ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

J.-B. GRAVEREAUX
J. JACOD

Sur la construction des classes de processus de Markov invariantes par changement de temps

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, nº 19 (1981), p. 47-55
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_47_0>

SUR LA CONSTRUCTION DES CLASSES DE PROCESSUS DE MARKOV INVARIANTES PAR CHANGEMENT DE TEMPS

J.-B. GRAVEREAUX ET J. JACOD

Université de Rennes

INTRODUCTION

Considérons un processus fortement markovien continu à droite $X = (\Omega, \underline{\underline{F}}, \underline{\underline{F}}_t, \theta_t, X_t, P^x)$, à valeurs dans un espace topologique E. On définit ses distributions d'entrée P_A ainsi : si A est un borélien de E et si $T_A = \inf (t \geq 0 : X_t \in A)$, alors $P_A (x, .) = P^x(X_{T_A} \in .)$.

Il est bien connu que, si on effectue sur X un changement de temps inverse d'une fonctionnelle additive continue strictement croissante, le processus obtenu est encore fortement markovien et a les mêmes distributions d'entrée que X. On sait à l'inverse que, si X et Y sont deux processus standards ayant mêmes distributions d'entrée, ils peuvent être considérés comme changés de temps l'un de l'autre, en loi : c'est le theorème de Blumenthal, Getoor et McKean (voir [1]).

La question suivante est donc bien naturelle : étant donnée une famille (P_A) de probabilités de transition sur E, indexée par les boréliens de E (ou par une sous-classe suffisamment riche de boréliens, par exemple les compacts), à quelles conditions peut-on construire un processus fortement markovien admettant les P_A pour distributions d'entrée?

Cette question a été abordée par plusieurs auteurs, qui donnent diverses conditions suffisantes : voir Shih [8] et la bibliographie de cet article ; les méthodes, basées sur des procédures d'approximation ou sur la théorie du potentiel, nécessitent toutes des conditions de régularité assez fortes sur les P_A (par exemple, P_A transforme les fonctions continues en fonctions continues).

Bien entendu, répondre à cette question revient à construire une classe de processus fortement markoviens, mais les P_A ne permettent pas de choisir un représentant particulier dans cette classe. D'où l'idée de considérer la relation d'équivalence suivante sur Ω, supposé être l'espace canonique muni du processus canonique X : on dit que $\omega R \omega'$ si les trajectoires $X_\cdot(\omega)$ et $X_\cdot(\omega')$ "passent par les mêmes points dans le même ordre" (on donnera, dans ce qui suit, un sens précis à cette notion), et on considère la tribu quotient $\underline{\underline{G}}$ de $\underline{\underline{F}}$ pour cette relation. Dire que deux processus de lois $(P^x)_{x \in E}$ et $(P'^x)_{x \in E}$ sont changés de temps l'un de l'autre revient exactement à dire que pour tout $x \in E$, les restrictions de P^x et P'^x à la tribu $\underline{\underline{G}}$ sont égales.

Dans cet article, nous répondons à une partie de la question précédente, à savoir la construction d'une famille de probabilités $(Q^x)_{x \in E}$ sur $(\Omega, \underline{\underline{G}})$ faisant du processus canonique X un "processus de Markov intrinsèque" : il faut prendre garde ici que les X_t ne sont pas $\underline{\underline{G}}$-mesurables, donc la notion usuelle de processus de Markov n'a pas de sens dans ce contexte ; elle est remplacée par la notion de processus de Markov intrinsèque. Par contre les X_{T_A} sont $\underline{\underline{G}}$-mesurables, donc les distributions d'entrée P_A sont bien définies.

Plus précisément, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur la famille (P_A) pour que ce soit la famille des distributions d'entrée d'un processus de Markov intrinsèque, ceci sous les hypothèses suivantes : Ω est l'espace des fonctions à valeurs réelles sur $\mathbb{R}_+$, avec un temps de mort ζ, continues sur $[0,\zeta[$, et telles que ζ ne soit pas l'extrémité droite d'un intervalle où la trajectoire est constante ; les hypothèses : continues, à valeurs réelles, jouent un rôle crucial dans notre démonstration.

