ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

M. FUJISAKI

Unicité des lois optimales du contrôle stochastique continu dans le cas complètement observable

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, nº 19 (1981), p. 37-45

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_37_0>

UNICITE DES LOIS OPTIMALES DU CONTROLE STOCHASTIQUE CONTINU DANS LE CAS COMPLETEMENT OBSERVABLE

M. FUJISAKI

Université de KOBE (Japon)

Dans [2], l'auteur a eu un critère pour unicité des lois optimales du contrôle stochastique dans le cas continu et complètement observable. Dans cet article nous résumons le résultat de [2] et ensuite nous résolvons un problème d'unicité des lois optimales à propos d'un exemple qui est traité dans [2].

I PRELIMINAIRES, NOTATIONS, DEFINITIONS

Soit T un temps fixé, fini. Soit C l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ à valeurs dans R^n, muni de la norme uniforme. Désignons par w un élément de C et $||w|| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |w(t)|$. Soient $\underline{\underline{F}}$ la tribu borélienne de C et $(\underline{\underline{F}}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, la famille croissante des sous tribus de $\underline{\underline{F}}$, telle que pour tout $t \geqslant 0$, $\underline{\underline{F}}_t$ soit engendrée par des ensembles cylindriques jusqu'à l'instant t. Soit U un ensemble borélien de R^m que nous appelons l'espace des contrôles, muni la sous tribu de tribu borélienne de R^m

Posons

$$g(t,w,u) : [0,T] \times C \times U \to \mathbb{R}^n.$$

Nous considérons le système des équations différentielles stochastiques suivant, avec condition initiale $X(0) = x$, où x est un vecteur fixé de R^n :

$$\begin{aligned} dX_t &= g(t,X,u(t,X))\,dt + dB_t \qquad (1.1)\\ X_o &= x, \end{aligned}$$

où $B = (B_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, est un mouvement brownien à n dimensions.

$u = u(t,X)$ est le paramètre du contrôle : il sera défini rigoureusement plus loin. Nous allons tout d'abord considérer l'existence et unicité des solutions de l'équation (1.1). Ici l'existence signifie celle des solutions faibles et unicité de même signifie unicité en loi (voir [3] pour les définitions de solution faible et d'unicité en loi). Supposons que le coefficient $g = g(t,w,u)$ de l'équation (1.1) satisfait aux conditions suivantes :

(g.1) g est mesurable en triple (t,w,u),

(g.2) pour tout (t,u), $g(t, \ldots, u)$ est $\underline{\underline{F}}_t$ - mesurable,

(g.3) $|g(t,w,u)|^2 \leqslant k(1 + |w_t|^2)$.

Définissons la classe admissible des contrôles de la manière suivante :

<u>Définition 1.1</u>. Soit $s < t$ $(0 \leqslant s < t \leqslant T)$. On dit que u appartient à $\underline{\underline{U}}_s^t$ si u est une application de $[s,t] \times C$ dans U qui est mesurable en (t,w) et pour tout t, $u(t,.)$ est $\underline{\underline{F}}_t$ - mesurable. On dit que $\underline{\underline{U}}_s^t$ est la <u>classe admissible des contrôles sur</u> $[s,t]$.

Posons $\underline{\underline{U}} \equiv \underline{\underline{U}}_0^T$, alors on dit simplement que $\underline{\underline{U}}$ est la <u>classe admissible des contrôles</u>. De plus, tout élément u de $\underline{\underline{U}}$ est appelé un <u>contrôle admissible</u>. □

Dans ce cas, la remarque suivante est claire.

<u>Remarque 1.1.</u>

1) Soient $u' \in \underline{\underline{U}}_r^s$ et $u'' \in \underline{\underline{U}}_s^t$ ($r \leqslant s \leqslant t$). Si

$$u(\tau,w) = \begin{cases} u'(\tau,w) & \text{sur } [r,s) \\ u''(\tau,w) & \text{sur } [s,t] \end{cases}$$

alors $u \in \underline{\underline{U}}_r^t$.

