ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

R. SCHOTT

Théorème des grandes déviations pour les groupes de type rigide

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 243-258

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_243_0>

THEOREME DES GRANDES DEVIATIONS POUR LES GROUPES DE TYPE RIGIDE

R. SCHOTT

Université de Nancy I

I.) RAPPEL : Cas des marches aléatoires sur $\mathbb{R}$.

Si (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi μ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et si l'on pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, la loi des grands nombres dit que : $\forall \varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right| \geqslant \varepsilon \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Le problème des grandes déviations consiste à étudier la vitesse de convergence vers zéro de cette expression. Le résultat principal pour les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ est le suivant :
si μ admet une transformée de Laplace alors $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(X_1)\right| > \varepsilon\right)$ tend vers 0 exponentiellement. Précisons un peu ce résultat :

Définition I.1 :

Supposons qu'il existe t_0 tel que $E(e^{t_0|X_1|}) < +\infty$. On dit alors que μ admet une transformée de Laplace (ou qu'elle admet un moment exponentiel). La transformée de Laplace de μ est par définition la fonction :

$$t \longrightarrow \tilde{\ }(t) = E(e^{tX_1}) \quad .$$

Définition I.2. : (transformée de CRAMER de μ) .

On appelle transformée de CRAMER de μ la quantité :

$$\lambda(\varepsilon) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [t\varepsilon - \operatorname{Log} \tilde{\mu}(t)] \quad .$$

Exemple I.3. :

Si X_i est une variable aléatoire gaussienne $N(0, \sigma^2)$ alors :
$\lambda(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}$. La transformée de CRAMER $\lambda(\varepsilon)$ est positive ou nulle, elle est strictement positive si $\varepsilon > 0$. Si on pose $\psi = \operatorname{Log} \tilde{u}$ on vérifie que : $\lambda(\varepsilon) = \sup_{t \in \mathbb{R}} [t\varepsilon - \psi(t)] = s\,\psi'(s) - \psi(s)$ où s est la solution de $\psi'(s) = \varepsilon$.

On a le théorème suivant :

Théorème I.4 :

Supposons que μ n'est pas portée par un ensemble arithmétique alors :

$$P(|\frac{S_n}{n} - E(X_1)| \geq \varepsilon) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-n\lambda(\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi n}\, a(\varepsilon)} \quad \text{où} \quad a(\varepsilon) = s\sqrt{\psi''(s)} \quad .$$

Pour la démonstration de ce résultat et des compléments, on pourra consulter [2] et [4] par exemple.

Supposons maintenant que les (X_n) soient des variables aléatoires indépendantes, de même loi, à valeurs dans un groupe localement compact G et notons $S_n = X_1 \ldots X_n$. Compte tenu des résultats de [6] sur la loi des grands nombres, on peut se demander si : la vitesse de convergence vers zéro est encore exponentielle. Le but de ce travail est d'étendre aux groupes de Lie simplement connexes de type rigide, le résultat démontré dans [9] pour les groupes nilpotents simplement connexes.

II.) Quelques définitions et propriétés utiles concernant les groupes de Lie.

Définition II.1. :

Soit G un groupe de Lie connexe, on appelle représentation adjointe de G l'application notée ad de G dans Aut $\mathfrak{g}$ (ensemble des automorphismes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G) définie par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\ ad\ } & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\ {\scriptstyle \exp}\uparrow & & \uparrow \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\ Ad\ } & \mathrm{Der}\,\mathfrak{g} \end{array} \qquad \text{où} : \begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\ Ad_X\ } & \mathfrak{g} \\ y & \longrightarrow & AdX(y) = [X,y] \end{array}$$

on a : $ad(\exp tX) = \exp t\,Ad\,X \qquad \forall t \in \mathbb{R}\ , \ \forall X \in \mathfrak{g}$.

Définition II.2. :

On dit que le groupe de Lie connexe G est de type R (rigide) si tous les poids de la représentation adjointe sont imaginaires purs.

Les démonstrations de cet article feront appel aux deux résultats importants suivants :

Théorème II.3. : (décomposition de Lévi) cf [3]

Soit G un groupe de Lie connexe, alors G s'écrit comme produit S.R. de deux de ses sous-groupes où R est le radical de G (i.e. le plus grand sous-groupe connexe, distingué, fermé, résoluble de G) et S est un groupe abélien semi-simple. Si de plus G est de type rigide, S est compact.

Théorème II.4. : (semi-simple splitting) (cf [1] ou [7])

Soit G un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe et A l'image canonique de G dans la partie semi-simple de l'adhérence algébrique de

ad G . Il existe un groupe nilpotent simplement connexe Ns appelé nil-shadow de G tel que : $A \ltimes G = A \ltimes N_s$ (produit semi-direct).
A est un groupe abélien d'automorphismes semi-simples de N_s . De plus si G est de type R , A est compact.

III.) Notion de jauge sur un groupe localement compact.

Définition III.1. :

Soit G un groupe localement compact. Une application $\delta : G \to \mathbb{R}^+$ est appelée jauge si elle vérifie : $\forall(g_1, g_2) \in G^2$, $\delta(g_1g_2) \leqslant \delta(g_1) + \delta(g_2) + C$ où C est une constante positive.
Une jauge δ est dite principale si il existe un voisinage compact V de e engendrant G tel que : $B_n = \{ x \mid \delta(x) \leqslant n\} \subset V^n$.
On sait (cf[6]) qu'il existe des jauges principales. Si δ_0 est une jauge principale alors pour toute jauge δ , on a : $\forall g \in G$, $\delta(g) \leqslant C_1 \delta_0(g)+ C_2$ où C_1 et C_2 sont des constantes positives.

