solution σ-finie positive à l'équation

$$\eta = \alpha\eta U_\alpha + (\lambda - \mu)U_\alpha \quad , \quad \alpha > 0$$

et si cette solution peut encore s'exprimer grâce au schéma de remplissage, dont on sait qu'il est plus difficile à définir dans le cas du temps continu ([8], [5]).

Cet article comporte trois paragraphes. Dans le premier nous reprenons le cas des chaines de Harris de façon à énoncer les résultats dont nous aurons besoin dans la suite et à corriger une imperfection de [6]. Dans le second paragraphe nous traduisons ces résultats dans le cas des résolvantes récurrentes au sens de Harris (c.f. [3]). Dans le troisième paragraphe nous étudions le cas des semi-groupes.

1. RETOUR SUR LE CAS DES CHAINES DE HARRIS

On suppose ici qu'on a une probabilité de transition P de Harris sur un espace $(E, \mathcal{E})$ de type dénombrable ; on note m sa mesure invariante. Soit λ et μ deux probabilités sur $\mathcal{E}$; on définit les deux suites (λ_n), (μ_n) du schéma de remplissage par le procédé de recurrence suivant

$$\lambda_o = (\lambda - \mu)^+ \qquad , \quad \mu_o = (\lambda - \mu)^-$$
$$\lambda_n = (\lambda_{n-1}P - \mu_{n-1})^+ \ , \quad \mu_n = (\lambda_{n-1}P - \mu_{n-1})^- \ ;$$

on pose $\xi_n = \sum\limits_o^n \lambda_k$, $\xi \sum\limits_o^\infty \lambda_k$ et $\mu_\infty = \lim\limits_n \mu_n$.

On renvoie à [6] et à sa bibliographie ainsi qu'à [7] pour les termes et les notations non définies ici. On montre facilement que

$$\xi = \xi P + (\lambda - \mu) + \mu_\infty.$$

On dit que μ est une balayée de λ, ce qu'on note $\lambda \longrightarrow \mu$, si $\mu_\infty = 0$. Si ξ est σ-finie, c'est une solution de l'équation étudiée et nous allons caractériser cette situation.

Nous rappelons que dans [6] on a associé à toute fonction spéciale f telle que $m(f) = 1$, un opérateur Γ_f tel que

$$P\Gamma_f = \Gamma_f - I + f \otimes m.$$

L'ensemble de ces fonctions f est noté $\mathcal{V}$.

<u>Proposition 1.1</u> Ou bien ξ est σ-finie ou bien $\xi(A) = \infty$ dès que $m(A) > 0$. Si μ n'est pas une balayée de λ on se trouve obligatoirement dans le second cas. Dans le premier cas on a

$$\xi = \xi(f)\, m + (\lambda - \mu)\, \Gamma_f$$

pour tout $f \in \mathcal{V}$.

<u>Démonstration</u> : Nous allons montrer que si μ n'est pas une balayée de λ, la mesure ξ n'est pas σ-finie. Dans ce cas on a en effet $\mu_\infty \neq 0$ et si l'on pose $\mu' = \mu - \mu_\infty$ on a $\mu'(E) < 1$.

D'après ce qu'on a dit plus haut on a

$$\xi = \xi P + \lambda - \mu' ,$$

ce qui permet d'écrire

$$\xi = (\xi P + \lambda - \mu')P + \lambda - \mu',$$

et en itérant ce procédé on obtient

$$\xi = \xi P_n + (\lambda - \mu') \sum_{o}^{n-1} P_k .$$

Soit A un ensemble spécial tel que $m(A) > 0$; on a

$$\xi(A) \geqslant (\lambda - \mu') \sum_{o}^{n-1} P_k 1_A ,$$

et d'après le théoreme limite quotient (p. 210 de [7]) le membre de droite tend vers l'infini, ce qui démontre la deuxième phrase de l'énoncé.

