

ANNALES SCIENTIFIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2  
*Série Mathématiques*

C. COCOZZA

M. ROUSSIGNOL

**Comportement asymptotique d'un système infini de  
particules additif sur  $\mathbb{Z}$**

*Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2*, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 221-228

[http://www.numdam.org/item?id=ASCFM\\_1981\\_\\_69\\_19\\_221\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_221_0)

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2 » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UN SYSTEME INFINI DE PARTICULES

ADDITIF SUR  $\mathbb{Z}$

C. COCOZZA - M. ROUSSIGNOL

Université PARIS VI

I Présentation du modèle

Nous allons montrer comment des méthodes de percolation permettent d'étudier des systèmes infinis de particules qui évoluent par naissance et mort. Nous commencerons par étudier le processus de contact, puis nous montrerons que ces méthodes s'appliquent plus généralement.

Le processus de contact est un processus de Markov à valeurs dans  $E = (0,1)^{\mathbb{Z}}$  qui évolue par naissance et mort ; chaque particule existante meurt au bout d'un temps exponentiel de paramètre  $\lambda$  indépendamment du reste de la configuration ; une particule ne peut naître en un site que si au moins un site voisin est occupé et alors la naissance a lieu au bout d'un temps exponentiel de paramètre proportionnel au nombre de voisins occupés ; enfin il ne peut arriver qu'un seul évènement, naissance ou mort, à la fois.

Il est possible de construire une version de ce processus sur le schéma percolatif dans l'espace temps  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$  suivant :

