ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

R. SCHOTT

Marches aléatoires sur les espaces homogènes des groupes nilpotents connexes à génération compacte

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 237-242

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_237_0>

MARCHES ALEATOIRES SUR LES ESPACES HOMOGENES DES GROUPES NILPOTENTS CONNEXES A GENERATION COMPACTE

R. SCHOTT

Université de NANCY I

I - GENERALITES

Soit G un groupe localement compact à base dénombrable (L.C.D), μ une probabilité adaptée sur G, H un sous-groupe fermé de G et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans G et de même loi μ. Soit π l'application canonique de G sur l'espace homogène $M = G/_H$, $Z_n^{\bar{g}} = \pi(X_n X_{n-1} \ldots X\ g) = X_n X_{n-1} \ldots X \wedge \bar{g}$ où $g \in G$, $\bar{g} = \pi(g) \in M$, est une chaîne de Markov appelée marche aléatoire de loi μ partant de $\bar{g}$, la probabilité de transition est : $P(x,A) = \mu * \varepsilon_x(A)$ $(x \in M$, A borélien de $M)$.

On dira qu'un point $x \in M$ est transitoire s'il existe un voisinage V de x tel que : $P\ [\sum_n 1_V(Z_n^x) = +\infty] = 0$, x est dit récurrent si : $P(\sum_n 1_V(Z_n^x) = +\infty) = 1$ pour tout voisinage V de x.

II - BUT DE L'ARTICLE

Etudier les marches aléatoires sur les espaces homogènes M du type suivant : $M = G/_H$ où G est un groupe nilpotent connexe à génération compacte et H un sous-groupe fermé de G. Grâce à un théorème de structure de ces groupes G, nous ramenons l'étude des marches aléatoires sur M à l'étude des marches aléatoires sur l'espace homogène $M' = G'/_{H'}$, où G' est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe et H' un sous-groupe fermé de G'. Nous indiquons également une méthode utilisant des résultats dûs à L. AUSLANDER [1] qui permet en fait de se ramener au cas où H' est connexe. Cette hypothèse de connexité était jusqu'à présent nécessaire dans les études faites sur les marches aléatoires sur les espaces homogènes. Voir [5] [7] et [11].

III - UN THEOREME DE STRUCTURE

<u>THEOREME 1</u>.- *Si G est un groupe nilpotent connexe, à génération compacte, il existe un sous-groupe compact distingué maximal K tel que $G/_K$ soit un groupe de Lie connexe et simplement connexe.*

<u>Preuve</u> : On pourra consulter [8].

IV - CARACTERISATION DES MARCHES ALEATOIRES

Nous désignons par A(H) le plus petit sous-groupe fermé connexe contenant H.

THEOREME 2.- *Soit G un groupe nilpotent connexe à génération compacte, μ une probabilité adaptée sur G, H un sous-groupe fermé de G et K le sous-groupe de G défini par le théorème 1.*
Alors :

i) si $A(H.K)$ n'est pas distingué dans G, tout état de l'espace homogène $G/_H$ est transitoire.

ii) si $A(H.K)$ est distingué dans G, l'espace homogène $G/_H$ est de même nature que le groupe $G/_{A(H.K)}$ (c'est-à-dire récurrent si et seulement si $rg(G/_{A(H.K)}) < 2$).

Preuve : Nous allons tout d'abord établir quelques lemmes (souvent assez élémentaires).

LEMME 1.- *H et K étant des sous-groupes fermés de G, H.K est un sous-groupe fermé de G et si l'espace homogène $G/_{HK}$ est transitoire, $G/_H$ l'est aussi.*

Preuve : La première partie du lemme est facile.

Pour la deuxième partie remarquons que : $H.K \supset H$ donc $gH.K \supset g.H$.

Soit s la surjection canonique de $G/_H$ dans $G/_{H.K}$ / s est continue et ouverte.

Ainsi tout voisinage ouvert de $G/_{H.K}$ est l'image d'un voisinage ouvert de $G/_H$.

LEMME 2.- *Les espaces homogènes $G/_H$ et $G/_K/_{HK/_K}$ sont de même nature.*

Preuve : K étant un sous-groupe distingué de G est aussi un sous-groupe distingué de H.K

On peut alors appliquer le lemme 1 de [11] : il existe un isomorphisme (application bijective, bicontinue, équivariante) entre $G/_H$ et $G/_K/_{HK/_K}$ d'où le résultat.

