ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

R. BERTHUET

Loi du logarithme itère pour certaines intégrales stochastiques

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 9-18

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_9_0>

LOI DU LOGARITHME ITERE POUR CERTAINES INTEGRALES STOCHASTIQUES

R. BERTHUET

Université de Clermont-Ferrand II

Nous remercions particulièrement M. YOR pour ses remarques, G. FOURT pour les nombreuses discussions fructueuses que nous avons eues et D. COURAGEOT pour le soin porté à la mise en page de cette note.

Etant donné un mouvement brownien $(X_t, Y_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, issu de 0, on considère les processus définis par $U_t = \int_0^t X_s dY_s$, $V_t = \int_0^t X_s dX_s$.

On se propose d'établir un loi du logarithme itéré pour les processus $(\alpha U_t + \beta V_t)_{t \geq 0}$, α, β réels, à savoir :

(1) $l(\alpha,\beta) \underset{\text{not}}{=} \limsup_{t\, \infty} |\alpha U_t + \beta V_t| \,/\, t \log_2 t \underset{\text{p.s}}{=} |\alpha - \beta| \,/\, \text{Arc} \cos(2\alpha\beta/\alpha^2+\beta^2)$

Ce résultat est déjà établi dans le cas :

i) $\alpha = \beta = 1$, la formule d'Itô donnant $U_t + V_t = X_t Y_t$

on a $l(1,1) = 1$ ((1) donnant le résultat par continuité).

ii) $\alpha = -\beta = 1$ on a $l(1,-1) = 2/\Pi$, le processus $(U_t - V_t)_{t \geq 0}$ jouant un rôle important pour le groupe d'Heisenberg [3], [4].

La méthode suivie est celle utilisée classiquement [1] pour le Mouvement Brownien, ce qui suppose l'établissement de quatre lemmes préliminaires.

Dans toute la suite, nous poserons $Z_t = \alpha U_t + \beta V_t$.

I. Quelques remarques évidentes

1. Compte-tenu des propriétés du mouvement brownien :

$$Z_t \,/\, t \underset{\text{loi}}{=} Z_1 \quad \text{et } Z_t \text{ symétrique}$$

2. De par la définition de l'intégrale d'Itô [2], si on pose :

$$T_n = \alpha \sum_{k=1}^{n-1} X_{k/n}(Y_{k+1/n} - Y_{k/n}) + \beta \sum_{k=1}^{n-1} Y_{k/n}(X_{k+1/n} - X_{k/n})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\alpha X_{k-1/n} + \beta(X_1 - X_{k/n})] \quad [Y_{k/n} - Y_{k-1/n}]$$

la suite $(T_n, n \geq 1)$ converge en probabilité et donc en loi vers Z_1.

3. Si pour tout processus $(X_t, t \geq 0)$, on pose $\theta(s,X_t) = X_{t+s} - X_s$

on a la décomposition $\theta(s,Z_t) = \theta(s,\tilde{Z}_t) + \alpha X_s\, \theta(s,Y_t) + \beta\, Y_s\, \theta(s,X_t)$

avec $\theta(s,\tilde{Z}_t) = \alpha\int_0^t \theta(s,X_u)\, d\theta(s,Y_u) + \beta \int_0^t \theta(s,Y_u)\, d\theta(s,X_u)$

$$\underset{not}{=} \alpha\, \theta(s,\tilde{U}_t) + \beta\theta(s,\tilde{V}_t)$$

$\theta(s,\tilde{Z}_t)$ étant indépendant de $(Z_u, u \leq s)$ et ayant même loi que Z_t.

II. <u>Quelques remarques sur le processus ξ_t</u> $= (X_t,Y_t,U_t,V_t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^4$.

<u>LEMME 1</u>

$(\xi_t, t \geq 0)$ est un processus de diffusion de dérive nulle et de matrice de diffusion :

$$a(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_1 & x_1^2 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & x_2^2 \end{pmatrix}$$

(il possède donc la propriété de Feller et, en particulier, de Markov fort)

$(x = (x_1, x_2, x_3, x_4))$.