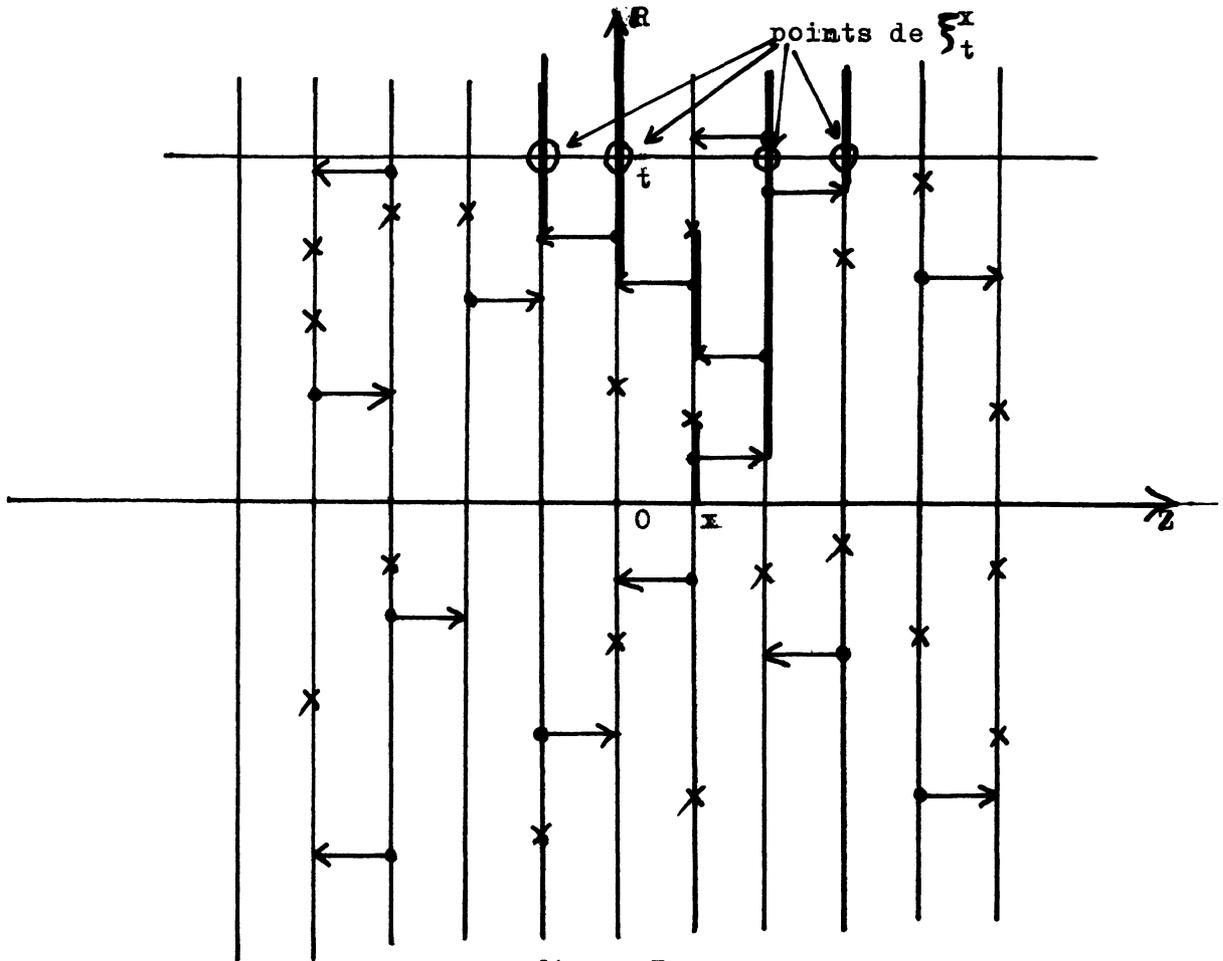


figure I

Sur chaque fibre  $(\{x\} \times \mathbb{R})$  on met trois processus ponctuels de Poisson indépendants : le premier de paramètre  $\lambda$  qui est représenté par les croix sur le schéma; les deux autres de paramètre 1 qui sont représentés sur le schéma par des flèches reliant la fibre voisine vers la droite ou vers la gauche suivant le processus ponctuel. Les processus sur chaque fibre sont indépendants les uns des autres. Nous allons définir le processus  $\xi_t^x$  partant de la configuration initiale  $x$  à l'instant 0. Sur le schéma percolatif, définissons un chemin comme une ligne orientée composée de segments horizontaux et verticaux, les segments horizontaux étant composés de flèches, les segments verticaux étant sur les fibres verticales; la ligne suit le sens des flèches et le sens croissant du temps; elle s'arrête dès qu'elle rencontre une croix. On définit alors  $\xi_t^x$  comme l'ensemble des points de  $(\mathbb{Z} \times \{t\})$  reliés à  $(\{x\} \times \{0\})$  par un tel chemin. Pour une configuration initiale quelconque  $\eta$ , on définit

$\xi_t^\eta = U_{x \in \eta_t} \xi_t^x$ . On peut alors vérifier que  $\xi_t^\eta$  a les propriétés voulues : c'est un processus markovien vu les propriétés d'indépendance des processus de Poisson; il est homogène dans le temps. Si  $f$  appartient à  $\mathcal{D}(E)$ , ensemble des fonctions de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées, on vérifie que si  $\mathcal{F}_t$  est la filtration engendrée par les processus de Poisson jusqu'au temps  $t$

$f(\xi_t^\eta) - f(\eta) - \int_0^t ds Lf(\xi_s^\eta)$  est une  $(\mathcal{F}_t, P)$  martingale

où  $Lf(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \{ 1_{(x \in \eta)} \lambda [f(\eta \setminus x) - f(\eta)] + 1_{(x \notin \eta)} [\eta(x+1) + \eta(x-1)] [f(\eta \cup x) - f(\eta)] \}$

ce qui est une traduction des propriétés décrites au début.

Le processus de contact a été étudié par Harris et par Griffeath dans plusieurs articles. Ces travaux sont exposés dans le livre de Griffeath [G]. Ici nous redémontrons leurs résultats et nous complétons leur étude en donnant des résultats pour toutes les valeurs du paramètre  $\lambda$ .

## II Mesures invariantes

Un des problèmes naturels à résoudre pour un tel modèle est l'identification des mesures invariantes et la détermination des bassins d'attraction des différentes mesures invariantes.

Il y a une mesure invariante évidente, la mesure de Dirac sur le vide  $\delta_\emptyset$  : si le système est vide, il le reste.