LEMME 3.- *Les espaces homogènes $G/_K/_{H.K/_K}$ et $G/_K/_{A(HK/_K)}$ sont de même nature.*

Preuve : Posons $G' = G/_K$ et $H' = HK/_K$

Nous allons utiliser les deux lemmes suivants.

Lemme a : Soit Γ l'application de $G/_H$ dans $G/_{A(H)}$ définie par :

$$\Gamma(g.H) = g\,A(H)$$

Alors Γ est équivariante, continue surjective et pour tout compact C de $G/_{A(H)}$, $\Gamma^{-1}(C)$ est un compact de $G/_H$.

Preuve : Γ associe à la classe $g.H$ l'unique classe modulo $A(H)$ qui la contient.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ G/_{A(H)} & & G/_H \arrow[ll, "\Gamma"'] \end{tikzcd}$$

où p_1 et p_2 sont les projections canoniques.

Soit alors : $x = g.(H) \in G/_H$ et $g' \in G$ on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(g'.x) &= \Gamma(g'g.H) \\ &= g'g.A(H) \\ &= g'(g.A(H)) \\ &= g'\Gamma(x) \end{aligned}$$

• la continuité et la surjectivité de Γ sont évidentes.

† Soit K un compact de $G/_{A(H)}$, on peut le recouvrir par un nombre fini de compacts V_i tels que $\Gamma^{-1}(V_i)$ soit compact. Alors :

$$\Gamma^{-1}(K) \subset \Gamma^{-1}(\bigcup_i V_i) = \bigcup_i \Gamma^{-1}(V_i)$$

$\Gamma^{-1}(K)$ est fermé (car Γ est continue) dans le compact $\bigcup_i \Gamma^{-1}(V_i)$.

Lemme b : Les espaces homogènes $G'/_{H'}$ et $G'/_{A(H')}$ sont de même nature.

Preuve : Il suffit de montrer que les marches U_n et V_n définies respectivement sur $G'/_{H'}$ et $G'/_{A(H')}$ passent simultanément dans deux mêmes compacts : soit K un compact de $G/_{A(H')}$ d'après le lemme (a), $\Gamma^{-1}(K)$ est un compact de $G/_{H'}$ et on a :

$$V_n \in K \Leftrightarrow U_n \in \Gamma^{-1}(K)$$

En effet, grâce à l'équivariance on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(V_n) &= \Gamma(X_n.X_{n-1}\ldots X_\wedge x) \qquad x \in G'/_{A(H')} \\ &= X_n X_{n-1}\ldots X_\wedge \Gamma(x) \\ &= U_n \end{aligned}$$

LEMME 4.- $A(HK/_K)$ s'écrit sous la forme $H_2/_K$ avec H_2 sous groupe fermé de G contenant HK, de plus HK est uniforme dans H_2 (i.e : $H_2/_{HK}$ est compact)

Preuve : $A(HK/_K)$ étant un sous-groupe de $G/_K$ est donc de la forme : $H_2/_K$ avec $H_2 \supset K$.

Or : $H_2/_K = A(HK/_K)$ est fermé connexe et K est fermé connexe.

Par conséquent H_2 est un sous-groupe fermé connexe de G et $H_2 \supset HK$.

La deuxième partie du lemme découle d'un résultat dû à L. Auslander [1] : si $A(H)$ est le plus petit sous-groupe fermé connexe contenant H (l'enveloppe algébrique de H) alors H est uniforme dans $A(H)$.

LEMME 5.- $H_1/_K$ est distingué dans $G/_K$ si et seulement si H_1 est distingué dans G.

La preuve de ce lemme est facile, pour plus de détails on peut consulter [2].

Fin de la preuve du théorème :

1) Si $A(HK)$ est distingué dans G alors $G/_H$ est de même nature que le groupe $G/_{H_1}$ ($G/_{H_1}$ est récurrent si et seulement si $rg(G/_{H_1}) \leqslant 2$).

2) Si $A(HK)$ n'est pas distingué dans G :

Nous appliquons alors successivement les lemmes 1, 2, 3, 4 : on est ainsi ramené à démontrer le résultat dans le cas d'un groupe G de Lie, nilpotent, simplement connexe et d'un sous-groupe H fermé connexe de G.