Il suffit donc de démontrer la première lorsque $\lambda \longrightarrow \mu$ donc lorsque $\lim_n ||\lambda_n|| = \lim_n ||\mu_n|| = 0$. Or d'après les définitions données plus haut on a

$$\xi_{n+1} = \xi_n P + (\lambda - \mu) + \mu_{n+1} ,$$

et si on multiplie cette identité à droite par Γ_f on obtient

$$\xi_{n+1}\Gamma_f = \xi_n\Gamma_f - \xi_n + \xi_n(f)\, m + (\lambda - \mu)\Gamma_f + \mu_{n+1}\Gamma_f .$$

Toutes les mesures impliquées ici étant σ-finies, on peut réécrire ceci

$$\xi_n(g) = \xi_n(f)\ m(g) + (\lambda - \mu)\Gamma_f(g) + \mu_{n+1}\Gamma_f(g) - \lambda_{n+1}\Gamma_f(g)$$

où g est une fonction spéciale arbitraire. Lorsqu'on passe à la limite sur n, les deux derniers termes tendent vers 0 et l'on trouve donc

$$\xi(g) = \xi(f)\ m(g) + (\lambda - \mu)\Gamma_f(g).$$

Donc ou bien $\xi(f) = \infty$ et alors $\xi(g) = \infty$ dès que $m(g) > 0$, ou bien $\xi(f) < \infty$ et ξ est σ-finie. Dans ce cas on a clairement l'égalité de la dernière phrase de l'énoncé.

<u>Remarque</u> On a déja remarqué dans [6] que ξ peut ne pas être σ-finie bien que $\lambda \longrightarrow \mu$.

Avant de réénoncer le résultat principal de [6] dont la démonstration était entachée d'une erreur, rappelons que l'on a démontré dans [6] que $\lambda \longrightarrow \mu$ si et seulement si la mesure $\Lambda_f = ((\lambda - \mu)\Gamma_f)^-$ est absolument continue par rapport à m et on a posé dans ce cas $\phi_f = \frac{d\Lambda_f}{dm}$. Nous aurons aussi besoin du lemme 5 de [6] dont on voit facilement qu'il peut être énoncé

<u>Lemme 1.2</u> : Si η est une mesure σ-finie positive telle que $\eta = \eta P + \lambda - \mu$ alors $\xi \leqslant \eta$.

<u>Théorème 1.3</u> (théorème 6 de [6]). L'équation $\eta = \eta P + \lambda - \mu$ a une solution σ-finie positive si et seulement si $\lambda \longrightarrow \mu$ et $\phi_f \in \mathcal{L}^\infty(m)$ pour une (donc pour toute) fonction f de $\mathcal{V}$. Dans ce cas ξ est la solution σ-finie positive minimale, et la mesure $|\xi - \lambda + \mu|$ est spéciale et pour tout f de $\mathcal{V}$ on a

$$\xi(f) = ||\phi_f||_\infty .$$

Démonstration : Si il existe une solution σ-finie positive η, alors d'après le lemme 1.2 la mesure ξ est σ-finie et donc d'après la proposition 1.1 on a $\lambda \longrightarrow \mu$ et

$$\xi = \xi(f)\, m + (\lambda - \mu)\Gamma_f .$$

Le fait que ξ soit positive entraine alors immédiatement que ϕ_f est bornée et le fait que ξ soit minimale (lemme 1.2) que $\xi(f) = ||\phi_f||_\infty$. Le reste de la démonstration est facile.