Sur le schéma percolatif, il est possible d'identifier une autre mesure invariante. Sur  $(\mathbb{Z} \times \{0\})$  considérons les points qui sont connectés à l'infini vers le bas, c'est à dire qui sont sur un chemin infini vers le bas. Ces points constituent un processus ponctuel sur  $\mathbb{Z}$  dont la loi  $\nu$  est invariante par le processus de contact. En effet, si on note  $\xi_t^\nu$  le processus de contact ayant comme configuration initiale le processus ponctuel des points connectés à l'infini vers le bas, par

construction les points de  $\xi_t^v$  sont les points de  $(Z \times \{t\})$  connectés à l'infini vers le bas, donc la loi de  $\xi_t^v$  est  $\nu$ .

Proposition 1 : Si  $f$  appartient à  $\mathcal{D}(E)$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} Ef(\xi_t^Z) = \nu(f)$ .

Démonstration :  $\xi_t^Z$  a même loi que l'ensemble des points de  $Z \times \{0\}$  connectés à  $Z \times \{-t\}$ . Si  $t$  tend vers  $+\infty$ , la loi de ce processus ponctuel tend vers la loi  $\nu$ .  $\square$

On a identifié deux mesures invariantes  $\nu$  et  $\delta_\emptyset$ . Elles peuvent être égales si  $\lambda$  est assez grand. Les propriétés de croissance du modèle donnent :

Proposition 2 : Il existe une valeur  $\lambda^*$  telle que

$$\text{si } \lambda > \lambda^* \quad \nu = \delta_\emptyset$$

$$\text{si } \lambda < \lambda^* \quad \nu \neq \delta_\emptyset .$$

Cette valeur  $\lambda^*$  est le seuil de percolation du schéma percolatif utilisé.

On a trouvé des bornes inférieures et supérieures pour  $\lambda^*$  (cf [G] page 35).

Si  $\lambda > \lambda^*$  la proposition suivante montre qu'il n'y a qu'une seule mesure invariante  $\delta_\emptyset$  et que le système de particules s'étend :

Proposition 3 : Si  $\lambda > \lambda^*$  et si  $f$  est une fonction croissante ou décroissante de  $\mathcal{D}(E)$ , pour toute loi initiale  $\mu$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Ef(\xi_t^H) = f(\emptyset).$$

Démonstration : La propriété de croissance montre que

$$Ef(\xi_t^Z) \geq Ef(\xi_t^H) \geq f(\emptyset) \text{ si } f \text{ est croissante}$$

d'où la propriété à la limite.  $\square$

### III Décomposition ergodique à haute concentration

Si  $\lambda < \lambda^*$ ,  $\nu$  est différent de  $\delta_\emptyset$  ; le système ne s'éteint pas nécessairement. Nous allons alors montrer que  $\nu$  et  $\delta_\emptyset$  sont les deux seules mesures invariantes extrémales.

Pour cela nous commençons par montrer que lorsque  $\xi_t^\eta$  ne s'éteint pas, il s'étend dans tout l'espace. Plus précisément si  $r_t^\eta$  (resp.  $l_t^\eta$ ) est l'extrémité droite de  $\xi_t^\eta$  quand  $\xi_t^\eta$  n'est pas vide (resp. gauche) et si  $\tau^\eta$  est le temps d'extinction de  $\xi_t^\eta$ , nous avons :

Proposition 4 : Si  $\lambda < \lambda^*$   $\lim_{t \rightarrow \infty} r_t^\eta 1_{(\tau^\eta = +\infty)} = +\infty$  p.s.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} l_t^\eta 1_{(\tau^\eta = +\infty)} = -\infty \text{ p.s.}$$

Cette proposition se démontre de deux manières différentes. Durrett dans [D] a démontré par des techniques de sous additivité que si  $(\tau^x = +\infty) \frac{r_t^x}{t} \xrightarrow{\text{p.s.}} \alpha$  et ensuite, en utilisant les propriétés d'additivité que  $\alpha > 0$  si  $\lambda < \lambda^*$ . Dans [C,R] nous utilisons une autre technique qui est basée sur la proposition suivante. Sur  $(\tau^x = \infty)$  nous nous intéressons à  $m_t^x$  l'extrémité droite des points de  $\xi_t^x$  connectés à l'infini vers le haut.