Exemple III.2. :

Si $\mathbb{H}_1$ est le premier groupe d'Heisenberg c'est à dire l'ensemble $\mathbb{R}^3$ muni de la multiplication suivante : $(x, y, z) . (x', y', z') = (x+x', y+y', z+z'+ \frac{1}{2} (xy'-yx'))$, l'application δ définie par : $\delta(g) = \delta(x, y, z) = [(x^2+y^2)^2+z^2]^{1/4}$ est une jauge principale. Nous donnerons plus loin un exemple classique de jauge principale sur un groupe nilpotent de classe r .
Dans le cas des groupes produits semi-directs de deux groupes, la définition et la proposition suivantes seront très utiles.

Définition III.2. :

Soit G un groupe produit semi-direct du groupe localement compact B par un groupe A d'automorphismes de B (notation : $G = A \ltimes B$) . Soit δ une jauge sur B , on dit que δ est A-principale si pour tout $a \in A$, la fonction $x \longmapsto |\delta(ax)-\delta(x)|$ est bornée et si toute jauge δ' vérifiant cette dondition est dominée par δ (i.e. : $\exists K_1, K_2$ constantes positives telles que $\forall g \in B$: $\delta'(g) \leqslant K_1\delta(g) + K_2$) .

Proposition III.4. :

Soit $G = A \ltimes B$ (cf. notations précédentes) si α et δ sont deux jauges principales sur A et G respectivement et si β est une jauge A-principale sur B alors : i) la fonction λ définie par $\lambda(g) = \lambda(a.b) = \beta(b)+ \alpha(a)$ est équivalente à δ

ii) $\delta(a, b) \leqslant C_1 [\alpha(a) + \beta(b)] + C_2$ où C_1, C_2 sont deux constantes positives.

Pour la démonstration de cette proposition et pour des compléments sur les jauges voir [6] .

Dans toute la suite N désignera un groupe nilpotent simplement connexe de classe r . Nous pouvons identifier ce groupe à son algèbre de Lie $\mathcal{N}$ muni du produit défini par la formule de Campbell-Hansdorff :

$$x.y = x+y+ \frac{1}{2} [x,y] +\ldots \qquad \forall (x,y) \in \mathcal{N}^2 \quad .$$

Nous supposons désormais cette identification réalisée, soit

$N = N^1 \supset N^2 \supset \ldots \supset N^r \supset N^{r+1} = \{e\}$ la série centrale descendante de N .

Soit m un supplémentaire de N^2 dans N. Si G est un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe de type R , d'après le théorème II.4. il existe un groupe nilpotent simplement connexe N et un groupe compact K d'automorphismes de N tels que : $K \rtimes G = K \rtimes N$.

Reprenons les notations de la proposition III.4. : $\forall g = (k, r) \in K \rtimes G$ s'écrit ainsi sous la forme $g = (k, n) \in K \rtimes N$ et $\alpha(k) + \beta(r)$ est équivalent à $\alpha'(k) + \beta'(n)$ où α et α' sont des jauges principales sur K , β (respectivement β') est une jauge K-principale sur G (resp. N) .

Soit $S_n = (U_1, R_1)\ldots(U_k, R_k)\ldots(U_n, R_n)$ une marche aléatoire sur $K \rtimes R$ pour établir un théorème des grandes déviations pour la composante sur R de cette marche nous allons procéder de la manière suivante :

1) Nous établissons un tel théorème pour les groupes extensions compactes de groupes nilpotents simplement connexes. Etant donné qu'une jauge sur un groupe compact est bornée, on démontre qu'il suffit d'étudier la composante de la marche aléatoire sur le groupe nilpotent N .

2) En utilisant le théorème II.4. et la proposition III.4., on obtient alors un théorème des grandes déviations pour la composante sur le groupe rigide R

3) Enfin on passe au cas d'un groupe de Lie connexe de type R (non résoluble) en utilisant la décomposition de Lévi (cf th. II.3.).

IV.) Théorème des grandes déviations pour les groupes extensions compactes de groupes nilpotents simplement connexes.

Soit p une probabilité sur le groupe $K \rtimes N$ (N est nilpotent, simplement connexe, de classe r) telle que sa projection μ sur N soit à support compact. Considérons une suite de variables aléatoires $(U_i, V_i)_{1 \leq i}$ indépendantes à valeurs dans $K \rtimes N$, de même loi p . On note $S_n = (U_1, V_1)(U_2, V_2)\ldots(U_k,V_k)\ldots(U_n , V_n)$

$$= (R_n, T_n)$$

avec $R_n = U_1U_2U_3\ldots U_k\ldots U_n$ et $T_n = V_1U_1(V_2)\ldots U_1U_2\ldots U_k(V_{k+1})\ldots U_1U_2\ldots U_{n-1}(V_n)$

Posons : $Z_k = U_1 \ldots U_k(V_{k+1})$, $\bar{Z}_k$ sa composante sur m (un supplémentaire de N^2 dans N) et $\bar{X}_k = \int_N \bar{Z}_k d\mu$.