I CHANGEMENTS DE TEMPS ET TRIBU CANONIQUE INVARIANTE

Soit Δ un point extérieur à $\mathbb{R}$. On pose $E = \mathbb{R} \bigcup \{\Delta\}$, $\underline{\underline{E}}$ est la tribu borélienne de E, et on convient que $|x - \Delta| = \infty$ pour tout $x \in R$.

L'espace canonique Ω est l'ensemble des applications ω de $[0,\infty]$ dans E qui vérifient $\omega(t) = \Delta$ si $t \geqslant \zeta(\omega) = \inf\ (s : \omega(s) = \Delta)$, qui sont continues sur $[0, \zeta(\omega)[$ et non constantes sur l'intervalle $[t, \zeta(\omega)[$ ceci quel que soit $t \in [0, \zeta(\omega)[$.

$m(\omega)$ est le fermé droit de $[0,\infty]$ constitué du point ∞ et du complémentaire de la réunion des "paliers" semi-ouverts $[r,s[$ de la trajectoire ω (i.e. $\omega(t) = \omega(r)$, $\forall t \in [r, s[$).

(1.1) Un ω-changement de temps est une application $a : m(\omega) \to [0,\infty]$ strictement croissante continue droite et telle que $a(\infty) = \infty$.

(1.2) La trajecooire changée de temps ω^a est définie par $\omega^a(t) = \omega(\rho_t)$, où $\rho_t = \inf\ (s \in m(\omega) : a(s) > t)$.

(1.3) Si $\omega \in \Omega$ si a est un ω-changement de temps, $\omega^a \in \Omega$. De plus si on définit : $\omega R \omega' \Longleftrightarrow$ il existe un ω-changement de temps a tel que $\omega' = \omega^a$, alors R est une relation d'équivalence ([4], proposition 2 et théorème 1).

On note $\underline{\underline{I}}$ la tribu sur Ω formée des réunions de classes d'équivalence pour R, et de la partie vide.

X est le processus canonique défini par $X_t(\omega) = \omega(t)$. On définit les translations $(\theta_t)_{t \in [0,\infty]}$ par : $X_t \circ \theta_s = X_{t+s}$ ($t + \infty = \infty$ par convention). On considère les tribus $\underline{\underline{F}}_t = \sigma(X_s : s \leqslant t)$ et $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_\infty$; remarquer que la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ n'est pas continue à droite.

La tribu $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}} \cap \underline{\underline{I}}$ intervient de manière naturelle dans l'étude des propriétés invariantes par changement de temps : c'est la <u>tribu canonique invariante</u>.

<u>Remarque</u> : Le Jan [6] a introduit une autre définition équivalente pour la relation R ci-dessus : $\omega R \omega'$ si et seulement s'il existe deux fonctions $f, f' : [0,\infty] \to [0,\infty]$ croissantes, continues à droite, telles que $f(\infty) = f'(\infty) = \infty$, inverses l'une de l'autre au sens suivant :

$$\forall\, s,t \in [0,\infty] : \quad f(s-) \leqslant t \leqslant f(s) \iff f'(t-) \leqslant s \leqslant f'(t)$$

(où on convient que $f(0-) = f'(0-) = 0$) et telles que $\omega = \omega' \circ f$ et $\omega' = \omega \circ f'$.