2. RESOLVANTES DE HARRIS

Dans ce paragraphe nous considérons une résolvante $(U_\alpha)_{\alpha > 0}$ récurrente au sens de Harris. Nous renvoyons à [3] pour les propriétés élémentaires relatives à cette notion. Rappelons qu'il existe un noyau W propre tel que

$$(2.1) \quad \begin{aligned} U_\alpha + \alpha U_\alpha W &= W + m(h)^{-1}\, U_\alpha h \otimes m \\ U_\alpha + \alpha W U_\alpha &= W + m(h)^{-1} \otimes (h.m) U_\alpha \end{aligned}$$

où h est une fonction spéciale telle que $U_h \geqslant 1 \otimes m$. Si on pose $P^\alpha = \alpha U_\alpha$, on a donc

$$P^\alpha + P^\alpha(\alpha W) = \alpha W + m(h)^{-1}\, P^\alpha h \otimes m.$$

On posera $\Gamma^\alpha = I + \alpha W$, et pour $f \in \mathcal{V}$, $\Gamma^\alpha_f = \Gamma^\alpha - \Gamma^\alpha\, (f - m(h)^{-1} P^\alpha h) \otimes m$. On a

$$(I - P^\alpha)\Gamma^\alpha_f = I - f \otimes m.$$

Le noyau Γ^α_f est simplement le noyau Γ_f du §1 relatif à la probabilité de transition P^α.

La relation ci-dessus peut encore s'écrire, en utilisant les formules (2.1),

$$\begin{aligned} U_\alpha \Gamma^\alpha_f &= \frac{1}{\alpha}\, (\Gamma^\alpha_f - I + f \otimes m) \\ &= W + \frac{1}{\alpha}\, (f - \Gamma^\alpha(f - m(h)^{-1}\, P^\alpha h)) \otimes m \\ &= W + \frac{1}{\alpha}\, (f - (f - m(h)^{-1}\, P^\alpha h) - \alpha W f + \alpha W(m(h)^{-1}\, P^\alpha h)) \otimes m \\ &= W + (m(h)^{-1}\, U_\alpha h + \alpha W U_\alpha(m(h)^{-1} h) - Wf) \otimes m. \end{aligned}$$

On obtient finalement

$$(2.2) \qquad U_\alpha \Gamma_f^\alpha = W - Wf \otimes m + k(\alpha) \otimes m$$

où $k(\alpha)$ est une constante ne dépendant que de h et de α.

On posera $W_f = W - Wf \otimes m$; la formule (2.2) s'écrivant alors

$$U_\alpha \Gamma_f^\alpha = W_f + k(\alpha) \otimes m.$$

Définition 2.1 Si λ et μ sont deux probabilités, on écrira $\mu < \lambda$ si $\mu(f) \leqslant \lambda(f)$ pour toute fonction f bornée et excessive par rapport à (U_α).

On rappelle qu'on note avec l'exposant 1 les parties singulières des mesures et des noyaux par rapport à m.

Proposition 2.1 Etant données deux probabilités λ et μ, les trois propositions suivantes sont équivalentes

i) $\mu < \lambda$;

ii) $(\lambda - \mu)W^1 g \geqslant 0$ pour toute fonction g positive négligeable ;

iii) $((\lambda - \mu)W_f)^- << m$.

Démonstration : i) $\Longrightarrow$ ii). Il suffit de montrer que $Wg = W^1 g$ est excessive pour g bornée positive et négligeable. Mais les relations (2.1) nous donnent dans ce cas

$$\alpha U_\alpha (Wg) = Wg - U_\alpha g$$

d'où il résulte immédiatement que $\alpha U_\alpha Wg \leqslant Wg$ et que $\lim_{\alpha \to \infty} \alpha U_\alpha Wg = Wg$ puisque $||U_\alpha g| \leqslant \alpha^{-1}||g||$.

ii) $\Longrightarrow$ iii). On a $W_f^1 = W^1$, donc $((\lambda - \mu)W_f)^-$ est nulle sur toutes les fonctions négligeables et positives.

iii) $\Longrightarrow$ i). Soit f une fonction excessive et bornée. Il est facile de voir comme dans [6] que pour chaque α il existe une constante c_α telle que $f = c_\alpha + (I + \alpha W g_\alpha)$ où $g_\alpha = f - P^\alpha f$ est négligeable. On a donc $\alpha U_\alpha f = f - g_\alpha = c_\alpha + \alpha W g_\alpha$ et par suite

$$< \lambda - \mu , \alpha U_\alpha f > = \alpha(\lambda - \mu)(W g_\alpha) \geqslant 0.$$

Lorsque α tend vers ∞, $\alpha U_\alpha f$ croit vers f et on obtient donc $\lambda(f) \geqslant \mu(f)$.