On se propose d'établir le théorème suivant :

Théorème IV.1. :

Si p est une probabilité sur $K \boxtimes N$ telle que sa projection μ sur N soit à support compact, avec les notations précédentes, pour toute jauge principale $\mathcal{S}$ sur $K \boxtimes N$

i) $\dfrac{\mathcal{S}[(R_n, (\bar{X}_1.\bar{X}_2\ldots\bar{X}_n)^{-1}T_n)]}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$

ii) il existe des constantes $M(\mathcal{S}, p)$, $A(\mathcal{S}, p)$ positives telles que pour tout ε , $0 < \varepsilon < 1$ on ait pour

$$n \geqslant \frac{M(p,S)}{\varepsilon^n} : P\left\{ \frac{\mathcal{S}[R_n, (\bar{X}_1\ldots\bar{X}_n)^{-1}T_n]}{n} > \varepsilon \right\} \leqslant A\, e^{-Bn\varepsilon^{2r}}$$

où r est la classe du groupe nilpotent simplement connexe N .

Remarque :

$(R_n, (\bar{X}_1\bar{X}_2\ldots\bar{X}_n)^{-1}T_n) = (e, (\bar{X}_1\bar{X}_2\ldots\bar{X}_n)^{-1}).(R_n, T_n)$

Démonstration :

D'après la proposition I.2.2. (i) :

$\mathcal{S}[(R_n, (X_1X_2\ldots X_n)^{-1}T_n] \sim [\alpha(R_n) + \beta[(X_1X_2\ldots X_n)^{-1}T_n]$ où α est une jauge principale sur K et β une jauge K-principale sur N d'où :

$$\frac{\mathcal{S}[R_n, (X_1X_2\ldots X_n)^{-1}T_n]}{n} \sim \left\{ \frac{[\alpha(R_n)}{n} + \frac{\beta[(\bar{X}_1\bar{X}_2\ldots\bar{X}_n)^{-1}.T_n]}{n} \right\}$$

Comme α est une jauge sur le groupe compact K , $\alpha(R_n)$ est borné et le théorème IV.1. résultera immédiatement de la proposition suivante :

Proposition IV.2. :

Les notations étant les mêmes que précédemment, on a :

i) $\dfrac{\beta[(\bar{X}_1\bar{X}_2\ldots\bar{X}_n)^{-1}T_n]}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$

ii) il existe des constantes $A'(\mu, \beta)$, $B'(\mu, \beta)$, $M'(\mu, \beta)$ positives telles que pour tout ε , $0 < \varepsilon < 1$ on ait pour

$$n \geqslant \frac{M'(\mu, \beta)}{\varepsilon^r} : P\left\{ \frac{\beta[(\bar{X}_1.\bar{X}_2\ldots\bar{X}_n)^{-1}T_n]}{n} > \varepsilon \right\} \leqslant A e^{-Bn\varepsilon^{2r}}$$

Démonstration :

Munissons N d'une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ adaptée à la série centrale descendantes (c.à.d. que : $\forall p$, $1 \leqslant p \leqslant r$, les vecteurs (e_i) appartenant à N^p en forment une base. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions polynômes sur N , $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ le système de fonctions coordonnées associé à la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$. On définit une notion de degré sur cette algèbre en attribuant un degré à chaque générateur x_i . Le degré de x_i noté $d(x_i)$ est par définition égal au plus grand entier s tel que $e_i \in N^s$. Cette notion est indépendante de la base adaptée choisie. Le produit $\circ$ sur N défini par la formule de Campbell-Handorff est polynomiale, on a : $x_k(u \circ v) = x_k(u) + x_k(v) + P_k(u, v)$ $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ où P_k est une fonction polynôme sur $N \times N$ telle que :

1°) $P_k(u, v)$ ne dépend que des $p_{d(x_k)-1}$ premières coordonnées de u et v où $p_i = \dim(Ni/N_{i+1})$

2°) Le degré de P_k est inférieur ou égal à $d(x_k)$

3°) Le degré partiel de P_k par rapport à la première variable u (resp. la deuxième variable v) noté $\deg P_k/_u$ (resp. $\deg P_k/_v$) est inférieur ou égal à $d(x_k)-1$

4°) La valuation partielle de P_k par rapport à la première variable u (resp. v) notée $\mathrm{Val}\, P_k/_u$ (resp. $\mathrm{val}\, P_k/_v$) est supérieure ou égale à 1 .

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ soit m^i un supplémentaire de N^{i+1} dans N^i . On a : $N = \bigoplus_{i=1}^{r} m^i$, si $u \in N$, notons $u^{(i)}$ sa composante sur m^i . Supposons les sous-espaces m^i de N normés par $\|\cdot\|_i$ on définit une fonction ϕ sur N par :

$$\phi(u) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant r} \|u^{(i)}\|_i^{1/i} \quad , u \in N .$$

On sait que quitte à remplacer les normes $\|-\|_i$ données par des normes homothétiques, ϕ est une jauge principale sur N . On vérifie aussi que ϕ est en fait une jauge K-principale. Comme il suffit d'établir la proposition IV.2. pour une jauge K-principale particulière (ici on utilise ϕ) , on voit que le théorème résultera immédiatement de

Proposition IV.3. :

Sous les hypothèses du théorème IV.1., pour tout $x \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{val}(x) \geq 1$:

i) $\dfrac{x[(\overline{X}_1\ldots\overline{X}_n)^{-1}.T_n]}{n^{\deg x}} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$

ii) il existe des constantes $M(x, u)$, $A(x, u)$ positives telles que :

