ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

C. STRICKER

Semimartingales sur les ouverts aléatoires

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 161-164

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_161_0>

SEMIMARTINGALES SUR LES OUVERTS ALEATOIRES

C. STRICKER

Université de Strasbourg

Cet exposé énonce, sans démonstrations, les résultats d'un article à paraître en hommage à L. Schwartz et écrit en collaboration avec P.A. Meyer. Il sera publié dans Advances in Mathematics.

Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace probabilisé, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ qui satisfait aux conditions habituelles. Nos processus seront indexés par $\mathbb{R}_+$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$; dans le second cas, le mot semimartingale signifiera semimartingale jusqu'à l'infini. Nous appelons <u>ouvert aléatoire</u> un ensemble aléatoire (non nécessairement optionnel) dont les coupes sont ouvertes dans $\mathbb{R}_+$ ou $\overline{\mathbb{R}}_+$ suivant le cas. Nous identifions les ensembles indistinguables, comme toujours.

On dit qu'un processus optionnel X est une <u>semimartingale sur un ouvert aléatoire</u> A s'il existe une semimartingale Y telle que $Y = X$ sur A. Nous dirons que X est <u>localement une semimartingale</u> sur un ensemble aléatoire B s'il existe des ouverts aléatoires A_n tels que $B \subset \bigcup_n A_n$ (aux ensembles évanescents près) et que X soit une semimartingale sur chacun des A_n. Nous renvoyons à la fin de cette note pour une discussion de ces notions, empruntées au travail [1] de Schartz à une nuance près.

Lorsqu'on travaille sur $\overline{\mathbb{R}}_+$, qui est compact, l'un des plus jolis résultats du début de [1] s'énonce ainsi, avec le vocabulaire précédent : si X est localement une semimartingale sur $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega$ tout entier, alors X est une semimartingale. Nous étendons ce résultat aux fermés optionnels dans la proposition suivante grâce à une remarque de E. Lenglart.

PROPOSITION 1. *Si X est une semimartingale sur un fermé optionnel K, alors il existe une semimartingale Y telle que $Y = X$ dans un voisinage optionnel de K pour la topologie droite.*

Nous étudions ensuite les semimartingales dans des ouverts particuliers

SEMIMARTINGALES DANS $[0,T[$.

T désigne ici un temps d'arrêt et X^T le processus X arrêté à l'instant T.

PROPOSITION 2. *Si X est une semimartingale dans $[0,T[$, alors il existe une suite croissante (S_n) de temps d'arrêt, tendant p.s. vers T, telle que pour tout n, le processus X^{S_n} soit une semimartingale.*

COROLLAIRE. *Soient A un ouvert optionnel et X une semimartingale sur A. Alors il existe une suite croissante de compacts prévisibles (K_n) et des semimartingales X^n telles que :*

i) $X = X^n$ sur K_n,

ii) $A \subset \bigcup_n K_n$ et $A \cap K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ ($\overset{\circ}{K}_n$ *désigne l'intérieur de* K_n).

De plus, si X est continu dans A, on peut choisir les X^n continus dans un voisinage de K_n.

SEMIMARTINGALES SUR $]0,+\infty[$.

D'après la proposition 1, si X est une semimartingale sur $]0,+\infty[$ il existe pour tout n une semimartingale X^n telle que $X = X^n$ sur $[1/n,+\infty[$.

PROPOSITION 3. *Pour que $X 1_{]0,+\infty[}$ soit la restriction à $]0,+\infty[$ d'une semimartingale, il faut et il suffit que pour tout ensemble prévisible A, l'intégrale stochastique $\int_{1/n}^{1} 1_A \, dX$ converge en probabilités vers une variable aléatoire finie lorsque n tend vers $+\infty$.*

Récemment E. Lenglart s'est intéressé à la caractérisation des semimartingales jusqu'à l'infini. Voici une amélioration de son résultat :

PROPOSITION 4. <u>Les propositions suivantes sont équivalentes</u> :

1) X <u>est une semimartingale jusqu'à l'infini</u>.

2) <u>Il existe une loi</u> Q <u>équivalente à</u> P <u>telle que</u> X <u>soit une</u> $\mathcal{H}^p$-<u>semimartingale pour tout entier</u> $p \geq 1$ <u>et pour la loi</u> Q .

3) <u>Pour tout ensemble prévisible</u> A , $(1_A \cdot X_n)$ <u>converge en probabilité pour</u> n <u>tendant vers</u> $+\infty$.

UN EXEMPLE :

Nous supposons que B est un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ mouvement brownien et nous désignons par L le temps local en 0 . Soit $\mathcal{H}_t = \bigcap_{s>t} (\mathcal{F}_s \vee \sigma(L_v, v \in \mathbb{R}^+))$. Grâce à un résultat de Jeulin, nous démontrons que B est une semimartingale sur l'ouvert $(B \neq 0)$ et que cet ouvert est maximal pour la filtration grossie $\mathcal{H}$.

REPRESENTATION DES SEMIMARTINGALES.

La proposition suivante donne une caractérisation des semimartingales sur un ouvert optionnel.

PROPOSITION 5. <u>Soit</u> X <u>une semimartingale sur un ouvert optionnel</u> A . <u>Il existe alors un processus prévisible</u> H <u>et une semimartingale</u> Y <u>tels que</u> :

i) <u>Si</u> T <u>est un temps d'arrêt et si</u> $D_T = \inf\{t \geq T , t \notin A\}$ <u>alors il existe une suite croissante de temps d'arrêt</u> (S^n) <u>tendant vers</u> D_T <u>telle que</u> $H\, 1_{]T,S^n]} \in L(Y)$, $X^{S^n} 1_{[T,+\infty[}$ <u>est une semimartingale et</u>

$$1_{]T,S^n]} dX = H\, 1_{]T,S^n]} dY$$

ii) Si $[U,V]$ est un intervalle stochastique contenu dans A , le processus prévisible $H\, 1_{]U,V]} \in L(Y)$ et $X_V - X_U = \int_U^V H\, dY$.

PROPOSITION 6. <u>Soit</u> X <u>un processus optionnel localement constant dans un ouvert</u> A . <u>Il existe alors un ouvert optionnel</u> $A' \supset A$ <u>tel que</u> X <u>soit une semimartingale dans</u> A' .

MESURES SEMIMARTINGALES DANS UN OUVERT PREVISIBLE.

Soient (A_n) une suite d'ouverts prévisibles et (X^n) des semimartingales telles que pour tout couple (n,m) la semimartingale $X^n - X^m$ soit localement constante dans $A^n \cap A^m$.

PROPOSITION 7. Il existe une semimartingale Y et un processus prévisible $H > 0$ sur $A = \bigcup A_n$ tels que pour tout compact prévisible $K \subset A$ $H\, 1_K \in L(Y)$ et $1_{K \cap A_n} H\, d\, Y = 1_{K \cap A_n} H\, d\, Y = 1_{K \cap A_n} d\, X^n$ pour tout n.

R E F E R E N C E S

[1] L. SCHWARTZ : Semimartingales sur des variétés et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes. A paraître.

[2] M. EMERY : Un théorème de Vitali - Hahn - Saks pour les semi-martingales. A paraître dans Z.W.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 1
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cédex