Notation : Quand les conditions équivalentes de la proposition 2.1 sont vérifiées, on notera L_f la dérivée de Radon Nikodym de $((\lambda - \mu)W_f)^-$ par rapport à m.

Théorème 2.2 Il existe une mesure σ-finie positive η telle que

$$\eta = \alpha\eta U_\alpha + (\lambda - \mu)U_\alpha$$

pour tout $\alpha > 0$ si et seulement si $\mu < \lambda$ et $L_f \in \mathcal{L}^\infty(m)$ pour une (donc pour toute) fonction f de $\mathcal{V}$. Il existe alors une solution positive minimale égale à $(\lambda - \mu)W_f + ||L_f||_\infty m$.

Démonstration : Pour un α donné, l'équation ci-dessus s'écrit

$$\eta = \eta P^\alpha + \lambda U_\alpha - \mu U_\alpha$$

et s'il existe une solution, on peut appliquer le résultat du §1 à la probabilité de transition P^α et aux mesures de même masse et bornées λU_α et μU_α, pour obtenir que $\lambda U_\alpha \longrightarrow \mu U_\alpha$ ce qui équivaut à $((\lambda U_\alpha - \mu U_\alpha)\Gamma_f)^- \ll m$. D'après la formule (2.2) ceci équivaut encore à $((\lambda - \mu)W_f)^- \ll m$ et d'après la proposition précédente à $\mu < \lambda$. Les résultats du §1 entrainent aussi de la même façon que L_f est bornée et le reste de la démonstration est alors clair.

Si on a affaire à un semi-groupe le résultat ci-dessus peut évidemment s'appliquer à sa résolvante, mais on peut se demander si on peut caractériser la solution minimale en terme de schéma de remplissage comme dans le cas des chaines. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant.

3. SEMI-GROUPE RECURRENT AU SENS DE HARRIS

Dans cette section on considère un semi-groupe $(P_t)_{t > 0}$ dont la réalisation canonique est récurrente au sens de Harris (cf. [1]). Sa résolvante est donc aussi récurrente au sens de Harris. On note comme précédemment m sa mesure invariante.

Il nous faut d'abord rappeler comment Rost ([8]) construit le schéma de remplissage dans ce cadre (cf. aussi [5]). On posera $U_t = \int_0^t P_s ds$. Deux probabilités λ et μ étant données, on construit trois familles (λ_t) (μ_t), (ξ_t) avec des propriétés analogues à celles des familles (λ_n), (μ_n), (ξ_n) du temps discret par un passage du discret au continu.

Soit (ξ_n^k) la suite obtenue par le schéma de remplissage discret basé sur $\lambda^k = \lambda U_{2^{-k}}$, $\mu^k = \mu U_{2^{-k}}$ et la probabilité de transition $P_{2^{-k}}$. Si t est nombre diadique, on pose

$$\xi_t = \lim_{k \to \infty} \xi^k_{t.2^k} ,$$

la limite ayant un sens même si les premiers termes ne sont pas définis. Alors ξ_t croit avec t et l'on pose $\xi = \lim_{t \to \infty} \xi_t$ et

$\xi_{t+u+s} - \xi_{t+u} \leq (\xi_{t+s} - \xi_t)P_u \leq \lambda P_{t+u} U_s$, pour t, s, u diadiques. On définit ξ_t pour tout t par continuité.