$\forall \varepsilon > 0$ on ait pour $n \geq \frac{M}{\varepsilon}$:

$$P\left(\left|\frac{x[(\overline{X}_1\ldots\overline{X}_n)^{-1}.T_n]}{n^{\deg x}}\right| > \varepsilon\right) \leq Ae^{-nB\varepsilon^2}$$

Démonstration :

Nous allons d'abord établir deux lemmes :

Lemme IV.4. :

Pour toute fonctions polynôme $x \in \mathcal{A}$ de valuation $n \geq 1$, il existe une fonction polynôme P sur $N \times N$ telle que $\deg P \leq \deg x$, $P(u, v)$ ne dépende que des p premières cooordonnées de u et v, $\deg P/u \leq \deg x-1$, $\deg P/v \leq \deg x-1$, $\mathrm{val}\, P/u \geq 1$, $\mathrm{val}\, P/v \geq 1$ et telle que :

$$\forall u, v \in N \quad , \; x(u \circ v) = x(u) + x(v) + P(u, v) \quad .$$

Démonstration :

Soit B le sous-ensemble des polynômes de $\mathcal{A}$ de valuation supérieure ou égale à 1 qui satisfont au lemme I.V.4., on a :

① B contient les polynômes $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$

② B est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}$

③ B est stable par le produit.

① et ② sont évidents, montrons ③ :

si $(x, y) \in B \times B$ $\quad x(u \circ v) = x(u) + x(v) + P(u, v)$.

$\quad y(u \circ v) = y(u) + y(v) + Q(u, v)$.

Où P, Q sont des polynômes sur $N \times N$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé du lemme IV.4.

On a alors : $(xy)(u \circ v) = x(u \circ v)y(u \circ v) = x(u)+x(v)+P(u,v)[y(u)+y(v)+Q(u,v)]$

soit : $xy(u \circ v) = (xy)(u) + (xy)(v) + R(u, v)$

où $R(u, v) = x(u)y(v) + x(v)y(u) + [x(u)+x(v)]Q(u,v)+[y(u)+y(v)]P(u,v)+P(u,v)Q(u,v)$

R est un polynôme de degré inférieur ou égal à :

$\deg x + \deg y = \deg(xy)$, de plus val $R/u \geqslant 1$ et val $R/v \geqslant 1$ et R ne dépend que des $P_{d(x) \vee d(y)} \leqslant P_{d(x)+d(y)-1}$ premières coordonnées.

Donc B est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$ contenant les polynômes $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et par conséquent B contient tous les polynômes de $\mathcal{A}$ de val. $\geqslant 1$

Lemme VI.5. :

Sous les hypothèses du théorème II.7., pour tout $x \in \mathcal{A}$ de valuation $\geqslant 1$ il existe une constante C_x telle que : 1) $\forall w \in \Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{|x(T_n(w))|}{n^{\deg x}} \leqslant C_x$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{|x\, (\overline{X}_1 \circ \overline{X}_2 \circ \dots \circ \overline{X}_n)^{-1}|}{n^{\deg x}} \leqslant C_x$, $\dfrac{|x(\overline{X}_1 \circ \overline{X}_2 \circ \dots \circ \overline{X}_n)|}{n^{\deg x}} \leqslant C_x$

Démonstration :

On vérifie la première propriété du lemme en raisonnant par récurrence sur le degré de x

a) si $x \in \mathcal{A}$ est de degré 1 : $x(T_n) = x\,[V_1 U_1(V_2) \dots U_1 U_k(V_{k+1}) \dots U_1 U_2 \dots U_{n-1}(V_n)$

Notons S_p le support de p , si $A_x = \sup\limits_{u \in S_p} |x(u)|$, il est clair que :

$$\frac{|x(T_n)|}{n} \leqslant A_x \quad .$$

b) Supposons le résultat établi pour les polynômes de $d° \leqslant q$ $(q \geqslant 1)$ et soit x un polynôme de degré $q+1$, d'après le lemme IV.4 :
$x(u \circ v) = x(u) + x(v) + P(u, v)$ avec $d°P \leqslant \deg x$, val $P/u \geqslant 1$, val $P/v \geqslant 1$, $P(u, v)$ ne dépendant que des p_q premières coordonnées de u et v . Pour établir le résultat, il suffit de considérer le cas où $P(u, v) = y(u)z(v)$, le cas général s'en déduit par des méthodes classiques.

Les propriétés de P entraînent que : val $y \geqslant 1$, val $x \geqslant 1$, $\deg y \leqslant \deg x-1$, $\deg z \leqslant \deg x-1$, on a :

$$\begin{aligned} x(T_n) &= x[V_1 U_1(V_2) U_1 U_2(V_3) \dots U_1 U_2 \dots U_{n-1}(V_n)] \\ &= x(V_1) + x[U_1(V_2)] + \dots + x[U_1 U_2 \dots U_{n-1}(V_n)] + \sum_{k=1}^{n-1} y[V_1 U_1(V_2) \dots U_1 U_2 \dots \\ &\qquad U_{k-1}(V_k)]\, z[U_1 U_2 \dots U_k(V_{k+1})] \end{aligned}$$

d'où d'après l'hypothèse de récurrence, en notant : $A_z = \sup\limits_{u \in S_p} |z(u)|$ on a :

$$x(T_n) \leqslant n\, A_x + \Big(\sum_{k=1}^{n-1} k^{\deg y}\Big) C_y\, A_z$$

Il en résulte que :

$$\frac{|x(T_n)|}{n^{\deg x}} \leqslant \frac{Ax}{n^{\deg x-1}} + \frac{1}{n^{\deg x}} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} k^{\deg y}\right) C_y \, A_z$$

