ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

L. GALLARDO

Au sujet du contenu probabiliste d'un lemme d'Henri Poincaré

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 185-190

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_185_0>

AU SUJET DU CONTENU PROBABILISTE D'UN LEMME D'HENRI POINCARE

L. GALLARDO

Université de Nancy I

Dans un article de 1975 (cf [1]), C. Borell utilise de manière cruciale le lemme suivant de H. Poincaré :

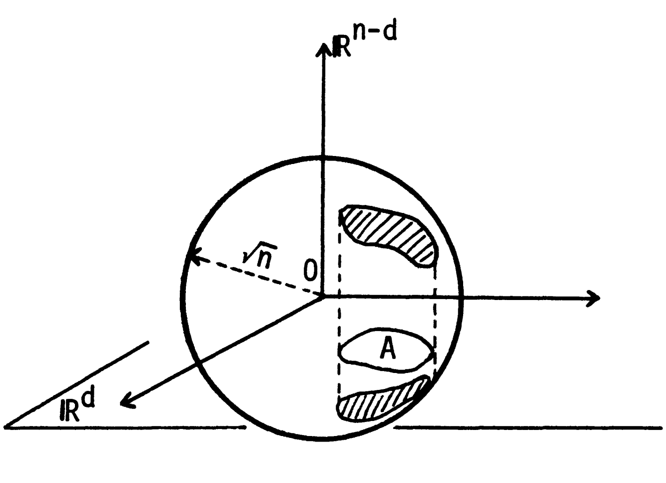
Lemme.-

Soit d un entier $\geqslant 1$ fixé et soit n un entier $> d$. On note π_{n_d} la projection $(x_1,\ldots,x_n) \to (x_1,\ldots,x_d,0,\ldots,0)$ de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\sigma_n^{\sqrt{n}}$ la mesure superficielle (normalisée) de la sphère $S_{\sqrt{n}}^{n-1}$ de centre l'origine et de rayon $\sqrt{n}$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_n^{\sqrt{n}}(\pi_n^{-1}(A) \cap S_{\sqrt{n}}^{n-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_A e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx$$

où $|x|$ désigne la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^d$.

En d'autres termes, l'aire normalisée, hachurée sur la figure ci-dessous, converge vers la mesure gaussienne du borélien A de $\mathbb{R}^d$ quand n tend vers l'infini.



L'importance de ce résultat dans diverses questions avait été révéléepar H.P. Mc Kean (cf [4] et les références s'y trouvant) mais à ma connaissance on ne s'était pas encore jusqu'à présent intéressé à ce lemme pour lui-même. Pourtant l'intervention de la mesure gaussienne est assez inattendue. Ceci nous a incité à penser que ce résultat (démontré de façon purement analytique dans [3]) était de nature probabiliste. Dans ce qui suit nous montrons en effet que le lemme de H. Poincaré est lié à une curieuse propriété asymptotique du temps de sortie d'une boule pour le mouvement brownien.

Théorème.-

Soit $\beta_1(t),\dots,\beta_n(t),\dots$ une suite de mouvements browniens linéaires, indépendants et issus de zéro. Soit $(r_n)_{n>0}$ une suite de nombres positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n^2/n = 1$. Soit τ_n l'instant de sortie de la boule euclidienne de centre 0 et de rayon r_n dans $\mathbb{R}^n$ pour le mouvement brownien $(\beta_1(t),\dots,\beta_n(t))$. Alors τ_n converge en probabilité vers 1 quand n tend vers l'infini.

Démonstration : Notons d'abord, pour justifier les calculs qui vont suivre, que τ_n a des moments de tous les ordres (cf. par exemple [2] page 44).

D'après la formule de Itô on a pour tout $t > 0$:

$$(1) \qquad \beta_1^2(t)+\dots+\beta_n^2(t) = 2M_t+nt,$$

où $M_t = \int_0^t \beta_1 d\beta_1+\dots+\int_0^t \beta_n d\beta_n$ est une martingale. En faisant $t = \tau_n$ dans la relation (1), on a

$$(2) \qquad r_n^2 = 2M_{\tau_n}+n\tau_n$$

et en prenant l'espérance des deux membres de (2), on obtient

$$(3) \qquad E(\tau_n) = \frac{r_n^2}{n} ,$$

puisque $E(M_{\tau_n}) = E(M_0) = 0$. On a ainsi

(4) $$\mathrm{Var}(\tau_n) = E(\tau_n^2) - \frac{r_n^4}{n^2} = 4\,\frac{E(M_{\tau_n}^2)}{n^2} ,$$

d'après la relation (2). Or comme $E(\tau_n) \to 1$ quand $n \to +\infty$, il reste à voir que $\frac{E(M_{\tau_n}^2)}{n^2} \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On a

(5) $$\begin{aligned} M_t^2 &= \left(\int_0^t \beta_1 d\beta_1 + \ldots + \int_0^t \beta_n d\beta_n\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^t \beta_i d\beta_i\right)^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\int_0^t \beta_i d\beta_i\right)\left(\int_0^t \beta_j d\beta_j\right). \end{aligned}$$

La deuxième somme de (5) est une martingale puisque pour $i \neq j$, β_i et β_j sont indépendants. De plus il est facile de voir que pour tout i, $\int_0^t \beta_i^2(s)ds$ est le processus croissant associé à la semi-martingale $\left(\int_0^t \beta_i d\beta_i\right)^2$. Autrement dit, pour tout i,