On définit ensuite λ_t à partir de ξ_t de façon que

i) λ_t soit vaguement continue à droite en t ;

ii) $0 \leq \lambda_{t+s} \leq \lambda_t P_s \leq \lambda P_{t+s}$

iii) $\xi_t = \int_0^t \lambda_s \, ds.$

Il existe alors un temps d'arrêt randomisé T tel que

$$< \lambda_t, f > = E_\lambda \left[f(X_t) \, 1_{\{T > t\}}\right] .$$

On définit finalement μ_t par

$$\mu - \mu_t + \lambda_t = \lambda P_{T \wedge t} ,$$

et $\mu_\infty = \lim_t \mu_t$.

Le lemme 1, page 9 de [8] dit alors que si ξ est σ-finie on a

$$\xi P_t - \xi = (\lambda P_T - \lambda)U_t$$

soit encore, comme $\lambda P_T = \mu - \mu_\infty$,

$$\xi(I - P_t) = (\lambda - \mu + \mu_\infty)U_t \ .$$

Rappelons encore le résultat suivant de Rost.

Proposition 3.1 Si ξ est σ-finie, pour toute fonction f excessive et bornée

$$\langle \mu_\infty, f\rangle = \sup_{g \leqslant f} \langle \mu - \lambda, g\rangle$$

où g est excessive bornée.

Proposition 3.2 Les trois conditions suivantes sont équivalentes

i) il existe un temps d'arrêt randomisé T tel que $\mu = \lambda P_T$;

ii) $\mu_\infty = 0$;

iii) $\lambda(f) \geqslant \mu(f)$ pour toute fonction f fortement surmédiane.

Lorsque ces conditions sont vraies on dira que μ est une balayée de λ et on écrira $\lambda \longrightarrow \mu$, comme les fonctions excessives sont fortement surmédianes on voit qu'on peut avoir $\mu < \lambda$ sans avoir $\lambda \longrightarrow \mu$ dans le cas général, mais on a la

Proposition 3.3 Si ξ est σ-finie les conditions $\mu < \lambda$ et $\lambda \longrightarrow \mu$ sont équivalentes

Démonstration : D'après la proposition 3.1 on a

$$\langle \mu_\infty, 1\rangle = \sup_{g \leqslant 1,\ g \text{ excessive}} \langle \mu - \lambda, g\rangle$$

si $\mu < \lambda$ le second membre est $\leqslant 0$ et par suite $\mu_\infty = 0$, donc $\lambda \longrightarrow \mu$.

L'implication inverse est triviale.

Nous allons maintenant essayer d'étendre les résultats du paragraphe 1.

Proposition 3.4 Si η est solution σ-finie positive de

$$\eta = \alpha\eta U_\alpha + (\lambda - \mu)U_\alpha, \ \forall \alpha > 0$$

alors

$$\eta = \eta P_t + (\lambda - \mu)U_t \ , \ \forall t > 0.$$

Démonstration : D'après les résultats du §2 on sait que η est de la forme

$$\eta = (\lambda - \mu)W + k\,m$$

pour une constante $k \geqslant 0$. On a donc

$$\eta(I - P_t) = (\lambda - \mu)W(I - P_t).$$

Posons $P_t^\alpha = e^{-\alpha t}P_t$ et $U_t^\alpha = \int_0^t e^{-\alpha s}P_s^\alpha\, ds$; on a $U_\alpha P_t^\alpha = U_\alpha - U_t^\alpha$ ce qui va servir dans les calculs suivants. Grâce aux formules (2.1) on a

$$(\lambda - \mu)W(I - P_t^\alpha) = (\lambda - \mu)(I + \alpha W)U_\alpha(I - P_t^\alpha)$$

$$= \quad (\lambda - \mu)(I + \alpha W)U_t^\alpha \text{ ;}$$

comme WU_t^α est majoré par U_t et que l'on peut s'assurer que ce noyau laisse invariant l'ensemble des fonctions spéciales on peut passer à la limite et obtenir

$$(\lambda - \mu)W(I - P_t) = (\lambda - \mu)U_t,$$

ce qui termine la démonstration.