Or : $\deg x \geqslant 1$ et : $\displaystyle\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n} k^{\deg y} \sim \frac{n^{\deg y+1-\deg x}}{\deg y+1}$

$$\leqslant \frac{1}{\deg y+1} \quad \text{car} \quad \deg y+1 \leqslant \deg x$$

■

La proposition IV.3. résultera de la proposition IV.6 suivante :

<u>Proposition IV.6.</u> :

Sous les hypothèses précédentes , $\forall x \in \mathcal{A}$ de valuation $\geqslant 1$

i) La suite de variables aléatoires :

$$\frac{x(T_n) - x(\overline{X}_1 \circ \overline{X}_2 \circ \ldots \circ \overline{X}_n)}{n^{\deg x}} \xrightarrow{p.s} 0$$

ii) Il existe des constantes M' , A' , B' positives, ne dépendant que de x et μ telles que :

$\forall \varepsilon > 0$, on ait pour : $x \geqslant \frac{M'}{\varepsilon}$, $P\left(\frac{|x(T_n)-x(\overline{X}_1 \circ \overline{X}_2 \ldots \circ \overline{X}_n)|}{n^{\deg x}} > \varepsilon\right) \leqslant A' e^{-nB'\varepsilon^2 r}$

<u>Démonstration</u> :

Soit $x \in \mathcal{A}$ de valuation $\geqslant 1$. On a d'après le lemme IV.4 :

$$x(u \circ v) = x(u)+x(v)+ \sum_{p=1}^{p_o} y_p(u) z_p(v), (u,v) \in N^2 \quad \text{où : } \operatorname{val} y_p \geqslant 1, \operatorname{val} z_p \geqslant 1,$$

$$\deg y_p + \deg z_p \leqslant \deg x \quad .$$

Par conséquent on a :

$$x[(\overline{X}_1 \circ \overline{X}_2 \circ \ldots \circ \overline{X}_n)^{-1} \circ T_n] = x(T_n)+x(\overline{X}_1 \circ \ldots \circ \overline{X}_n)^{-1} + \sum_{p=1}^{p_o} y_p(T_n) z_p[(\overline{X}_1 \circ \ldots \circ \overline{X})^{-1}]$$

et :

$$0 = x[(\overline{X}_1 \circ \ldots \circ \overline{X}_n) \circ (\overline{X}_1 \circ \ldots \circ \overline{X}_n)^{-1}] = x\,(\overline{X}_1 \circ \ldots \circ \overline{X}_n) + x(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_n)^{-1} + \sum_{p=1}^{p_o} y_p(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_n) z_p [(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_n)^{-1}]$$

d'où par différence :

$$x[(\overline{X}_1 \circ \overline{X}_2 \ldots \overline{X}_n)^{-1} T_n] = x(T_n) - x(\overline{X}_1 \circ \ldots \circ \overline{X}_n) + \sum_{p=1}^{p_o} z_p[(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_n)^{-1}][y_p(T_n) - y_p(\overline{X}_1 \circ \overline{X}_2 \ldots \circ \overline{X}_n)]$$

Du fait que : $\displaystyle\frac{|z_p(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_n)^{-1}|}{n^{\deg z_p}} \leqslant C_{z_p}$ (cf. lemme IV.5) et comme :

des z_p+deg $y_p \leq$ deg x et $p \in \{1,2,\ldots,p_o\}$ on en déduit immédiatement que la proposition IV.3. est une conséquence de la proposition IV.6.

Démonstration de la proposition IV.6. :

On vérifie la première propriété de la proposition en raisonnant par récurrence sur le degré de x .

a) si deg x=1 : $\frac{1}{n}[x(T_n)-x(\overline{X}_1\circ\overline{X}_2\circ\ldots\circ\overline{X}_n)] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{x[U_1U_2\ldots U_k(V_{k+1})-x(\overline{X}_k)]\}$

on obtient le résultat cherché par application de la loi des grands nombres sur les groupes de Lie moyennables (cf. [6]) .

b) si deg x$\geq$2 :

Supposons le résultat établi pour les polynômes de degré inférieur ou égal à deg(x)-1 . On a :

$$x(u\circ v) = x(u)+x(v)+\sum_{p=1}^{p_o} y_p(u)z_p(v) \quad \text{où} \quad \text{val } y_p \geq 1, \ \text{val } z_p \geq 1$$

$$\deg y_p+\deg z_p < \deg x$$

On a : $$x(T_n) = \sum_{k=1}^{n} x[U_1U_2\ldots U_{k-1}(V_k)]+\sum_{p=1}^{p_o}\sum_{k=1}^{n-1} y_p(T_k)z_p\,[U_1U_2\ldots U_k(V_{k+1})]$$

$$x(\overline{X}_1\ldots\overline{X}_n) = \sum_1^n x(\overline{X}_i)+\sum_{p=1}^{p_o}\sum_{k=1}^{n-1} y_p(\overline{X}_1\overline{X}_2\ldots\overline{X}_k)z_p(\overline{X_{k+1}})$$

d'où il résulte en notant $I_{p_o} = \{1 \leq p \leq p_o \ / \ \deg z_p = 1\}$ et

