G. MAZZIOTTO
J. SZPIRGLAS

Filtrage de diffusions bidirectionnelles pour une observation ponctuelle de Poisson à deux paramètres

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 69, série *Mathématiques*, n° 19 (1981), p. 125-139

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1981__69_19_125_0>

FILTRAGE DE DIFFUSIONS BIDIRECTIONNELLES POUR UNE OBSERVATION PONCTUELLE DE POISSON A DEUX PARAMETRES

G. MAZZIOTTO ET J. SZPIRGLAS

CNET, 196 rue de Paris, 92220 BAGNEUX

Résumé : Une répartition de données ponctuelles sur un rectangle D de $\mathbb{R}_+^2$ est représentée par une mesure aléatoire de Poisson Y. On suppose que son intensité est une fonction connue d'une diffusion bidirectionnelle X à deux paramètres. Comme dans le cas à un paramètre, le modèle est identifié grâce à une estimation récursive du signal X. On donne relativement à une relation d'ordre partielle choisie sur $\mathbb{R}^2$ l'expression des trois équations du filtrage, horizontale, verticale et diagonale, correspondant à trois types d'exploration de D. Ces équations sont obtenues par la méthode de la probabilité de référence.

I - INTRODUCTION.

On décrit une distribution spatiale observée sur un rectangle D de $\mathbb{R}^2$ par une mesure aléatoire ponctuelle sur D : $Y(\omega;dz) = \sum_{\mathbb{N}} \varepsilon_{y_i(\omega)}(dz)$ où $\varepsilon_y(dz)$ est la mesure de Dirac de $\mathbb{R}^2$ qui charge le point y. On suppose que l'intensité de Y est une fonction instantanée, positive et bornée d'un processus à deux paramètres X. C'est-à-dire que, conditionnellement à une trajectoire X^0 de X, Y est une mesure aléatoire ponctuelle de Poisson sur D (cf COX et LEWIS [6]), caractérisée par la propriété suivante (NEVEU [16]) : "Pour toute suite finie $(A_1,\ldots,A_n)$ de boréliens de D, deux à deux disjoints, les v.a. $Y(A_i)$ $i = 1\ldots n$ sont indépendantes, de Poisson, de paramètre $\tilde{\Lambda}(A_i) = \int_{A_i} H(X_z^0)dz$ ". La dynamique du processus d'état X sera précisée plus loin comme solution d'équations différentielles stochastiques.

Ce modèle a été utilisé pour décrire des hétérogénéités de surface sur un matériau (BARTLETT [1]). La mesure aléatoire Y représente, par exemple, une manifestation ponctuelle de quelque défaut de structure. Dans ce cas, le processus X_z mesure la plus ou moins grande propension de ce matériau à porter un défaut au point z. Comme dans le cas à un paramètre pour des données temporelles (SNYDER [18]), la répartition observée de Y est identifiée par l'estimation $\hat{X}$ de X, sachant Y. Dans l'exemple précédent, $\hat{X}$ peut souligner une fracture dans le désordre apparent des points observés.

Dans ce papier, l'attention est portée sur les estimations $\hat{X}$ de X qui peuvent être calculées de façon récursive au cours de l'exploration du domaine D. Plus précisément $\hat{X}$ est cherché comme solution d'équations différentielles stochastiques dépendant de Y. Il est évident que l'utilisation de toute l'observation Y sur D aurait donné une estimation $\hat{X}$ de X plus précise, mais en même temps aurait nécessité dans la pratique plus de calculs et un stockage plus important d'informations.

Dans ce qui suit, on définit une relation d'ordre partielle sur $\mathbb{R}^2$: $(s,t) \leqslant (s',t')$ si $s \leqslant s'$ et $t \leqslant t'$. On suppose que D est le rectangle : $\{(s,t)\in\mathbb{R}^2/0\leqslant s\leqslant s_0,\ 0\leqslant t\leqslant t_0\}$ pour $z_o = (s_0,t_0)$ fixé. Un tel choix est fondamental car il privilégie les deux directions des axes de D. Il est alors possible d'envisager différents modes d'exploration de D pour y compter les points de Y. On étudie plus particulièrement les balayages horizontal, vertical et diagonal du rectangle D. Les notions de "temps", "causalité" et "récursivité" qui en découlent sont définies comme dans (WONG [21], WONG et TSUI [22]) et illustrées par les figures 1, 2 et 3. A un point z = (s,t) de D est associé son passé strict : $A^o_{st} = \{(s',t') : s'<s,\ t'<t\}$ (resp. passé horizontal : $A^1_s = A^0_{st_o}$, passé vertical : $A^2_t = A^0_{s_o t}$). Le complémentaire de chacun de ces domaines est appelé le "futur" après z et leur frontière, axes exclus, ∂A^i, le "présent" à l'instant z. A chaque passé est associé une estimation causale de X par : $\hat{X}^i_{st} = E(X_{st}/Y_{uv};uv\ \varepsilon A^i_{st})$ pour i = 0,1,2. Le filtrage est dit "récursif" [21] , si pour (s',t') > (s,t), le calcul de $\hat{X}^i$ sur $\partial A^i_{s't'}$ ne nécessite que la connaissance de $\hat{X}^i$ sur ∂A^i_{st} et et les observations Y entre ∂A^i_{st} et $\partial A^i_{s't'}$. Comme dans toute la théorie du filtrage non linéaire, les équations obtenues sont seulement "pseudo-récursives", car le filtre est généralement de dimension infinie. Ce problème technique se résoud souvent dans le cas à un paramètre par des approximations, sujet qui ne sera pas abordé ici.