Lemme 3.5 Si $\eta = \alpha\eta U_\alpha + (\lambda - \mu)U_\alpha$ alors $\eta \geqslant \xi$.

Démonstration : D'après la proposition précédente, on sait que

$$\eta = \eta P_{2^{-k}} + (\lambda - \mu)U_{2^{-k}}$$

Donc d'après [6] on a $\eta \geqslant \xi^k$ où ξ^k est la mesure du schéma discret basé sur $\lambda U_{2^{-k}}$, $\mu U_{2^{-k}}$, $P_{2^{-k}}$. Or Rost a montré dans [8] que $\xi = \sup\limits_k \xi^k$. On a donc bien $\eta \geqslant \xi$.

Nous pouvons maintenant passer à notre résultat final.

Théorème 3.6 Il existe une solution σ-finie positive η à l'équation

$$\eta = \alpha\eta U_\alpha + (\lambda - \mu)U_\alpha$$

si et seulement si $\lambda \longrightarrow \mu$ et $L_f \in \mathcal{L}^\infty(m)$ pour une (donc pour toute) fonction f de $\mathcal{V}$. Dans ce cas la solution σ-finie positive minimale est la mesure ξ du schéma de remplissage et l'on a $\xi(f) = ||L_f||_\infty$ et

$$\xi = ||L_f||_\infty m + (\lambda - \mu)W_f.$$

<u>Démonstration</u> : S'il existe une solution σ-finie positive η alors $\eta \geqslant \xi$ d'après le lemme 3.5 donc ξ est σ-finie et d'après le §2 on a donc $\mu < \lambda$. D'après la proposition 3.3 on a donc aussi $\lambda \longrightarrow \mu$ on a donc $\mu_\infty = 0$ et ξ est bien solution de l'équation proposée et d'après le lemme 3.5 c'est la solution minimale. Le reste de la proposition découle immédiatement de ce que l'on sait dans le cas des résolvantes.

Comme corollaire de ce résultat on peut généraliser le résultat de Baxter et Chacon [2].

<u>Corollaire 3.7</u> Si T est un temps d'arrêt du schéma de remplissage et si la résolvante de P_t est constituée d'opérateurs quasi-compactes, lorsque $\lambda \longrightarrow \mu$, T est P_λ -intégrable si et seulement si L_1 est bornée et dans ce cas $E_\lambda(T) = ||L_1||_\infty$

<u>Démonstration</u> : Dans ce cas la fonction 1 appartient à $\mathcal{V}$, d'autre part d'après la théorie de Rost rappelé plus haut $E_\lambda(T) = \xi(E) = \xi(1)$. Le corollaire découle donc immédiatement du théorème ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Azema, M. Duflo et D. Revuz, Propriétés relatives des processus de Markov récurrents. Zeit. Wahr. 13 (1969) pp. 286-314.

[2] J. Baxter and R. Chacon, Stopping times for recurrent Markov processes. Ill. J. of Math. 20 (1976) pp. 467-475.

[3] M. Brancovan, Quelques propriétés des résolvantes récurrentes au sens de Harris. Ann. Inst. Henri Poincaré 9 (1973) pp. 1-18.

[4] M. Brancovan, Fonctionnelles additive spéciales des processus récurrents au sens de Harris. Zeit. Wahr. 47 (1969) pp. 163-194.

[5] P. A. Meyer, Le schéma de remplissage en temps continu. Séminaire de Probabilités VI. Lecture Notes 258 (1972).

[6] D. Revuz, Remarks on the filling scheme for recurrent Markov chains. Duke Math. J. 45 (1978) pp. 681-689.

[7] D. Revuz, Markov chains. North-Holland, Amsterdam 1975.

[8] H. Rost, Stopping distributions of a Markov process. Inventiones Mathematice 14 (1971) pp. 1-16.