$I'_{p_o} = \{1,2,\ldots,p_o\} \setminus I_{p_o}$ que :

$$\begin{aligned}
\frac{x(T_n)-x(\overline{X}_1\overline{X}_2\ldots\overline{X}_n)}{n^{\deg x}} &= \frac{1}{n^{\deg x}}[x(V\ )+x(U_1(V_2))+\ldots+x(U_1\ldots U_{n-1}(V_n))] - \frac{1}{n^{\deg x}}\sum_1^n x(\overline{X}_i) \\
&+ \sum_{p\in I'_{p_o}} \frac{1}{n^{\deg x}}\left\{\sum_{k=1}^{n-1} y_p(T_k)z_p[U_1\ldots U_k(V_{k+1})]-y_p(\overline{X}_1.\overline{X}_2..\overline{X}_k)z_p(\overline{X}_{k+1})\right] \\
\text{(E)} \qquad &+ \sum_{p\in I_{p_o}} \frac{1}{n^{\deg x}}\sum_{k=1}^{n-1} y_p(T_k)[z_p(U_1\ldots U_k(V_{k+1}))-z_p(\overline{X}_{k+1})] \\
&+ \sum_{p\in I_{p_o}} \frac{z_p(\overline{X}_{k+1})}{n^{\deg x}}\sum_{k=1}^{n-1} [y_p(T_k)-y_p(\overline{X}_1.\overline{X}_2\ldots\overline{X}_k)] \quad .
\end{aligned}$$

Examinons successivement les termes du deuxième membre de cette égalité.

α) Comme degx ≥ 2 , la suite : $\frac{1}{n^{\deg x}}[\,x(V_1)+x(U_1V_2)+\ldots+x(U_1..U_{n-1}(V_n))\,] \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$

β) $\frac{1}{n^{\deg x}}\sum_1^n x(\overline{X}_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

γ) Pour $p \in I'_{p_o}$ on a d'après le lemme IV.5. en notant :

$$Az_p = \sup |z_p(u)| \qquad u \in S_p \cup \{\overline{X}_1,\dots,\overline{X}_k\}$$

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} [y_p(T_k)z_p(U_1U_2\dots U_k(V_{k+1}))-y_p(\overline{X}_1\overline{X}_2\dots\overline{X}_k)z_p(\overline{X}_{k+1})] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2Az_p}{n^{\deg x}} C_{y_p} \sum_{k=1}^{n-1} k^{\deg y_p}$$

Or si $p \in I'_{p_o}$: $\deg y_p \leqslant \deg x - 2$ et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} k^{\deg y_p} = 0$

Il en résulte que p.s. :

$$\lim_n \sum_{p\in I'_{p_o}} \frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} | y_p(T_k)z_p(U_1..U_k(V_{k+1}))-y_p(\overline{X}_1\dots\overline{X}_k)| z_p(\overline{X}_{k+1})$$

δ) Pour $p \in I_{p_o}$ posons : $\sigma_n(z_p) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} [z_p(X_k)-z_p(\overline{X}_k)]$.

D'après la loi des grands nombres la suite $(\sigma_n(z_p))_{n>1} \xrightarrow{p.s.} 0$

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} y_p(T_k)\,[z_p(U_1..U_k(V_{k+1}))]-z_p(\overline{X}_{k+1}) = \frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=2}^{n-2} k\sigma_k(z_p)$$

$$[y_p(T_{k-1})-y_p(T_k)]$$

$$-\frac{1}{n^{\deg x}}\sigma_1(z_p)y_p(T_1)+\frac{1}{n^{\deg x}}\sigma_n(z_p)y_p(T_{n-1}) \quad .$$

La suite de v.a. $\dfrac{|y_p(T_{k-1})-y_p(T_k)|}{k^{\deg y_p-1}}$ est bornée (conséquence des lemmes IV.4 et IV.5). Il en résulte que, puisque, $\deg x \geqslant \deg y_p+1$ et puisque $(\sigma_n(z_p))_{n\geqslant 1} \xrightarrow{p.s} 0$ que la suite :

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=2}^{n-2} k\sigma_k(z_p)[y_p(T_{k+1})-y_p(T_k)] \xrightarrow{p.s} 0 \quad .$$

Il est clair de plus que les suites : $\frac{1}{n^{\deg x}}\sigma_1(z_p)y_p(T_1)$ et

$$\frac{1}{n^{\deg x}}\sigma_n(z_p)y_p(T_{n-1}) \xrightarrow{p.s} 0$$

donc pour tout $p \in I_p$, la suite :

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} y_p(T_k)\,[z_p(U_1U_2\dots U_k(V_{k+1}))-z_p(\overline{X}_{k+1})] \xrightarrow{p.s} 0$$

il en est de même de la suite :

$$\sum_{p \in I_{p_o}} \left[\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} y_p(T_k)\left[z_p(U_1\ldots U_k(V_{k+1}) - z_p(\overline{X}_{k+1})\right]\right]$$

η) Considérons la suite :

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n} [y_p(T_k) - y_p(\overline{X}_1\ldots\overline{X}_k)]_{n>1}$$

On a : $\deg y_p \leqslant \deg(x)-1$ et donc par hypothèse de récurrence, la suite :

$$\frac{y_p(T_k)-y_p(\overline{X}_1\ldots\overline{X}_k)}{n^{\deg y_p}} \xrightarrow{p.s} 0 \quad .$$

On en déduit immédiatement (puisque $\deg x \geqslant \deg y_p + 1$) que la suite :

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{1}^{n} [y_p(T_k) - y_p(\overline{X_1 X_2}\ldots\overline{X}_k)]_{n \geqslant 1} \xrightarrow{p.s.} 0$$ et donc aussi la suite

$$\sum_{p \in I_{p_o}} \frac{z_p(\overline{X_{k+1}})}{n^{\deg x}} \sum_{k=1}^{n-1} y_p(T_k) - y_p(\overline{X}_1\ldots\overline{X}_k)] \quad .$$

Les étapes α, β, γ, S, η montrent la première assertion de la proposition IV.6.