2) Si $u \in \underline{\underline{U}}$ et $0 \leqslant s < t \leqslant T$, alors la restriction de u sur $[s,t]$ appartient à $\underline{\underline{U}}_s^t$. □

Soit P la mesure de Wiener uniquement déterminée sur l'espace canonique $(C,\underline{\underline{F}})$. Supposons que la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, satisfait aux conditions habituelles, i.e. elle est continue à droite et complète par rapport à P. D'ailleurs nous supposons que $\underline{\underline{F}}_o$ est P - triviale. Alors on a le résultat qui assure l'existence et unicité de l'équation (1.1).

<u>Proposition 1.1.</u> Pour tout $u \in \underline{\underline{U}}$, il existe une solution et une seule pour l'équation (1.1). De plus, la solution P^u (la loi) sur l'espace canonique $(C,\underline{\underline{F}})$ peut s'écrire :

$$P^u = \alpha_o^t(u)\ P|_{\underline{\underline{F}}_t} \text{ , pour tout } t, \tag{1.2}$$

où $\alpha_o^t(u)$ est définie par (1.3) :

$$\alpha_o^t(u) = \exp \{ \int_o^t g(s,w,u(s,w))dw_s - \frac{1}{2} \int_o^t |g_s|^2 ds \} . \tag{1.3}$$

Autrement dit, P^u est une mesure (unique) sur $(C,\underline{\underline{F}})$ pour laquelle

$$B_t = w_t - \int_o^t g(s,w,u(s,w))ds \tag{1.4}$$

est $(\underline{\underline{F}}_t)$ - mouvement brownien.□

<u>Remarque 1.2.</u>

1) Il est bien connu que $\alpha_o^t(u)$ définie par (1.3) est une martingale par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t,P)$, qui est positive et uniformément intégrable.

2) Soit $\underline{\underline{B}}_t$ la filtration naturelle de (B_t) définie par (1.4). Alors il faut noter que $\underline{\underline{B}}_t \subset \underline{\underline{F}}_t$, pour tout t.□

Nous allons définir la fonction de perte. Soit h une application borélienne de $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^1$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1) pour tout $u \in \underline{\underline{U}}$, $E^u \left[|h(T,w_T)| \right] < \infty$,

2) pour tout $u \in \underline{\underline{U}}$, tout $t > 0$, il existe une fonction $f^u(t,w) \in L^1(C,\underline{\underline{F}},P)$ telle que pour tout $v \in \underline{\underline{U}}_t^T$.
$\alpha_o^t(u)\ E \left[\alpha_t^T(v) h(T,w_T) \mid \underline{\underline{F}}_t \right] \geqslant f^u(t,w)$ p.s.(P), où E^u désigne l'espérance relative à P^u définie par (1.2).

Remarquons que si h est positive alors la condition 2) est satisfaite.

<u>Définition 1.2.</u> Pour tout $u \in \underline{\underline{U}}$ posons

$$J(u) = E^u \left[h(T,w_T) \right] \ (= E \left[\alpha_o^T(u) h(T,w_T) \right]). \qquad (1.5)$$

On dit que J(u) est la <u>fonction de perte associée à</u> u.□

<u>Définition 1.3.</u> On dit que $u \in \underline{\underline{U}}$ est <u>optimal</u> si

$$J(u) = \inf_{v \in \underline{\underline{U}}} J(v).\square \qquad (1.6)$$

<u>Remarque 1.3.</u> Dans la définition 1.2, la fonction h ne dépend pas de u. Toutefois nous pouvons démontrer que certains cas où h dépend de u se réduit au cas où la fonction de perte peut s'écrire comme (1.5). Par exemple, prenons comme la fonction de perte

$$J(u) = E^u \left[\int_o^t L(s,w,u(s,w))ds + h(T,w_T) \right].$$

Dans ce cas, en introduisant un autre espace probabilisé et un pouvement brownien à une dimension sur cet espace, il est possible que la fonction de perte ne dépend plus de contrôle u. (pour le détail, voir [2]) □

II LE PRINCIPLE OPTIMAL ET UNICITE EN LOI OPTIMAL

Soient $u,v \in \underline{\underline{U}}$ et si on définit $u_o^t v$ par

$$u_o^t v(s,w) = \begin{cases} u(s,w) \text{ sur } [0,t) \\ v(s,w) \text{ sur } [t,T] \end{cases}, \tag{2.1}$$

alors $u_o^t v$ appartient à $\underline{\underline{U}}$. Définissons la fonction de valeur qui jouera un rôle très important plus loin.