Les probabilités de transition sont telles que :

(2) $$\int f(y)\, dP^x_{t+s,s}(y) = \int f\circ\varphi(x,y)\, dP^0_{t,0}(y)$$

avec $\varphi(x,y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + x_1y_2, x_4 + y_4 + x_2\, y_1)$.

Pour la première assertion, il suffit de remarquer que $(\xi_t, t \geq 0)$ est solution de l'équation différentiel stochastique $\begin{cases} d\xi_t = \sigma(\xi_t, t)\, dW_t \\ \xi_0 = (0). \end{cases}$

avec $\sigma(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x_1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad W_t = \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$

d'où le résultat [2] avec $a(x,t) = \sigma(x,t)\ \sigma^*(x,t)$.

Compte-tenu de la remarque 3, on a :

$$\theta(s,\xi_t) = \theta(s,X_t,Y_t,\tilde{U}_t,\tilde{V}_t) + (0,0,X_s\ \theta(s,Y_t),\ Y_s\ \theta(s,X_t))$$

d'où $\xi_{t+s} = \varphi(\xi_s,\ \theta(s,\ \tilde{\xi}_t))$

ce qui implique, pour toute fonction f acceptable, la relation (2) ou

$$E(f(\xi_{t+s}) \mid \xi_s = x) \underset{p.s}{=} E\,[f\circ\varphi(x,\ \theta(s,\ \tilde{\xi}_t))] = E\,[f\circ\varphi(x,\ \xi_t)]\ .$$

<u>LEMME 2</u> (lemme maximal)

$$\boxed{\forall t \geq 0 \quad \forall z \geq 0 \qquad P(\max_{s \leq t} Z_s \geq z) = 2\,P(Z_t \geq z).}$$

Montrons d'abord la "propriété de l'Image".

Soit $\tau_b = \inf\ \{t/Z_t = b\}$,$(Z_t,\ t \geq 0)$ étant continu, τ_b est un t.a. relativement à celui-ci et, par conséquent, au processus $(\xi_t,\ t \geq 0)$.

Compte-tenu du lemme 1 : propriété de Markov fort et relation (2), on peut écrire :

$$P(2b - Z_{t+\tau_b} \in B) = \iint \mathbf{1}_{\{\alpha y_3+\beta y_4 \in 2b-B\}}(y)\ dP^x_{t+\tau_b,\tau_b}(y) \quad dP_{\xi_{\tau_b}}(x)$$

$$= \iint \mathbf{1}_{\{\alpha y_3+\beta y_4+\alpha x_1 y_2+\beta x_2 y_1 \in b-B\}}(x,y)\ dP^0_{t,0}(y)\,dP_{\xi_{\tau_b}}(x)$$

($P_{Z_{\tau_b}}$ étant une mesure de Dirac en b).

Comme ξ_t et $\xi'_t = (-X_t,\ Y_t,\ -U_t,\ -V_t)$ ont même loi et que Z_t est symétrique, on a :

$$P(2b-Z_{t+\tau_b} \in B) = \iint \mathbf{1}_{\{\alpha y_3+\beta y_4+\alpha x_1 y_2+\beta x_2 y_1 \in B-b\}}(x,y) \quad dP^0_{t,0}(y)\ dP_{\xi_{\tau_b}}(x)$$

$$= P(Z_{t+\tau_b} \in B) \qquad \text{(en remontant).}$$

Pour achever la preuve, il suffit de façon classique de considérer :

$$Z'_t = \begin{cases} Z_t = \quad Z_t & \text{si } t \leq \tau_b \\ 2b - Z_t & \text{si } t > \tau_b \end{cases} \qquad \sigma_b = \inf \ \{t \ / \ Z'_t = b\} \ = \tau_b$$

$$P[\operatorname*{Max}_{s \leq t} Z_s \geq b] = P\,[Z_t \geq b] + P\,[\operatorname*{Max}_{s \leq t} Z_s \geq b,\ Z_t < b]$$

$$= P\,[Z_t \geq b] + P\,[\tau_b < t,\ Z_t < b]$$

$$= P\,[Z_t \geq b] + P\,[\sigma_b < t,\ Z'_t < b]$$

$$= P\,[Z_t \geq b] + P[\operatorname*{Max}_{s \leq t} Z_s \geq b, Z_t > b] = 2P\,[Z_t \geq b]$$

