ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

D. NUALART

Martingales non fortes à variation indépendante du chemin

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 71, série *Mathématiques*, nº 20 (1982), p. 112-114

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1982__71_20_112_0>

MARTINGALES NON FORTES A VARIATION INDEPENDANTE DU CHEMIN

D. NUALART

Universitat de BARCELONA (ESPAGNE)

Soit $\{F_z,\ z\in R_+^2\}$ une filtration dans un espace de probabilité complet (Ω,F,P), vérifiant les conditions habituelles (voir (1)). En particulier, on supposera la propriété (F.4) de l'indépendance conditionnelle:

-Les σ-algèbres $F_{st}^1 = \bigvee_{y\geq 0} F_{sy}$ et $F_{st}^2 = \bigvee_{x\geq 0} F_{xt}$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à F_{st}, pour tout $(s,t)\in R_+^2$.

Si $p\geq 1$, nous appellerons M_c^p l'espace des martingales M_z par rapport à la filtration F_z, qui ont les trajectoires continues et vérifient $\sup_z E(|M_z|^p)<\infty$.

<u>Définition</u>.- On dira qu'une martingale $M\in M_c^2$ est *à variation indépendante du chemin* (i.d.c.) s'il existe un processus A avec versions croissantes et continues sur toute courbe croissante et continue $\gamma:[0,1] \to R_+^2$, $\gamma(0)=(0,0)$, tel que $M^2- A$ soit une martingale.

Cela est équivalent à dire que la variation quadratique de M au long d'une courbe croissante et continue qui part de l'origine ne dépend que de l'extrémité de la courbe.

D'autre part, on dit qu'une martingale M est *forte* si

$$E(M(z_1,z_2] \,/\, F_{z_1}^1 \vee F_{z_1}^2) = 0,$$

pour tous $z_1=(s_1,t_1)$, $z_2=(s_2,t_2)$, $s_1\leq s_2$, $t_1\leq t_2$, où $M(z_1,z_2] = M(z_2) - M(s_1,t_2) - M(s_2,t_1) + M(z_1)$.

Le but de cet exposé était de présenter quelques résultats sur le rapport entre ces deux formes différentes de renforcer la notion de martingale à deux paramètres.

D'abord, Cairoli et Walsh ont montré dans (1) que toute martingale forte de M_c^4 est à variation indépendante du chemin. Au cours de cette École d'Été, D. Bakry nous a indiqué comment on peut étendre ce résultat aux martingales fortes de M_c^2, en utilisant l'intégration stochastique d'une martingale forte sur les graphes des points d'arrêt 1 (ou 2)-prévisibles.

Alors, nous avons étudié le réciproque de ce résultat, qui n'est pas vrai en général, dans les deux modèles plus importants de filtrations satisfaisant à la condition de l'indépendance conditionnelle (F.4): les filtrations produit et la filtration naturelle du drap brownien.

1. Considérons le cas d'une filtration du type $F_{st} = F^1_s \vee F^2_t$, où $\{F^1_s, s \geq 0\}$ et $\{F^2_t, t \geq 0\}$ sont deux filtrations indépendantes vérifiant les conditions habituelles. Dans la suite, l'ensemble d'indices sera $[0,1]^2$.

Théorème 1.- (a) Si l'une des deux filtrations F^1_s ou F^2_t est engendrée par un mouvement brownien, alors une martingale de M^2_c est i.d.c. si et seulement si elle est forte.

(b) Soient F^1_s et F^1_t les filtrations engendrées, respectivement, par deux mouvements browniens bidimensionnels indépendants (W^1_s, W^2_s) et $(\tilde{W}^1_t, \tilde{W}^2_t)$. Pour toute constante $A > 0$, il existe des processus ϕ_1, ϕ_2, ψ_1, ψ_2, F_z-adaptés, mesurables, bornés, avec

$$P\{\int_T (\phi_1(z)^2 + \phi_2(z)^2 + \psi_1(z)^2 + \psi_2(z)^2) dz > 0\} > 0,$$

où $T = [0,1]^2$, tels que la martingale

$$M_{st} = A(W^1_s + W^2_s + \tilde{W}^1_t + \tilde{W}^2_t) + \int_0^s \int_0^t \phi_1(x,y) dW^1_x d\tilde{W}^1_y + \int_0^s \int_0^t \phi_2(x,y) dW^2_x d\tilde{W}^1_y +$$
$$+ \int_0^s \int_0^t \psi_1(x,y) dW^1_x d\tilde{W}^2_y + \int_0^s \int_0^t \psi_2(x,y) dW^2_x d\tilde{W}^2_y , \quad (s,t) \in T,$$

est i.d.c.

Notons qu'une telle martingale n'est pas forte.

2. Soit F_z la filtration engendrée par un processus de Wiener à deux paramètres W_z. Dans ce cas, à l'aide de la partie (b) du théoreme précédant on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.- Il existe des martingales i.d.c. $M \in M^2_c$ de la forme $M_z = \int_{[0,z]} \phi dW + \int_{[0,z]} \int_{[0,z]} \psi dW dW$ (toute martingale de M^2_c nulle à l'origine admet cette représentation) telles que

$$P\{ \int_T \int_T \psi(z,z')^2 dz dz' > 0\} > 0,$$

c'est à dire, ces martingales ne sont pas fortes.

Il faut remarquer aussi qu'on peut même construire des martingales i.d.c., non fortes, telles que son processus croissant associé soit s.t. Cela entraine que M_{st} et $M_{st}^2 - st$ sont des martingales, mais M_{st} n'a pas la loi d'un drap brownien. En conséquence, la généralisation du théoreme de P. Lévy n'est pas vraie pour les martingales non fortes.

Les démonstrations des théorèmes que nous venons d'énoncer ont été publiées dans (2).

Références:

(1) Cairoli, R., Walsh J.B.: Stochastic integrals in the plane. Acta Math. 134 (1975) 111-183.

(2) Nualart, D.: Martingales à variation indépendante du chemin. Lecture Notes in Math. 863, 128-148. Springer Verlag, 1981.

D. Nualart

Departament d'Estadística
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via 585, Barcelona-7
Espagne.