Définition 2.1. Pour tout $t \geqslant 0$, et tout $u \in \underline{\underline{U}}$, posons

$$W_t = P - \text{ess.} \inf_{v \in \underline{\underline{U}}_t^T} E^{u_o^t v} \left[h(T,w_T) \mid \underline{\underline{F}}_t \right]. \tag{2.2}$$

On dit que W_t est la fonction de valeur.□

Remarque 2.1. Il faut noter que W_t est $\underline{\underline{F}}_t$ - adaptée (plus précisément, $\underline{\underline{F}}_t$- optionnelle puisque $\underline{\underline{F}}_t$ est continue à droite en t). De plus, dans ce cas, pour tout $u \in \underline{\underline{U}}$, $W_t = P^u\text{-ess.} \inf_{v \in \underline{\underline{U}}_t^T} E^{u_o^t v} \left[h(T,w_T) \mid \underline{\underline{F}}_t \right]$ p.s. (P). (voir [1])□

Le théorème suivant est fondamental pour nos discussions ultérieures.

Théorème 2.1. (Rishel, Davis, Varaiya)

1) Pour tout $u \in \underline{\underline{U}}$, $(W_t, \underline{\underline{F}}_t, P^u)$ est une sous-martingale,
2) Pour que $u \in \underline{\underline{U}}$ soit optimal il faut et il suffit que $(W_t, \underline{\underline{F}}_t, P^u)$ soit une martingale uniformément intégrable,
3) De plus, pour que $u \in U$ soit optimal il faut et il suffit que u soit conditionnellement optimal ; i.e. pour tout $t \geqslant 0$,

$$W_t = E^u \left[h(T,w_T) \mid \underline{\underline{F}}_t \right] \text{ p.s. (P).} \ \square \tag{2.3}$$

Remarquons que si u est optimal alors W_t est une martingale continue par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t, P^u)$. Plus précisément, si u est optimal alors il existe une fonction $(\underline{\underline{F}}_t)$ - prévisible Φ_t telle que, pour tout $t \geqslant 0$, W_t peut s'exprimer :

$$W_t = W_o + \int_o^t (\Phi_s, dB_s) \text{ p.s. } (P^u), \tag{2.4}$$

où $B = (B_t)$, $0 \leq t \leq T$, est un mouvement brownien sur l'espace canonique $(C, \underline{\underline{F}})$, défini par l'équation (1.1) associée à u, et $W_o = J(u)$.

Définissons trois ensembles des mesures sur l'espace $(C, \underline{\underline{F}})$ de la manière suivante :

$$\underline{\underline{M}} = \{P^u \; ; \; u \in \underline{\underline{U}} \} \tag{2.5}$$

$$\underline{\underline{M}}^o = \{ P^u \; ; \; u \in \underline{\underline{U}} \text{ et } u \text{ est optimal} \}, \tag{2.6}$$

$$\underline{\underline{M}}^{\{W\}} = \{ Q \; ; \; (W_t, \underline{\underline{F}}_t, Q) \text{ est une martingale} \}. \tag{2.7}$$

Disons que tout élément de $\underline{\underline{M}}^o$ est une <u>loi optimale</u>. Alors il résulte immédiatement du théorème 2.1 que $\underline{\underline{M}}^o = \underline{\underline{M}} \cap \underline{\underline{M}}^{\{W\}}$. Le théorème suivant d'après Jacod-Yor donne un critère pour unicité des lois optimales.