<u>Démonstration de la deuxième affirmation de la proposition IV.6.</u> :

On utilise plusieurs lemmes .

<u>Lemme IV.7.</u> :

Les notations étant les mêmes que dans la proposition II.6., $\forall x \in \mathcal{A}$ tel que $\operatorname{val} x \geqslant 1$ on a :

$$\frac{x(T_n) - x(\overline{X}_1.\overline{X}_2\ldots\overline{X}_n)}{n^{\deg x}} = T_{n,1}(x) + T_{n,2}(x) + T_{n,3}(x) \quad \text{où :}$$

a) $T_{n,1}(x)$ est une v.a. telle que : $|T_{n,1}(x)| \leqslant \frac{K_{x,p}}{n}$ où $K_{x,p}$ est une constante.

b) $T_{n,2}(x)$ est une v.a. qui est combinaison linéaire finie de termes de la forme :

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} y(T_{k_p}) \left[z(U_1U_2\ldots U_{k_p}(V_{k_{p+1}}) - z(\overline{X}_{k_{p+1}})\right] \text{ où } (x,y) \in$$

avec : $\deg z = \operatorname{val} z = 1$; $\operatorname{val} y \geqslant 1$ et $\deg x \geqslant \deg y + p$.

c) $T_{n,3}(x)$ est une v.a. qui est combinaison linéaire finie de termes de la forme :

$$\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} [y(T_{k_p}) - y(\overline{X}_1.\overline{X}_2\ldots\overline{X}_{k_p})] \quad \text{où} \quad y \in \mathcal{A},$$

degy = valy = 1, degy + p $\leqslant$ degx .

Démonstration :

elle se fait aisément par récurrence sur le degré de x en utilisant l'expression (E) et le lemme IV.5. et en appliquant l'hypothèse de récurrence à y_p,

$p \in Ip_o = \{p \ ; \ 1 < p < p_o \ | \mathrm{deg} z_p = 1\}$.

Notons $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les v.a. $(V_k)_{1<k<n}$

Lemme IV.8. :

Soit (y_n) une suite de v.a. réelles telle que pour tout $n > 1$, y_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et telle que : $|y_n| < An^q|$ où A est une constante et q un entier positif. Alors si $x \in \mathcal{A}$ est un polynôme tel que :

degx = valx = 1 et si $Z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(n) y_k \, [x(U_1 U_2 \ldots U_k(V_{k+1}) - x(\overline{X_{k+1}})]$ où les $(a_k(n))_{1<k<n}$ sont des nombres réels tels que :

$$\sum_{k=1}^{n} [a_k(n)]^2 k^{2q} = O(n^{\alpha}) \text{ avec } \alpha > 0 \ .$$

Alors il existe une constante B telle que :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ P(|Z_n| > \varepsilon) < 2 \, e^{\frac{-B\varepsilon^2}{n^{\alpha}}} \quad \blacksquare \ .$$

La démonstration de ce résultat est pratiquement semblable à celle du lemme 4 de [9]. Elle fait appel à l'inégalité de Bernstein :

$$P(Z_n > \varepsilon) \leqslant e^{-t\varepsilon} E(e^{tZn}) \quad \forall \varepsilon > 0 \ , \ \forall t > 0$$ et au fait que :

$$|x[U_1 \ldots U_k(V_{k+1})] - x(V_{k+1})| \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0 \text{ exponentiellement vite} \quad \blacksquare$$

Etudions maintenant pour $x \in \mathcal{A}$ de valuation supérieure ou égale à 1 :

$$P \left[\frac{|x(T_n) - x(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_n)}{n^{\mathrm{degx}}} > \varepsilon \right] \quad \text{où } T_n = V_1 U_1(V_2) \ldots U_1 U_2 \ldots U_{n-1}(V_n) \ .$$

D'après l'inégalité triangulaire et le lemme IV.8 :

$$P\left[\frac{x(T_n) - x(\overline{X}_1 \ldots \overline{X}_n)}{n^{\mathrm{degx}}} > \varepsilon \right] \leqslant P(|T_{n,1}(x)| > \tfrac{\varepsilon}{3}) + P(|T_{n,2}(x)| > \tfrac{\varepsilon}{3}) + P(|T_{n,3}(x)| > \tfrac{\varepsilon}{3})$$

Examinons successivement chacun des termes du 2ème membre de cette inégalité :

1) on a : $P(|T_{n,1}(x)| > \frac{\varepsilon}{3}) = 0$ dès que : $n > \frac{3K_{x,u}}{\varepsilon}$