II TEMPS D'ARRET INVARIANTS ET PROCESSUS DE MARKOV INTRINSEQUES

Les variables X_t ne sont pas $\underline{\underline{G}}$-mesurables. Par contre, si $A \in \underline{\underline{E}}$ et si on considère les temps d'entrée $T_A = \inf\,(t : X_t \in A)$ et $\tilde{T}_A = \inf\,(t : X_t - X_o \in A)$, les variables X_{T_A} et $X_{\tilde{T}_A}$ sont mesurables par rapport à la complétée universelle de $\underline{\underline{G}}$. Cette remarque va nous conduire à remplacer la classe des temps d'arrêt par une classe plus petite définie comme suit (elle correspond intuitivement aux itérés de temps d'entrée, et ne contient pas les temps constants). Soit d'abord les $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt :

(2.1) $T(n,0) = 0, \quad T(n,q+1) = \zeta \wedge \inf\,(t \geqslant T(n,q) : |X_t - X_{T(n,q)}| \geqslant 2^{-n})$.

On pose $N = [\![\zeta]\!] \cup (\bigcup_{q,n \in \mathbb{N}} [\![T(n,q)]\!])$, où $[\![T]\!]$ désigne le graphe dans $[0,\infty]\ \Omega$ de l'application $T : \Omega \to [0,\infty]$. On a :

(2.2) $\omega R \omega' \iff \forall\, n, q \in \mathbb{N}, \quad X_{T(n,q)}(\omega) = X_{T(n,q)}(\omega')$

(voir [2], [4], [6] ; dans la première référence, les changements de temps sont continus et strictement croissants, et les trajectoires n'ont pas de paliers).

On définit $\underline{\underline{G}}_{T(n,q)} = \underline{\underline{F}}_{T(n,q)} \bigcap \underline{\underline{I}}$ et on appelle <u>temps d'arrêt invariant</u> toute application $T : \Omega \to [0,\infty]$ telle que :

(2.3) $[\![T]\!] \subset N$; $\forall$ n, q $\in \mathbb{N}$, $\{T = T(n,q)\} \in \underline{\underline{G}}_{T(n,q)}$.

On note $\underline{\underline{R}}$ la famille des temps d'arrêt invariants. Tout $T \in \underline{\underline{R}}$ est un $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt, et on pose $\underline{\underline{G}}_T = \underline{\underline{F}}_T \bigcap \underline{\underline{I}}$. Les éléments de $\underline{\underline{R}}$ satisfont aux propriétés usuelles des temps d'arrêt, et notamment :

(2.4) <u>Lemme</u> : (a) Si $T \in \underline{\underline{R}}$, X_T est $\underline{\underline{G}}_T$-mesurable.

(b) Si $\tilde{T}_A$ est un $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt et vérifie $[\![\tilde{T}_A]\!] \subset N$, on a $\tilde{T}_A \in \underline{\underline{R}}$.

(c) Si S, $T \in \underline{\underline{R}}$ et si $U = S + T\circ\theta_S$, on a $U \in \underline{\underline{R}}$ et $\underline{\underline{G}}_U = \underline{\underline{G}}_S \bigvee \theta_S^{-1}(\underline{\underline{G}}_T)$.

Soit $Q^x(d\omega)$ une probabilité de transition de $(E, \underline{\underline{E}})$ dans $(\Omega, \underline{\underline{G}})$.

(2.5) <u>Définition</u> : Le terme $(\Omega, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{G}}_T, \theta_t, X_t, Q^x)$ est un processus de Markov intrinsèque si :

(i) $Q^x(X_o = x) = 1$ pour tout $x \in E$;

(ii) $Q^x(\theta_T^{-1}(A) \mid \underline{\underline{G}}_T) = Q^{X_T}(A)$ pour tous $x \in E$, $T \in \underline{\underline{R}}$, $A \in \underline{\underline{G}}$.

Si $P^x(d\omega)$ est une probabilité de transition de $(E, \underline{\underline{E}})$ dans $(\Omega, \underline{\underline{F}})$ faisant du processus canonique un processus fortement markovien normal au sens de [1], et si Q^x désigne la restriction de P^x à $(\Omega, \underline{\underline{G}})$, le terme $(\Omega, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{G}}_T, \theta_t, X_t\ Q^x)$ est un processus de Markov intrinsèque. On a même la formule (2.5, ii) pour une classe beaucoup plus large de temps d'arrêt invariants que la classe $\underline{\underline{R}}$: voir [5] pour une définition de cette classe (notée $\underline{\underline{S}}$) à partir des T(n,q).