III. Comportement asymptotique de la fonction de répartition de Z_1

LEMME 3

La fonction caractéristique φ de Z_1 est donnée par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} [ch^2(\frac{\alpha-\beta}{2}\, t) + \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2}\ sh^2\ (\frac{\alpha-\beta}{2}\ t)]^{-1/2} & \text{si } \alpha \neq \beta \\ [1 + \alpha^2\ t^2]^{-1/2} & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

Compte-tenu de la remarque 2, nous allons étudier la suite $(\varphi_n,\ n \geq 1)$ des fonctions caractéristiques des v.a. T_n.

Les v.a. $(Y_{k/n} - Y_{k-1/n})_{1 \leq k \leq n}$ étant indépendantes et ayant même loi que $Y_{1/n}$, on a :

$$\varphi_n(t) = (\frac{n}{2\Pi})^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} \exp\,[it \sum_{k=1}^{n}\ [\alpha x_{k-1} + \beta(x_n - x_k)]\ y_k - \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n} y_k^2 -$$

$$- \frac{n}{2}\ {}^tX\ N\ X\ ]\ d\,X\ d\,Y$$

avec la convention $X_0 = 0$ et :

$$N = \begin{vmatrix} 2 & \bar{1} & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{1} & 2 & \bar{1} & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \bar{1} & 2 & \bar{1} \\ 0 & \cdots & 0 & \bar{1} & 1 \end{vmatrix}$$

correspondant à la loi de $X = (X_{k/n},\ 1 \leq k \leq n)$

d'où $\varphi_n(t) = (\frac{n}{2\Pi})^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\,(-\frac{n}{2}\,[{}^tXNX + \frac{t^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} [\alpha x_{k-1} + \beta(x_n - x_k)]^2])\,dX$

$\underset{not}{=} (\frac{n}{2\Pi})^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\,(-\frac{n}{2}\,{}^tXMX)\,dX$

soit $1/\varphi_n^2(t) = \Delta = \det\,(M)$

avec :

$$M = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & c \\ b & a & b & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & a & b & c \\ 0 & \cdots & 0 & b & a & d \\ c & \cdots & \cdots & c & d & e \end{vmatrix}$$

$a = 2 + [(\alpha^2 + \beta^2)\ t^2/n^2]$

$b = -1 - [\alpha\beta t^2/n^2]$ $\qquad d = -1 - [\beta^2 t^2/n^2]$

$c = \beta(\alpha - \beta)\ t^2/n^2$ $\qquad e = 1 + [(n-1)\beta^2 t^2/n^2]$

Un calcul élémentaire donne en développant suivant la première ligne :

(l'indice k notant la dimension)

$\Delta_k = a\,\Delta_{k-1} - b^2\,\Delta_{k-2} + (-1)^{k-1}\,bc\,(E_{k-2} + F_{k-2}) - c^2\,A_{k-2}$ avec $\Delta_0 = 1,\ \Delta_1 = e$

$E_{k-2} = b\,E_{k-3} + (-1)^{k-3}\,c\,A_{k-3}$ $\qquad$ avec $E_0 = 1 \quad E_1 = d$

$F_{k-2} = b\,F_{k-3} + (-1)^{k-3}\,c\,A_{k-3}$ $\qquad$ avec $F_0 = 1 \quad F_1 = d$

$A_{k-2} = a\,A_{k-3} - b^2\,A_{k-4}$ $\qquad$ avec $A_0 = 1 \quad A_1 = a$

avec si A_{k-2} est la matrice obtenue en enlevant la première et dernière ligne et colonne de M_k

$$E_{k=1} = \begin{vmatrix} b\,0 \cdots 0 & c \\ \boxed{A_{k-2}} & \begin{matrix} c \\ \vdots \\ c \\ d \end{matrix} \end{vmatrix} \qquad F_{k-1} = \begin{vmatrix} \begin{matrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \boxed{A_{k-2}} \\ c & c \cdots c\ \ d \end{vmatrix}$$