2) Pour étudier $P(|T_{n,2}(x)| > \frac{\varepsilon}{3})$ il suffit de considérer :

$$P(|\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \sum_{k_p=1}^{k_p-1} y(T_k)[z(U_1 \dots U_k(V_{k+1})) - z(\overline{X_{k+1}})]| > \frac{\varepsilon}{C_1})$$

avec $x, y \in \mathcal{A}$, $\deg z = \operatorname{val} z = 1$, $\operatorname{val} y \geqslant 1$, $\deg x \geqslant \deg y + p$
et où C_1 est une constante choisie pour que : $P(|T_{n,2}(x)| > \frac{\varepsilon}{3})$ soit majoré par une somme finie de tels termes.

$$\sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} y(T_{kp}) [z(U_1 \dots U_k(V_{k+1})) - z(\overline{X_{k+1}})] = \sum_{j=1}^{n-p} a'_j(n) y(T_j) [z(U_1 \dots U_j(V_{j+1}) - z(\overline{X_{j+1}})]$$

où :

$$a'_j(n) = \sum_{j_1=j+1}^{n-1} \sum_{j_2=j_1+1}^{n-1} \cdots \sum_{j_{p-1}=j_{p-2}+2}^{n-1} 1$$

On a : $\sum_{j=1}^{n-p} [a'_{j(n)}]^2 j^{2\deg y} = O(n^{2\deg y + 2p - 1})$ comme d'après le lemme IV.5 on a :

$|y(T_j)| \leqslant C_y\, j^{\deg y}$, par application du lemme IV.8, on obtient :

$$P(|\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \sum_{k_p=1}^{k_p-1} y(T_{kp})[z(U_1 \dots U_{k_p}(V_{k_p+1}) - z(\overline{X_{k_p+1}})]| > \frac{\varepsilon}{C_1})$$

$$\leqslant 2 \exp\left[-\frac{B_1\, \varepsilon^2 n^{2\deg x}}{n^{2\deg y + 2p - 1}}\right] \leqslant 2 \exp[-B_1\, \varepsilon^2 n]$$ où B_1 est une constante > 0

3) Pour étudier $P(|T_{n,3}(x)| > \frac{\varepsilon}{3})$, il suffit de considérer :

$$P(|\frac{1}{n^{\deg x}} \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} [y(T_{k_p}) - y(\overline{X}_1 \dots \overline{X}_{k_p})]| > \frac{\varepsilon}{C_2})$$ où $y \in \mathcal{A}$

$\deg y = \operatorname{val} y = 1$ et $\deg y + p < \deg x$.
où C_2 est une constante positive choisie pour que : $P(|T_{n,3}(x)| > \frac{\varepsilon}{3})$ soit majorée par une somme finie de tels termes

$$\sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}-1} [y(T_{k_p}) - y(\overline{X}_1 \dots \overline{X}_{k_p})] = \sum_{j=1}^{n-p} a''_j(n)[y(T_j) - y(\overline{X}_1 \dots \overline{X}_j)]$$

où : $a''_j(n) = \sum_{j_1=j}^{n-1} \sum_{j_2=j+1}^{n-1} \dots \sum_{j_p=j_{p-1}}^{n-1} 1$ on a : $\sum_{j=1}^{n} [a''_j(n)]^2 = O(n^{2p+1})$

Par application du lemme IV.8 :

$$P\left(\frac{1}{n^{degx}} \left| \sum_{k_1=1}^{n-1} \sum_{k_2=1}^{k_1-1} \cdots \sum_{k_p=1}^{k_p-1} (y(T_{kp})-y(\overline{X}_1\ldots\overline{X}_{kp}))\right| > \frac{\varepsilon}{C_2}\right)$$

$$\leqslant 2 \exp \left[- \frac{B_2\ \varepsilon^2 n^{2degx}}{n^{2p+1}}\right] \leqslant 2 \exp\left[-B_2\ n\ \varepsilon^2\right]$$

où B_2 est une constante > 0 .

d'où le résultat (ii) de la proposition IV.6. ■

BIBLIOGRAPHIE

1) L. AUSLANDER, L.W. GREEN :
G-induced flows. Amer. J. Math t.88 1966, p. 43-60

2) R. AZENCOTT :
Ecole d'été de St Flour , 1978, L.N. n° 774, Springer Verlag.

3) C. CHEVALLEY :
Théorie des groupes de Lie. Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Nancago (tome 3) (1955).

4) P. CREPEL :
Théorème des grands écarts sur $\mathbb{R}$. Séminaire de probabilités, Rennes 1978

5) Grandes déviations et applications statistiques - Séminaire d'Orsay, Astérisque n° 68.

6) Y. GUIVARC'H :
Une loi des grands nombres pour les groupes de Lie. Journées sur les marches aléatoires. Astérisque n° 74, 1980.

7) Y. GUIVARC'H :
Croissance polynomiale et périodes des fonctions harmoniques.
Bulletin S.M.F. n° 101, (1973).

8) Y. GUIVARC'H, M. KEANE, B. ROYNETTE :
Marches aléatoires sur les groupes de Lie. L.N. n° 624 (Springer Verlag)

9) E. LEPAGE :
Théorème des grands écarts sur les groupes nilpotents simplement connexes
Séminaire de probabilités - Rennes 1978.

10) A. MALCEV :
On semi-simple subgroups of Lie groups. Amer. Math. Soc. Transl. n° 33, 1950.

11) PICHON :
Groupes de Lie. Hermann.

R. SCHOTT
U.E.R. Sciences Mathématiques
E.R.A. n° 839 du C.N.R.S.
UNIVERSITE DE NANCY I
C.O. n° 140
54037 NANCY CEDEX