III DISTRIBUTIONS D'ENTREE D'UN PROCESSUS DE MARKOV INTRINSEQUE

On convient que $x \pm \Delta = \Delta$ pour tout $x \in E$. Si $A \subset E$, pour tout $x \in E$ on pose $A \pm x = \{y \pm x : y \in A\}$. On note D les dyadiques de $\mathbb{R}$ et $\overline{D} = D \cup \{\Delta\}$. On note $\underline{\underline{A}}$ la classe des parties de E de la forme :

$$A = \{\Delta\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \notin]y,z[\ \}, \qquad \text{où } y,\ z \in \overline{D}\ ,$$

avec les conventions $]\Delta,z[\ =\ ]-\infty,\ z[$, $]y,\ \Delta[\ =\ ]y,\infty[$ et $]\Delta,\Delta[\ = \mathbb{R}$; on écrira aussi $A =]y,\ z[^c$.

Si $A \in \underline{\underline{A}}$ il est facile de vérifier que $\tilde{T}_A$ est un $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt et que $[\![\tilde{T}_A]\!] \subset N$, donc $\tilde{T}_A \in \underline{\underline{R}}$ et $X_{\tilde{T}_A}$ est $\underline{\underline{G}}$-mesurable d'après (2.4). Lorsque $(\Omega,\ \underline{\underline{G}},\ \underline{\underline{G}}_T,\ \theta_t,\ X_t,\ Q^x)$ est un processus de Markov intrinsèque, on a $T_A = \tilde{T}_{A-x}$ Q^x - p.s. pour tout $x \in E$, de sorte que X_{T_A} est Q^x - p.s. égal à une variable $\underline{\underline{G}}$-mesurable dès que $A - x \in \underline{\underline{A}}$. Dans ce cas on peut définir la probabilité $P_A(x,\ .)$ sur $(E,\ \underline{\underline{E}})$ par

(3.1) $$P_A(x,\ C) = Q^x(X_{T_A} \in C) \quad \text{si} \quad C \in \underline{\underline{E}}.$$

On appelle distributions d'entrée la famille $\underline{\underline{P}} = (P_A(x,\ .)\ :\ x \in E,\ A\text{-}x \in \underline{\underline{A}})$.

<u>Remarque</u> : De la même manière (mais c'est un peu plus difficile à justifier) on pourrait définir $P_A(x,\ .)$ pour tous $x \in E$, $A \in \underline{\underline{E}}$.

(3.2) <u>Théorème</u> : Soit $\underline{\underline{P}} = (P_A(x,\ .)\ :\ x \in E,\ A\text{-}x \in \underline{\underline{A}})$ une famille de probabilités sur $(E,\ \underline{\underline{E}})$. Pour qu'il existe une probabilité de transition $Q^x(d\omega)$ de $(E,\ \underline{\underline{E}})$ dans $(\Omega,\ \underline{\underline{G}})$, nécessairement unique, faisant du terme $(\Omega,\ \underline{\underline{G}},\ \underline{\underline{G}}_T,\ \theta_t,\ X_t,\ Q^x)$ un processus de Markov intrinsèque admettant la famille $\underline{\underline{P}}$ pour distributions d'entrée, il faut et il suffit qu'on ait :

(a.1) $x \rightsquigarrow P_{A+x}(x,\ C)$ est borélienne pour tous $A \in \underline{\underline{A}}$, $C \in \underline{\underline{E}}$.

(a.2) Si $A =]y',\ y[^c \in \underline{\underline{A}}$, $P_{A+x}(x,\ .)$ ne charge que $\{\Delta\}$ (resp. $\{\Delta,\ x+y',\ x+y\}$ quand $0 \in A$ (resp. $0 \notin A$)).