Proposition 5 : Sur  $(\tau^x = \infty)$  muni de la tribu induite et de la probabilité conditionnelle sachant  $(\tau^x = \infty)$ ,  $m_t^x$  est un processus markovien de saut transient.

Démonstration : L'idée de la démonstration de la propriété de Markov est que si  $t > s$ ,  $m_t^x$  est nécessairement sur un chemin issu de  $m_s^x$  donc le couple  $(\xi_t^x, m_t^x)$  est markovien. Ensuite on identifie le générateur de ce couple sur une fonction de  $m_t^x$  seul en remarquant sur le schéma percolatif que l'instant de saut après  $s$  a une loi exponentielle fixe et qu'à un instant de saut la loi de saut ne dépend que de la position de  $m_t^x$  à cet instant de saut. La transience se montre en constatant un déséquilibre vers la droite du fait que l'on regarde l'extrémité droite.  $\square$

Il est alors clair que la proposition 4 est vraie.

Proposition 6 : Si  $\lambda < \lambda^*$  pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{D}(E)$  p.s.

$$[f(\xi_t^\eta) - f(\xi_t^Z)] 1_{(\tau^\eta = +\infty)} = 0 \text{ pour } t \text{ assez grand.}$$

Démonstration : Puisque  $\lambda < \lambda^*$ ,  $P(\tau^X = \infty) > 0$  et p.s. il existe un point  $x$  tel que  $\tau^X = +\infty$ . Sur  $(\tau^\eta = +\infty)$  il existe un point  $y$  de  $\eta$  tel que  $\tau^Y = +\infty$ . Donc sur  $\tau^\eta = +\infty$ , d'après les propositions précédentes l'intervalle  $[\ell_t^Y, r_t^Y] \cap [\ell_t^X, r_t^X]$  tend vers  $Z$  tout entier. Or sur cet intervalle  $\xi_t^Z = \xi_t^\eta$  d'où la proposition.  $\square$

On a alors la décomposition ergodique suivante :

Proposition 6 : Si  $\lambda < \lambda^*$  pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{D}(E)$  et pour toute loi initiale  $\mu$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} E f(\xi_t^\eta) = [\int \mu(d\eta) P(\tau^\eta < \infty)] f(\emptyset) + [\int \mu(d\eta) P(\tau^\eta = +\infty)] \nu(f)$ .

Démonstration : On remarque que

$$E f(\xi_t^\eta) = f(\emptyset) P(\tau^\eta < t) + E(f(\xi_t^\eta) 1_{(\tau^\eta \geq t)}).$$

Le premier terme tend vers  $f(\emptyset) P(\tau^\eta < \infty)$ .

Pour le deuxième terme si  $t$  est assez grand  $f(\xi_t^\eta) = f(\xi_t^Z)$  sur  $(\tau^\eta = \infty)$ .

Donc, modulo un décalage du temps et l'utilisation de la propriété de Markov le deuxième terme tend vers  $f(\tau^\eta = \infty) \lim_{t \rightarrow +\infty} E f(\xi_t^Z) = P(\tau^\eta = \infty) \nu(f)$ .

Le résultat avec toute loi  $\mu$  s'obtient par intégration.  $\square$

Corollaire 7 : Si  $\lambda < \lambda^*$ ,  $\nu$  et  $\delta_\emptyset$  sont les seules mesures invariantes extrémales.

Proposition 8 : Si  $\lambda < \lambda^*$  pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{D}(E) \cap L^1(\nu)$  p.s. sur  $(\tau^\eta = \infty) \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\xi_u^\eta) du = \nu(f)$ .