<u>Théorème 2.2.</u> Soit $\underline{\underline{M}}^{\{W\},Q} = \{ R \in M^{\{W\}} \; ; \; R$ est absolument continue par rapport à $Q \}$. Supposons que $Q \in M^{\{W\}}$, alors pour que l'ensemble $\underline{\underline{M}}^{\{W\},Q}$ consiste en un seul point (= Q) il faut et il suffit que (W_t) a la <u>propriété de représentation prévisible</u> par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t, Q)$: i.e. pour toute $(\underline{\underline{F}}_t, Q)$ - martingale M_t, réelle bornée, il existe une fonction $(\underline{\underline{F}}_t)$ - prévisible Φ_t, convenablement intégrable, telle que

$$M_t = M_o + \int_o^t \Phi_s, dW_s, \quad \text{p.s. } (Q). \; \square \tag{2.8}$$

Donc on a un résultat à propos d'unicité des lois optimales ainsi :

<u>Proposition 2.3.</u> Soit u optimal dans $\underline{\underline{U}}$. Si W_t est une martingale ayant la propriété de représentation prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t, P^u)$, alors la loi optimale unique. □

Pour la démonstration, il suffit que l'on note que pour tout u, P^u est équivalente à la mesure de Wiener P d'après la proposition 1.1. La proposition suivante donne une condition suffisante pourqu'une martingale ait la propriété de représentation prévisible.

<u>Proposition 2.4.</u> Soit (B_t) un mouvement brownien à n dimensions sur un espace probabilisé (Ω, Σ, μ) et soit (Σ_t) la filtration naturelle de (B_t). Si Φ est un élément de $L^1_{loc}(B)$ ne s'annulant jamais sauf des ensembles évanescents et si $Y = \Phi.B$ (i.e. $Y_t = Y_o + \int_o^t (\Phi_s, dB_s)$), alors $Y = (Y_t)$ a la propriété de représentation prévisible. □

En effet, l'énoncé découle immédiatement du fait que $\Phi \neq 0$ et (B_t) a lui même cette propriété.

III EXEMPLE

Considérons un exemple dont le système de contrôle est défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dX_t = u(t,X)dt + dB_t \; , \quad X_o = x \in R^n \; , \tag{3.1}$$

et la fonction de perte est définie par

$$J(u) = E\left[F(T, |X_T|) \right] \; , \tag{3.2}$$

où $B = (B_t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, est un mouvement brownien à n dimensions, et x est un vecteur fixé de R^n. $F(t,x)$ est une application de $[0 \; ; \; T] \times R^1_+$ dans R^1_+, mesurable en (t,x), croissante en x pour tout t. Dans cet exemple, nous allons définir la <u>classe admissible contrôle</u> de la manière suivante : on écrit $u \in \underline{\underline{U}}^b$ si

1) u est une application de $[0 \; ; \; T] \times C$ dans R^n, mesurable en (t,w),
2) $\underline{\underline{F}}_t$ - adaptée,
3) pour tout (t,w), $|u(t,w)| \leqslant k$,

où k est une constante positive. On dit que u est un <u>contrôle admissible</u> si $u \in \underline{\underline{U}}^b$.

Remarquons que pour tout $u \in \underline{\underline{U}}^b$, il existe une solution de l'équation (3.1) et une seule (toujours en loi), et la classe $\underline{\underline{U}}^b$ est aussi relativement complète. En ce qui concerne le problème de trouver un contrôle optimal, le théorème suivant est bien connu :

<u>Théorème 3.1.</u> Soit ψ^* l'application de R^n à valeurs dans R^n telle que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$,

$$\psi_i^*(x) = \begin{cases} -kx_i/|x|, & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{si } x = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Alors $u^*(t,X) = \psi^*(t,X_t)$ est un contrôle optimal, où $X = (X_t)$ est la unique solution (en trajectoire) de l'équation (3.1) sur un espace probabilisé (Ω, Σ, μ) associée à u^*. Par ailleurs cette solution $X = (X_t)$ est forte (i.e. $\sigma\{X_s, s \leqslant t\} = \sigma\{B_s, s \leqslant t\}$). □

Nous allons considérer unicité des lois optimales. Dans ce cas, la fonction de valeur W_t définie par (2.2) peut s'écrire :

$$W_t = P - \text{ess.} \inf_{v \in \underline{\underline{U}}_t^T} E^v \left[F(T, |X_T|) \mid \underline{\underline{F}}_t \right].$$