(a.3) Si $x \neq \Delta$ et si $n(x) =]x - 2^{-n}, x + 2^{-n}[^c$, on a

$$\lim_{(n)} P_{n(x)}(x,\{\Delta\}) = 0.$$

(a.4) Soit $y, y', y_n, x \in \mathbb{R}$ tels que $y' < x < y$, $y - x \in D$, $y' - x \in D$, $y_n - x \in D$, et $\lim_{(n)} \uparrow y_n = y$ (resp. $\lim_{(n)} \downarrow y_n = y'$). On a

$$\lim_{(n)} P_{]y',y_n[^c}(x,\{y'\}) = P_{]y',y[^c}(x,\{y'\})$$

$$(\text{resp. } \lim_{(n)} P_{]y_n,y[^c}(x,\{y\}) = P_{]y',y[^c}(x,\{y\})).$$

(a.5) Si $A, A' \in \underline{\underline{A}}$ et $A \subset A'$, on a :

$$P_{A+x}(x,C) = \int P_{A'+x}(x, dy)\, P_{A+x}(y, C).$$

(a.6) Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \neq \Delta$, $A - x \in \underline{\underline{A}}$, on a avec la notation $n(.)$ de (a.3) :

$$\lim_{(q)} \int P_{A\cup n(x)}(x,dx_1)P_{A\cup n(x_1)}(x_1, dx_2) \ldots$$

$$\ldots P_{A\cup n(x_{q-1})}(x_{q-1},dx_q) \prod_{i=1}^{q} I_{A^c}(x_i)P_A(x_q,\mathbb{R}) = 0.$$

<u>Remarques</u> :

1) (a.5) a un sens car $A + x - y \in \underline{\underline{A}}$ pour $P_{A'+x}(x,.)$ - presque tout y d'après (a.2) ; pour la même raison, (a.6) a un sens.

2) L'ensemble de ces conditions, convenablement modifiées, resterait nécessaire si $\mathbb{R}$ était remplacé par un espace polonais ; par contre nous ne savons pas si elles seraient suffisantes.

<u>Démonstration de la condition nécessaire</u>

(a.1) provient de ce que $P_{A+x}(x, B) = Q^x(X_{\tilde{T}_A} \in B)$. La continuité de X sur $[0,\zeta[$ implique à l'évidence (a.2). Pour montrer (a.3) on remarque que $P_{n(x)}(x,\{\Delta\}) = Q^x(T_{n(x)} = \zeta)$. Mais $T_{n(x)}$ décroit vers $T_{\{x\}^c}$, donc

$$\lim_{(n)} \downarrow P_{n(x)}(x,\{\Delta\}) = Q^x(T_{\{x\}^c} = \zeta) = Q^x(X_t = x, \ \forall t < \zeta).$$

Mais $x \neq \Delta$ implique $Q^x(\zeta > 0) = 1$. Comme par hypothèse ζ n'est pas l'extrémité droite d'un palier de la trajectoire de X, on voit que la limite précédente est nulle.

Montrons la première assertion de (a.4), la seconde se montrant de la même manière. Soit $S_n := T_{]y',y_n[^c}$, qui croit vers $S := T_{]y',y[^c}$.

D'après la continuité de X il en découle que $\{X_S = y'\} = \lim_{(n)} \uparrow \{X_{S_n} = y'\}$, d'où le résultat.

(a.5) découle de la propriété de Markov (2.5.ii) appliquée à $\tilde{T}_{A'}$, et du fait que $T_{A+x} = T_{A'} + \tilde{T}_{A+x} \circ \theta_{\tilde{T}_{A'}}$ Q^x - p.s. sur $\{\tilde{T}_{A'} < \zeta\}$.