En notant r_1 et r_2 les racines de $r^2 - ar + b^2$ $(r_1 > r_2,\ \ \alpha \neq \beta)$ on obtient successivement :

$$\left| \begin{array}{l} A_k = (r_1^{k+1} - r_2^{k+1})/(r_1-r_2) \\[2ex] E_k = F_k = b^k(1 + \dfrac{c}{a+2b}) + \dfrac{c}{r_1-r_2}\left[\dfrac{(-r_1)^{k+1}}{b+r_1} - \dfrac{(-r_2)^{k+1}}{b+r_2}\right] \\[2ex] (r_1 - r_2)\Delta_k = \lambda(r_1, r_2)\, r_1^k - \lambda(r_2, r_1)\, r_2^k + \mu(-b)^k \end{array} \right.$$

avec $$\begin{cases} \lambda(r_1,r_2) = e - r_2 - \dfrac{2bc}{b+r_1}\left(1 + \dfrac{c}{a+2b}\right) + (k-1)\dfrac{c^2}{r_1-r_2}\dfrac{b-r_1}{b+r_1} - \dfrac{c^2 r_2}{(r_1-r_2)^2} \\ \qquad \times \left[\dfrac{b-r_1}{b+r_1} + \dfrac{b-r_2}{b+r_2}\right] \\[2ex] \mu = 2c\left(1 + \dfrac{c}{a+2b}\right)\left(\dfrac{r_2}{b+r_2} - \dfrac{r_1}{b+r_1}\right) \end{cases}$$

[De $E_k = b\, E_{k-1} + (-1)^{k-1}\, c\, A_{k-1}$, on déduit

$$E_k = b^k - c \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j\, c\, b^{k-1-j} A_j$$ et le résultat concernant E_k.

Il en est de même pour F_k.

Pour l'étude de Δ_k, on a $\Delta_k = a\, \Delta_{k-1} - b^2\, \Delta_{k-2} - H_{k-2}$

d'où $$\begin{pmatrix} \Delta_k \\ \Delta_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_{k-1} \\ \Delta_{k-2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} H_{k-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit, avec de nouvelles notations, $V_k = A\, V_{k-1} - B_{k-1}$

d'où $$V_k = A^{k-1}\, V_1 - \sum_{j=1}^{k-1} A^{k-1-j}\, B_j$$

avec $$A = \begin{bmatrix} a & -b^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{bmatrix}$$

et le résultat concernant Δ_k.]

Nous obtenons alors facilement les résultats :

$$\lambda(r_1, r_2) / (r_1 - r_2) \xrightarrow[n\ \infty]{} \frac{1}{2} + \frac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$\mu / (r_1 - r_2) = - 2\alpha\beta / (\alpha-\beta)^2$$

$$\Delta_n \xrightarrow[n\ \infty]{} [(\alpha^2 + \beta^2) \operatorname{ch}(\alpha-\beta)t - 2\,\alpha\beta] / (\alpha-\beta)^2$$

et le résultat annoncé.

Remarquons qu'en fait, nous obtenons la transformée de Fourier du couple (U_1, V_1).

Les calculs pénibles peuvent être évités en faisant appel à la formule de PAUL-LEVY

$$E\,[\exp 2it(U_1 - V_1) \mid X_1 = x, Y_1 = y\,] = \frac{2t}{\operatorname{sh}2t} \exp\left[\frac{x^2+y^2}{2} (1-2t \coth 2t)\right]$$

comme nous l'a fait remarquer M. YOR [5].

LEMME 4

> Si F est la fonction de répartition de Z_1 alors il existe deux constantes strictement positives C_1 et C_2 et deux fonctions F_1 et F_2 équivalentes au voisinage de l'infini à
>
> $$\exp(-bx / |\alpha - \beta|) \quad \text{avec } b = \operatorname{Arc}\cos(2\alpha\beta / \alpha^2 + \beta^2)$$
>
> telles que $C_1 F_1(x) / x \leq 1 - F(x) \leq C_2 F_2(x) \qquad (\alpha \neq \beta)$.

