ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

D. PICARD
J. DESHAYES

Rupture de modèles : loi asymptotique des statistiques de tests et des estimateurs du maximum de vraisemblance

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, n° 20 (1982), p. 115-118

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_115_0>

RUPTURE DE MODELES : LOI ASYMPTOTIQUE DES STATISTIQUES DE TESTS ET DES ESTIMATEURS DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE.

D. PICARD - J. DESHAYES.
Université de PARIS-SUD

Soient $X_1,\dots,X_n$ des observations indépendantes. Le modèle paramétrique le plus classique est de supposer les variables X_i identiquement distribuées de loi $G(.,\theta)$ avec $\theta \in \Theta$: ouvert de $\mathbb{R}^p$ et d'en déduire des renseignements sur θ .

Ici, nous supposons que les indices des variables correspondent à un ordre (chronologique ou autre...) et nous voulons savoir si à partir d'un certain indice k inconnu, il a pu se produire une rupture dans le modèle. Nous traiterons donc les deux problèmes : (1) tester l'hypothèse H_0 : "pas de rupture". $X_1,\dots,X_n \sim G(.,\theta)$ contre l'hypothèse H_1 : "existence d'une rupture" : $\exists k \in \{1,\dots,n-1\}$ tel que

$$X_1,\dots,X_k \sim G(.,\theta^*)$$

$$X_{k+1},\dots,X_n \sim G(.,\theta^{**}) \quad \text{avec} \quad \theta^{**} \neq \theta^*$$

(2) dans ce dernier modèle, estimer les paramètres θ^*, θ^{**} et k .

Le paramètre k joue un rôle particulier et l'étude asymptotique conduit à des vitesses non standard.

L'étude de la convergence de la suite des processus de sommes partielles associée au processus de vraisemblance classique :

$$[0,1] \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

$$(t,\lambda) \qquad \sum_{i=1}^{[nt]} \log \frac{g(X_i, \theta_0 + \frac{\lambda}{\sqrt{n}})}{g(X_i,\theta_0)}$$

fournit la loi asymptotique de la statistique de test et celles des estimateurs.

Théorème 1 :

Sous des hypothèses de régularité classiques sur le modèle [4], la suite de processus $Z_n^{\theta_o}(t,\lambda^*,\lambda^{**})$ de $\mathcal{C}([0,1] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$ définie par la ligne polygonale joignant les sommets (0,0) et $\left(\frac{k}{n}, \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Log} \frac{g(X_i,\theta_o + \frac{\lambda^*}{\sqrt{n}})}{g(X_i,\theta_o)} + \sum_{i=k+1}^{n} \mathrm{Log} \frac{g(X_i,\theta_o + \frac{\lambda^{**}}{\sqrt{n}})}{g(X_i,\theta_o)}\right)$

converge étroitement sous $H_o(\theta_o)$ dans $\mathcal{C}([0,1] \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts vers le processus :

$$Z(t,\lambda^*,\lambda^{**}) = {}^t\lambda^* [I(\theta_o)]^{1/2} W_p(t) - \frac{1}{2} {}^t\lambda^* I(\theta_o) \lambda^* t$$

$$+ {}^t\lambda^{**} [I(\theta_o)]^{1/2} [W_p(1)-W_p(t)] - \frac{1}{2} {}^t\lambda^{**} I(\theta_o) \lambda^{**}(1-t)$$

avec $I(\theta_o)$: matrice d'information de Fisher de la loi G au point θ_o.

$W_p(.)$: processus gaussien sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ formé de p composantes browniennes indépendantes.

Pour obtenir une loi asymptotique de statistique de test, nous sommes amenés à renormaliser la vraisemblance afin de pénaliser les bords.

Corollaire 1 : Sous les conditions de régularité, la suite de statistiques

$$\sup_{k=1,\ldots,n} 2\,\frac{k}{n} \cdot \frac{n-k}{n} \cdot \sup_{\lambda^*\in\mathbb{R}^p} \sup_{\lambda^{**}\in\mathbb{R}^p} \inf_{\lambda\in\mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^{k} \log \frac{g(X_i,\theta_o+\frac{\lambda^*}{\sqrt{n}})}{g(X_i,\theta_o+\frac{\lambda}{\sqrt{n}})} + \sum_{k+1}^{n} \log \frac{g(X_i,\theta_o+\frac{\lambda^{**}}{\sqrt{n}})}{g(X_i,\theta_o+\frac{\lambda}{\sqrt{n}})}$$

converge sous $H_o(\theta_o)$ vers

$$\sup_{t\in[0,1]} {}^t[W_p(t) - t\,W_p(1)]\,[W_p(t) - t\,W_p(1)] \quad .$$

Les démonstrations de ces deux résultats figurent dans [4]. L'estimation des paramètres $(k, \theta^*, \theta^{**})$ repose fondamentalement sur le comportement asymptotique de l'amplitude de la rupture : $\theta^{**}-\theta^* = d$ et nous distinguons trois cas, l'instant de rupture sera toujours supposé éloigné des bords : $k = n\tau$ avec $\tau \in]0,1[$,

i) d constant (lorsque n tend vers l'infini). HINKLEY [1] a calculé la loi asymptotique de l'estimateur $\hat{k}$ par des méthodes de fluctuations, mais la limite dépend de d (inconnu).