$u^*(t,X) = \psi^*(t,X_t)$ étant optimal, d'après le théorème 2.1, W_t est égale à (3.4) :

$$W_t = E^* \left[F(T, |X_T|) \mid F_t \right] \text{ p.s. } (P) \tag{3.4}$$

où E^* signifie l'espérance relative à P^{u^*}. On sait que la solution de l'équation (3.1) associée à u^* est un processus de Markov, de même, $|X_t|$ est aussi un processus de Markov. En utilisant le semigroupe de ce processus, si F appartient au domaine du générateur, alors W_t peut s'écrire :

$$W_t = P_{o,T}F(0, |X_o|) + \int_o^t \frac{\partial}{\partial x} P_{s,T}F(s, |X_s|)dB_s^* , \tag{3.5}$$

où $P_{t,T}$ est le semigroupe de processus $(|X_t|t)$ et (B_t^*) est un mouvement brownien sous P^{u^*} à une dimension, défini par (3.6) :

$$dB_t^* = (X_t, dB_t) / |X_t| \text{ (si } X_t \neq 0), \; = 0 \text{ (si } X_t = 0). \tag{3.6}$$

Si l'ensemble $\{(s,w) ; \frac{\partial}{\partial x} P_{s,T} F(s,|X_s|) = 0$ est négligeable par rapport à la mesure produit dt ⊗ dP, alors (W_t) a la propriété de représentation prévisible d'après la proposition 2.4. Par conséquent, il résulte de la proposition 2.3 que la loi optimale est unique.

Cependant, on peut aussi vérifier unicité directement sans utiliser les propositions 2.3 et 2.4. En effet, si $\hat{u} \in \underline{\underline{U}}^b$ alors il faut remarquer que

$$dB_t^o = dB_t^* - \{(u_t, X_t / |X_t|) + k\} \, dt, \tag{3.7}$$

B^* apparaissant dans (3.6), est un mouvement brownien à une dimension sous P^{u^o}. En substituant (B^o) à (B^*) dans la formule (3.6), on a alors

$$W_t = P_{o,T}F(0,|x|) + \int_o^t \frac{\partial}{\partial x} P_{s,T}F(s,|X_s|)dB_s^o + \int_o^t \frac{\partial}{\partial x} P_{s,T}F(s,|X_s|)$$

$$\{(u_s, X_s / |X_s|) + k\} \, ds.$$

D'après le théorème 2.1, pour que u soit optimal il faut et il suffit que le terme de variation fini est nulle. Par conséquent, si $\frac{\partial}{\partial x} P_{s,T}F(s,|X_s|)$ ne s'annule jamais sauf des ensembles négligeables(ds ⓧ dP), alors u^o est optimal si et seulement si

$$(u_s^o, X_s / |X_s|) + k = 0, \quad \text{p.s. (ds ⓧ dP)}.$$

Posons $v_s \equiv u_s^* - u_s^o$, alors $(v_s, u_s^*) = (-kX_s/|X_s| - u_s^o, - kX_s / |X_s|) = k^2 + k(u_s^o, X_s / |X_s|) = 0$. Par conséquent, v et u^* sont orthogonales. Finalement,

$$(u^o, u^o) = (u^*-v, u^*-v) = (u^*,u^*) + (v,v) = k^2 + (v,v).$$

Toutefois, en tant que u^o appartient à $\underline{\underline{U}}^b$, $|u^o| \leqslant k$. Donc $v \equiv 0$. En récapitulant les arguments précédents, on a le théorème suivant :

Théorème 3.2. Si $\{(t,w) : \frac{\partial}{\partial x} P_{t,T} F(t,|X_t|) = 0\}$ est un ensemble négligeable (dt ⓧ dP), alors la loi optimale est unique. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. EL-KAROUI, Cours de l'Ecole d'été de calcul des probabilités, 1979.

[2] M. FUJISAKI, Contrôle stochastique continu et martingales (préprint).

[3] R. S. LIPTZER et A. N. SHIRYAEV, Statistics of stochastic processes, Springer Verlag, 1977.