Remarquons que φ se met sous la forme :

$$\varphi(t / \alpha - \beta) = \sqrt{1-B} \;/\; \sqrt{\operatorname{ch} t - B}$$

avec $B = 2\,\alpha\beta/(\alpha^2 + \beta^2)$ $\quad (|B| < 1 \quad$ si $\alpha \neq \pm\beta)$

d'où $\pi|\alpha-\beta| f((\alpha-\beta)x) / \sqrt{1-B} = \int_0^\infty \frac{\cos t\, x}{\sqrt{\operatorname{ch} t - B}}\, dt$ où f est la densité de Z_1

En intégrant $e^{ixz} / \sqrt{\operatorname{ch} z - B}$ le long du contour :

$(z=t,\ 0 \leq t \leq R)$ $(z = R+iy,\ 0 \leq y \leq \pi)$ $(z = t+i\pi,\ 0 \leq t \leq R)$ $(z=iy,\ b+\varepsilon \leq y \leq \pi)$

$z = (i(b-\varepsilon\, e^{i\theta}),\ 0 \leq \theta \leq \pi)$ $\quad (z = iy,\ 0 \leq y \leq b - \varepsilon)$

et, par passage aux limites $(R \to +\infty, \varepsilon \to 0)$, on obtient en particulier :

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{\sqrt{cht-B}}\,dt + e^{-\Pi x}\int_0^\infty \frac{\cos tx}{\sqrt{cht+B}}\,dt = \int_0^b \frac{e^{-xt}}{\sqrt{cost-B}}\,dt$$

d'où, on en déduit $\int_0^\infty \frac{\cos tx}{\sqrt{cht+B}}\,dt = \frac{1}{ch\Pi x}\int_0^{\Pi-b} \frac{ch\ x\ t}{\sqrt{cost+B}}\,dt$.

En remarquant que $\int_0^{\Pi-b} \frac{dt}{\sqrt{B+cost}} = K < +\infty$

on en déduit :

$$\sqrt{1-B}\ sh\,[(\Pi-b)\,x/|\alpha-\beta|]/\ \Pi\sqrt{1+B}\ \times\ ch[\Pi\,x/|\alpha-\beta|] \leq f(x)$$

$$f(x) \leq K\,\sqrt{1-B}\ ch\,[(\Pi-b)\,x\,/|\alpha-\beta|]/\Pi\ |\alpha-\beta|\ \ ch\,[\Pi x/|\alpha-\beta|]$$

d'où :

$$\sqrt{\frac{1-B}{1+B}}\ \frac{|\alpha-\beta|}{\Pi b}\ \frac{F_1(x)}{x} \leq 1 - F(x) \leq \frac{\sqrt{1-B}}{b\ \Pi}\ K\ \ F_2(x)$$

et le résultat annoncé.

IV. Loi du logarithme itéré pour $(Z_t,\ t \geq 0)$

THEOREME

Etant donné un mouvement brownien $(X_t,\ Y_t,\ t \geq 0)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, issu de 0, on a pour tout couple (α,β) de nombres réels

$$\limsup_{t\ \infty} \left|\alpha\int_0^t X_s dY_s + \beta\int_0^t Y_s dX_s\right| \ /\ t\ Log_2 t \underset{p.s}{=} |\alpha-\beta|\ /Arc\ cos\ (2\alpha\beta/\alpha^2+\beta^2)$$

On procède comme pour le Mouvement Brownien [1] .