ii) d_n tend vers 0 avec $\|d_n\| \sqrt{\frac{\text{Log Log} n}{n}} \to \infty$. Le nouveau paramétrage défini par :

$$\begin{cases} T_n(k) = (k-n\tau)\ {}^t d_n \,.\, I(\bar{\theta})\, d_n \\ \bar{\theta} = \tau\, \theta^* + (1-\tau)\, \theta^{**} \\ \delta_n = \sqrt{\tau(1-\tau)}\, d_n \end{cases}$$

fournit des lois asymptotiques simples.

Théorème 2 :

Sous les hypothèses de régularité [6], la suite de processus $Y_n\ (T,\bar{\lambda},\delta)$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{2p+1})$ définie par la ligne polygonale joignant les sommets (0,0) et

$$\left(T_n(k),\ \text{Log}\ \frac{dP_{H_{1,n}}\ (k,\ \bar{\theta} + \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{n}}\ ,\ \delta_n + \frac{\delta}{\sqrt{n}})}{dP_{H_{1,n}}\ (n\tau,\ \bar{\theta},\ \delta_n)}\ (X_1,\ldots,X_n)\right)$$

converge étroitement sous $H_{1,n}\ (n\tau,\ \bar{\theta},\ \delta_n)$ vers

$$Y(T,\bar{\lambda},\delta) = {}^t\bar{\lambda}\,[I(\bar{\theta})]^{1/2}\ \xi_1 + {}^t\delta\,[I(\bar{\theta})]^{1/2}\ \xi_2 + W(T)$$

$$- \frac{1}{2}\left\{{}^t\bar{\lambda}\ I(\bar{\theta})\ \bar{\lambda} + {}^t\delta\ I(\bar{\theta})\ \delta + \frac{|T|}{2}\right\}$$

où ξ_1 et ξ_2 sont des vecteurs gaussiens indépendants $\mathcal{N}(0,\ I_{pxp})$ et

$$W(T) = W_1(T).1_{[0,\infty[}\ (T) + W_2(T).1_{]-\infty\,,\ 0]}(T) \quad ,$$

W_1 et W_2 étant des mouvements browniens indépendants entre eux et indépendants de $(\xi_1,\ \xi_2)$.

Corollaire 2 :

Sous les conditions de régularité, et sous $H_{1,n}$ $(m\tau, \bar{\theta}, d_n)$, les estimateurs du maximum de vraisemblance convergent en loi respectivement

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \bar{\theta}) \rightarrow \mathcal{N}(0, I(\bar{\theta})^{-1})$$

$$\sqrt{n}\,(\hat{\delta}_n - \delta_n) \rightarrow \mathcal{N}(0, I(\bar{\theta})^{-1})$$

${}^t d_n\, I(\bar{\theta})\, d_n\, (\hat{k} - m\tau) \rightarrow \Psi$ et sont asymptotiquement indépendants . La loi Ψ admet pour densité :

$$\psi(T) = \psi(-T) = \frac{3}{2}\, e^T \int_{\frac{3}{2}\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du - \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{T}}{2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}}\, du, \quad T \geq 0$$

Les démonstrations de ces derniers résultats figurent dans [6] ainsi qu'une extension au cas de rupture dans un modèle de régression du type : $X_i - {}^t\theta\, f\,(\frac{i}{n})$ suit une loi G connue, avec f fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

REFERENCES :

[1] HINKLEY D.V. : *"Inference about the change-point in a sequence of random variables" Biometrika (1970) n° 57, p. 1-17*

[2] IBRAGIMOV I.A., KHASMINSKII R.Z. : *"Asymptotic behaviour of statistical estimators in the smooth case. I- Study of the likelihood ratio", T.P.A. (1972), vol. 17, p. 445-462*

[3] IBRAGIMOV I.A., KHASMINSKII R.Z. : *"Local asymptotic normality for non identically distributed observations", T.P.A. (1975) n° 20, p. 246-260*

[4] DESHAYES J., PICARD D. : *"Testing for a change-point in statistical models" Prépublications d'Orsay, 1980, t. 52*

[5] DESHAYES J., PICARD D. : *"Convergence de processus à double indice : application aux tests de rupture dans un modèle". Note C.R.A.S. t.292 (1981), série I, p. 449-452.*

[6] PICARD D., DESHAYES J. : *"Rupture dans les modèles de régression : loi asymptotique des tests et estimateurs du maximum de vraisemblance" 1981 - Prépublication d'Orsay.*