THEOREME.- Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, H un sous-groupe fermé connexe non distingué de G. Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans G, de même loi μ, π l'application

canonique de G *dans l'espace homogène* $G/_H$ *et* $Z_n^{\bar{g}} = \pi(X_n \ldots X_1 g) = X_n \ldots X_1 \pi(g)$ *la marche aléatoire partant de* $\pi(g)$.
Alors tout état de $G/_H$ *est transitoire, de plus si* μ *est étalée le potentiel de tout compact est borné.*

<u>Preuve</u> : Le détail de la démonstration se trouve dans [11].

Nous allons en donner ici les principales étapes :

<u>1ère Etape</u> : On montre qu'on peut se ramener au cas où G est un groupe nilpotent de classe 2.

<u>2ème Etape</u> : Si $\mathcal{H}$ est l'algèbre de Lie de H et si $\mathcal{L}$ est un supplémentaire de $\mathcal{G}_2 = [\mathcal{G},\mathcal{G}]$ dans $\mathcal{G}$ (avec $\mathcal{G}$ algèbre de Lie de G) alors on peut supposer $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$

<u>3ème Etape</u> : On peut supposer que $\dim(\mathcal{G}_2) = 1$.

<u>4ème Etape</u> : Si B est la forme bilinéaire antisymétrique associée à $[\cdot,\cdot]$ dans $\mathcal{G}_2$, en appelant $\mathcal{C}$ le noyau de B on peut supposer $\mathcal{H}$ inclus dans un supplémentaire de $\mathcal{C}$.

<u>5ème Etape</u> : On explicite l'action de G sur $G/_H$ en utilisant la formule de Cambell-Hausdorf.

<u>6ème Etape</u> :

a) si μ admet des moments d'ordre $4+\delta$ on montre le résultat voulu en utilisant la méthode des fonctions barrières.

b) on établit ensuite le même résultat sans hypothèse de moment en utilisant le lemme suivant [2].

<u>LEMME</u>.- *Pour que l'espace homogène* $G/_H$ *soit transitoire il faut et il suffit que toute marche symétrique et ayant des moments de tous ordres soit transitoire.*

B I B L I O G R A P H I E

[1] AUSLANDER, an exposition of the structure of solvmanifolds (Bulletin of the American Mathematical Soaety, Vol 79, 1973).

[2] BALDI, LOHOUE, PEYRIERE, Sur la classification des groupes récurrents (C.R.A.S. 10 décembre 1977 - page 1103).

[3] BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie - Hermann Paris (1960).

[4] CHEVALLEY, Théorie des groupes de Lie. Publications de L'institut Mathématique de l'UNIVERSITE DE NANCAGO (tome 3 - 1955).

[5] L. GALLARDO, "Sur deux classes de marches aléatoires" Thèse de 3ème cycle - NANCY 1977).

[6] Y. GUIVARC'H, M. KEANE, B. ROYNETTE, Les Marches aléatoires sur les groupes de Lie Lecture Notes n° 624.

[7] H. HENNION, B. ROYNETTE, Un théorème de dichotomie pour une marche aléatoire sur un espace homogène. (C.R.A.S. - 19 septembre 1977, t. 285).

[8] G. HOCHSCHILD, The structure of Lie groups Holden-Day, Inc (1965).

[9] D. PREVOT, R. SCHOTT, Marches aléatoires sur les espaces homogènes de groupes de Lie nilpotent simplement connexes (L.N. : séminaire NANCY-STRASBOURG, Analyse harmonique sur les groupes de Lie (à paraître)).

[10] B. ROYNETTE, M. SUEUR, Marches aléatoires sur les groupes nilpotents (Z.W. p.129-138 - 1974).

[11] R. SCHOTT, Etude des marches aléatoires sur les espaces homogènes de groupes de Lie nilpotent simplement connexes (thèse 3ème cycle - NANCY 1976).

[12] R.SCHOTT, Marches aléatoires sur les espaces homogènes de groupes de Lie (C.R.A.S. 1978).

[13] F. SPITZER, Principles of Random Walks, D. Van Nostrand (1964).

René SCHOTT

UER Sciences Mathématiques
UNIVERSITE DE NANCY I

54037 - NANCY CEDEX