Montrons enfin (a.6). Soit $S_1 := T_{n(0)}$, $S_{i+1} := S_1 + S_1 \circ \theta_{S_i}$. D'après (2.4) on a $S_i \in \underline{\underline{R}}$. Remarquer aussi que $X_{T_A} \in A$ puisque $\Delta \in A$. En utilisant la propriété de Markov (2.5.ii) aux S_i, il est facile de voir que l'expression dont on cherche la limite vaut $Q^x(S_q < T_A < \zeta)$. Mais $|X_{S_i} - X_{S_{i-1}}| = 2^{-n}$ sur $\{S_i < \zeta\}$, donc la continuité de X sur $[0,\zeta[$ implique que $\lim_{(q)} \uparrow S_q = \zeta$, d'où le résultat.□ L'unicité est un plus délicate, et la condition suffisante franchement compliquée. Voici le schéma de la démonstration : on commence par remplacer les T(n,q) par une suite dénombrable $(R_\alpha)_{\alpha \in I}$ d'éléments de $\underline{\underline{R}}$ qui vérifie :

$$N = \bigcup_{\alpha \in I} [\![R_\alpha]\!], \quad [\![R_\alpha]\!] \cap [\![R_\beta]\!] \cap [\![0,\zeta[\![= \emptyset \text{ si } \alpha \neq \beta$$

$$\omega R \omega' \iff \forall \alpha \in I, \; X_{R_\alpha}(\omega) = X_{R_\alpha}(\omega')$$

$$\underline{\underline{G}} = \sigma(X_{R_\alpha} : \alpha \in I)$$

(l'ensemble I des indices est un ensemble dénombrable ordonné de sorte que si $\alpha < \beta$ on ait $R_\alpha < R_\beta$ dès que $R_\alpha \neq \zeta$). A partir des P_A on construit des probabilités $\tilde{Q}^x$ sur $(E^I, E^{I \otimes})$. On en déduit, au moyen d'un théorème de [4], des lois Q^x sur $(\Omega, \underline{\underline{G}})$; il reste à vérifier que $(\Omega, \underline{\underline{G}}, \underline{\underline{G}}_T, \theta_t, X_t, Q^x)$ est un processus de Markov intrinsèque de distributions d'entrée $\underline{\underline{P}}$. □

Disons quelques mots sur les étapes qu'il resterait à franchir pour résoudre complètement le problème posé. D'abord, notre notion de processus de Markov intrinsèque correspond d'une certaine manière à la notion de processus simplement markovien ; il faut donc introduire une notion de "processus de Markov intrinsèque fort" (ce qui est facile) puis rajouter des conditions, si possible nécessaires et suffisantes, sur les P_A pour que le processus de Markov intrinsèque obtenu ci-dessus soit fort (ce qui semble beaucoup plus difficile).

En second lieu, il reste à choisir une échelle des temps convenable, permettant d'étendre le processus de Markov intrinsèque fort en un processus fortement markovien habituel. Signalons dans cette direction l'article [2] de Chacon et Jamison, qui répond partiellement à ce problème.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. M. BLUMENTHAL, R.K. GETOOR, Markov processes and potential theory. Academic Press, New York, 1968.

[2] R. V. CHACON, B. JAMISON, Sample path consistency for Markov processes. A paraître, 1979.

[3] P. COURREGE, P. PRIOURET, Temps d'arrêt d'une fonction aléatoire, Publ. Inst.Stat.Univ.Paris, 14, 245-274, 1965.

[4] J. B. GRAVEREAUX, J. JACOD, Processus continus invariants par changement de temps. Sém.Proba.Rennes, 77, t.I, 94-102, 1978.

[5] J. JACOD, Sur la théorie générale des processus. Sém.Proba.Rennes, 76, t.II, 1-11, 1977.

[6] Y. LE JAN, Spatial trajectoires. A paraître, 1978.

[7] P. A. MEYER, Probabilités et potentiel. Hermann, Paris, 1966.

[8] C. T. SHIH, Construction of Markov processes from hitting distributions. Z. fur Wahr., 18, 22-47, 1971.