Démonstration : D'après le théorème de Birkhoff

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\xi_u^\nu) du = \nu(f).$$

Or sur  $(\tau^\eta = \infty)$  si  $t$  est assez grand,  $f(\xi_u^\nu) = f(\xi_u^\eta) = f(\xi_u^Z)$  d'où la proposition.  $\square$

#### IV Processus de naissance et mort avec interaction selon plus proche particule

La technique décrite ci-dessus pour le processus de contact

s'applique sans grand changement à des processus plus généraux, modulo une difficulté expliquée plus loin.

Construisons un nouveau schéma percolatif sur  $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$  de la manière suivante : sur chaque fibre on met un processus ponctuel de Poisson de paramètre  $\lambda$  (les croix sur le schéma) qui arrêteront les lignes de percolation; sur chaque fibre on met un autre processus ponctuel de Poisson de paramètre  $C$ , indépendant du premier, avec des marques  $(a,b)$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^2$  de loi  $m(da, db)$ , ces marques étant indépendantes entre elles et indépendantes du processus ponctuel. Sur le schéma, on trace autour de chaque point du processus ponctuel une flèche à droite de longueur  $a$  et une flèche à gauche de longueur  $b$ . Ce point  $x$  correspondra à la naissance d'une particule si l'intervalle  $[x - b, x + a]$  rencontre une particule vivante.

De la même manière que précédemment on peut alors définir un processus  $\xi_t^\eta$  à valeurs dans  $E$ , markovien dont le générateur s'écrira :

$$Lf(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \{ \lambda 1_{(x \in \eta)} [f(\eta \setminus x) - f(\eta)] + C 1_{(x \notin \eta)} [1 - m([0, r(x, \eta)] \times [0, \ell(x, \eta)])] [f(\eta \cup x) - f(\eta)] \}.$$

où  $r(x, \eta)$  et  $\ell(x, \eta)$  sont les distances de  $x$  au premier point de  $\eta$  à droite et à gauche de  $x$ .

Cela couvre une catégorie assez grande de processus de naissance et mort dont le coefficient de mort est constant et dont le coefficient de naissance ne dépend que des distances aux particules les plus proches à gauche et à droite.

On peut alors refaire tout le travail fait aux paragraphes II et III, à ceci près qu'il y a ici deux seuils de percolation :  $\lambda^*$  seuil de percolation vers le bas et  $\lambda^{**}$  seuil de percolation vers le haut.

On a alors les résultats suivants :

Proposition 9 : Si  $\lambda > \lambda^*$  si  $f$  est une fonction croissante ou décroissante de  $\mathcal{D}(E)$  pour toute loi initiale  $\mu$

$$\lim_{t \uparrow \infty} E f(\xi_t^\mu) = f(\emptyset).$$

Si  $\lambda < \lambda^{**}$  si  $f$  appartient à  $\mathcal{D}(E)$  pour toute loi initiale  $\mu$

$$\lim_{t \uparrow \infty} E f(\xi_t^\mu) = [\int \mu(d\eta) P(\tau^\eta < \infty)] f(\emptyset) + [\int \mu(d\eta) P(\tau^\eta = \infty)] v(f);$$

$v$  et  $\delta_\emptyset$  sont les deux seules mesures invariantes extrémales. Si  $\lambda < \lambda^* \wedge \lambda^{**}$ , pour toute fonction  $f$  de  $\mathcal{D}(E) \cap L^1(v)$ , p.s. sur  $(\tau^\eta = \infty)$

$$\lim_{t \uparrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\xi_u^\eta) du = v(f).$$

Nous n'avons pas d'indication sur les valeurs de  $\lambda^*$  et  $\lambda^{**}$ .

Nous pensons que  $\lambda^{**} = \lambda^*$  mais nous n'avons pas été capables de le démontrer, sauf dans le cas du processus de contact, où c'est évident par symétrie.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [C.R] C. Coccozza et M. Roussignol, "Processus de voisinage sur la droite réelle".
- [D] R. Durrett, "On the growth of one dimensional contact processes".
- [G] D. Griffeath, "Additive and cancellative interacting particle systems", Lecture Notes in Math., 724, Springer.
- [L] T. M. Liggett, "The stochastic evolution of infinite systems of interacting particles", Lecture Notes in Math. 598, Springer, Ecole d'Eté de St. Flour, 1976.