(6) $$\left(\int_0^t \beta_i d\beta_i\right)^2 - \int_0^t \beta_i^2(s)ds \text{ est une martingale.}$$

Il en résulte que $M_t^2 - \int_0^t (\beta_1^2(s)+\ldots+\beta_n^2(s))ds$ est une martingale d'espérance nulle. Par le théorème d'arrêt de Doob on obtient donc :

(7) $$E(M_{\tau_n}^2) = E\int_0^{\tau_n} (\beta_1^2(s)+\ldots+\beta_n^2(s))ds.$$

A partir de (7) on obtient alors immédiatement la majoration

(8) $$E(M_{\tau_n}^2) \leq r_n^2\, E(\tau_n) = \frac{r_n^4}{n} .$$

Ainsi $\frac{E(M^2_{\tau_n})}{n^2} \leqslant \frac{r_n^4}{n^3} \to 0$ quand $n \to +\infty$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire.-

Soit $d \geqslant 1$ un entier fixé. Sous les hypothèses du théorème, le vecteur aléatoire $(\beta_1(\tau_n),\ldots,\beta_d(\tau_n))$ converge en loi, quand $n \to +\infty$, vers une loi gaussienne centrée de covariance $K = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$.

Démonstration : Il existe une sous suite d'entiers $n_i \to +\infty$, telle que $\tau_{n_i} \to 1$ presque sûrement quand $i \to +\infty$. Par continuité des trajectoires browniennes, on a donc pour tout entier k fixé :

$$\lim_{i\to+\infty} \beta_k(\tau_{n_i}) = \beta_k(1) \quad \text{p.s.}$$

Ainsi $(\beta_1(\tau_{n_i}),\ldots,\beta_d(\tau_{n_i}))$ converge presque sûrement (donc en loi), quand $i \to +\infty$, vers $(\beta_1(1),\ldots,\beta_d(1))$.

Or il est facile de voir que la suite des lois de probabilité de $(\beta_1(\tau_n),\ldots,\beta_d(\tau_n))$ $(n \in \mathbb{N})$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence (pour la convergence étroite) qui n'est autre que la loi de $(\beta_1(1),\ldots,\beta_d(1))$ (pour le voir procéder par extraction de sous suites comme ci-dessus). D'après le théorème de Helly-Bray le corollaire est donc démontré.

Lien avec le lemme de H. Poincaré : D'après la continuité des trajectoires et l'invariance par rotation du mouvement brownien, le point $(\beta_1(\tau_n),\ldots,\beta_n(\tau_n))$ est uniformément distribué sur la sphère $S^{n-1}_{r_n}$. Il en résulte que la mesure $A \mapsto \sigma_n^{r_n}(\pi_n^{-1}(A) \cap S^{n-1}_{r_n})$ n'est autre que la loi de $(\beta_1(\tau_n),\ldots,\beta_d(\tau_n))$ qui converge vers la loi gaussienne centrée réduite quand $n \to +\infty$ d'après le corollaire.

Remarque 1 : Heuristiquement notre théorème dit que si n est très grand, le brownien $(\beta_1(t),\ldots,\beta_n(t))$, issu de zéro, sort à peu près à l'instant 1 de la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$. A cet instant la composante sur $\mathbb{R}^d$ est, bien entendu, normalement distribuée.

Remarque 2 : Par notre corollaire nous obtenons que

$$\lim_{n\to+\infty} P((\beta_1(\tau_n),\ldots,\beta_d(\tau_n)) \in A) = (\frac{1}{2\pi})^{d/2}\int_A e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx$$

pour tout borélien A ayant une frontière de mesure nulle. C'est un tout petit peu moins fort que le résultat du lemme de Poincaré. Cependant, par la méthode utilisée par A. Ehrhard dans [3], il est très facile d'obtenir la densité de probabilité du vecteur $(\beta_1(\tau_n),\ldots,\beta_d(\tau_n))$; c'est (avec $r_n = \sqrt{n}$) la fonction à support compact suivante :

$$f_n(x_1,\ldots,x_d) = 1_{\{x_1^2+..+x_d^2\leqslant n\}}\cdot \frac{1}{\pi^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-d}{2})} n^{-\frac{d}{2}}\left(1-\frac{x_1^2+..+x_d^2}{n}\right)^{\frac{n-d-1}{2}},$$

et l'on voit immédiatement, compte tenu de l'inégalité classique

$$(1-\frac{\alpha}{n})^n \leqslant e^{-\alpha} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant n,$$

qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n > d$:

$$f_n(x_1,\ldots,x_d) \leqslant C\, e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+\ldots+x_d^2)}.$$

Par le théorème de convergence dominée, on obtient alors le lemme de Poincaré pour tout borélien A.

Bibliographie :

[1] BORELL C., The Brunn - Minkowski Inequality in Gauss Space ; Inventiones math. N° 30 (1975) p. 207-216.

[2] DYNKIN E.B., YUSHKEVICH A.A., Markov Processes ; Plenum Press, New-York (1969).

[3] EHRHARD A., L'inégalité de Borell ; Exposé à l'école d'été de Calcul des Probabilités de Saint-Flour 1980 (à paraître aux Annales Scientifiques de l'Université de Clermont).

[4] MC KEAN H.P., Geometry of Differential Space ; Annals of Proba. Vol. 1 (1973) p. 197-206.

UER Sciences Mathématiques
ERA N° 839 du CNRS
Université de Nancy I, C.O. 140
54037 - NANCY CEDEX