Soient $\delta > 0$, $q > 1$

$$A_\delta = \{\limsup_{t\ \infty} Z_t/t\ Log_2 t > 1 + \delta\} \subset \limsup_{t\ \infty}\{\max_{t\leq q^{n+1}} Z_t > (1+\delta)\ q^n Log_2 q^n\}$$

d'où, compte-tenu du lemme 2,

$$P(A_\delta) \leq 2\lim_{n\ \infty} \sum_{k\geq n} P\,[Z_{q^{k+1}} > (1+\delta)\ q^k\ Log_2\ q^k]$$

or, d'après le lemme 4, on a :

$$P\,[Z_{q^{k+1}} > (1+\delta)q^k Log_2 q^k] = P[Z_1 > (\ (1+\delta)Log_2 q^k/q] \lesssim C_2 F_2\ \Gamma(1+\delta)\ Log_2 q^k/q]$$

$$\sim C_2\ /\ (kLogq)^{\frac{1}{q}(1+\frac{\delta b}{|\alpha-\beta|})}$$

avec $l = |\alpha-\beta| / b$, $b = \text{Arc cos } (2\alpha\beta/\alpha^2 + \beta^2)$

Soit, en choisissant $1 < q < 1 + \frac{b\delta}{|\alpha-\beta|}$, $\forall \delta > 0 \quad P(A_\delta) = 0$

cad $P\ [\limsup\limits_{t\ \infty} Z_t / t \text{ Log}_2 t \leq l] = 1.$

De même, d'après le lemme 4, on a :

$$P\ [Z_{q^n(q-1)} > (1-\delta) q^{n+1} \text{Log}_2\ q^{n+1}] = P\ [Z_1 > (1-\delta) \frac{q}{q-1} \text{Log}_2\ q^{n+1}]$$

$$\geq C_1 (q-1) F_1 [(1-\delta) \frac{q}{q-1} \text{ Log}_2\ q^{n+1}] / q(1-\delta) \text{Log}_2 q^{n+1}$$

$$\sim C_1' / \text{Log}_2\ q^{n+1} \ .\ (n+1)^{\frac{q}{q-1}\left(1-\frac{\delta b}{|\alpha-\beta|}\right)}$$

soit, en choisissant $q > \frac{|\alpha-\beta|}{\delta b}$, le terme général d'une série divergente.

Compte-tenu de :

i) $Z_{q^{n+1}} = Z_{q^n} + \theta(q^n, \tilde{Z}_{q^n(q-1)}) + \alpha X_{q^n}\ \theta(q^n, Y_{q^n(q-1)}) + \beta\ Y_{q^n}\ \theta(q^n, X_{q^n(q-1)})$

ii) la loi du logarithme itéré du mouvement brownien

iii) Z_t symétrique

iv) $(\theta\ (q^n, \tilde{Z}_{q^n(q-1)}), n \geq 1)$ sont indépendantes et ont même loi que $Z_{q^n(q-1)}$

v) lemme de Borel-Cantelli

on peut écrire :

$$\limsup_{n\ \infty} Z_{q^{n+1}} / q^{n+1} \text{Log}_2\ q^{n+1} \geq -\frac{1}{q} (1+\delta) + 1 - \delta + (\alpha+\beta) \frac{\sqrt{q-1}}{q} \geq 1-2\delta \qquad \text{p.s.}$$

pour q assez grand

soit, en considérant :

$$B_\delta = \{\limsup_{t\ \infty} Z_t / t \text{ Log}_2 t > 1-\delta\} \supset \limsup_{n\ \infty} \{ Z_{q^n} > (1-\delta) q^n \text{ Log}_2\ q^n\}$$

$$\forall\ \delta > 0 \qquad P(B_\delta) = 1$$

cad $\limsup\limits_{t\ \infty} Z_t / t \text{ Log}_2\ t \geq 1$ p.s.

et le résultat annoncé, $(Z_t, t \geq 0)$ étant symétrique.

V. Bibliographie

[1] L. BREIMAN Probability (Addison-Wesley).

[2] A. FRIEDMAN Stochastic Differential Equations and Applications (Academic Press).

[3] B. GAVEAU Principe de Moindre Action. Propagation de la Chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents.
Acta Mathematica 139 1.2 - 1977.

[4] B. ROYNETTE Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour 1977
Lectures Notes in Mathematics - 678 - Springer-Verlag.

[5] M. YOR Remarques sur une formule de Paul LEVY
Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour 1979.
Ann. Scientifiques de l'Université de Clermont.