Ce travail est une application d'une étude générale sur le calcul stochastique et le filtrage pour des semi-martingales d'un processus de Poisson (MAZZIOTTO et SZPIRGLAS [13]). Le modèle est construit à partir de la méthode de la probabilité de référence (ZAKAI [29]) dont les applications au filtrage sont maintenant bien connues. (Par exemple : BOEL, VARAYA et WONG [2], BREMAUD et YOR [4], GERTNER [8], SZPIRGLAS et MAZZIOTTO [19]). Dans le cas à deux paramètres, les équations du filtrage non linéaire ont été obtenues pour le modèle classique continu par (WONG [20], KOREZLIOGLU, MAZZIOTTO et SZPIRGLAS [11]).

II - MODELE MATHEMATIQUE.

L'idée de la méthode de la probabilité de référence est de définir le processus d'observation Y et le signal X sur un espace de probabilité où leur loi jointe est très simple. La dynamique physique du système est alors obtenue par un changement de probabilité équivalente.

1° - Préliminaires.

Tous les processus considérés dans ce papier sont indexés sur le rectangle D de $\mathbb{R}^2$ muni de la relation d'ordre partielle définie précédemment. On utilise le calcul stochastique développé par WONG et ZAKAI [23 à 28], CAIROLI et WALSH [5] pour le mouvement Brownien à deux paramètres, et par MAZZIOTTO et SZPIRGLAS [13] pour la mesure de Poisson sur le plan. Pour les définitions et propriétés des intégrales stochastiques du mouvement Brownien à deux paramètres, on peut voir par exemple [5], [23]. Dans le cas des mesures aléatoires étudiées ici, toutes les intégrales sont des intégrales de Stieljes. Si par exemple H est un processus mesurable borné on définit l'intégrale :

$$(H.Y)_z = \int_{A_z^0} H_{st} \, Y(ds,dt) = \sum_i H_{y_i} I(y_i \leq z)$$

où les points y^i portent la masse de Y et I(A) est la fonction indicatrice de l'ensemble A. Dans [13], cette définition est étendue à une classe plus large de processus et sera ainsi implicitement utilisée dans la suite.

Un processus X est dit continu à droite et pourvu de limites à gauche (c.à d.-l.à g.) si et seulement si, pour toute suite (s_n, t_n) décroissante vers (s,t), telle que $(s_n \geq s, t_n \geq t)$, $X_{s_n t_n}$ converge vers X_{st}, et pour toute suite (s_n, t_n) croissante vers (s,t) telle que $(s_n < s, t_n < t)$, $X_{s_n t_n}$ converge vers une limite notée X_{st}^-.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$, on appelle filtration, une famille $\underline{\underline{F}}$ de sous-tribus de $\underline{\underline{A}}$ qui vérifie les propriétés usuelles F_1 à F_4 :

F_1 : Si $z<z'$ $\underline{\underline{F}}_z \subset \underline{\underline{F}}_{z'}$

F_2 : $\underline{\underline{F}}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables

F_3 : Pour tout z $\underline{\underline{F}}_z = \bigcap_{\substack{z' \geq z \\ z' \neq z}} \underline{\underline{F}}_{z'}$,

F_4 : Pour tout $z = (s,t)$, $\underline{\underline{F}}_{st_o}$ et $\underline{\underline{F}}_{s_o t}$ sont conditionnellement indépendantes sachant $\underline{\underline{F}}_{st}$.

Un Processus X est dit $\underline{\underline{F}}$-mesurable (resp. $\underline{\underline{F}}$-adapté), si, en tant que fonction sur $\Omega x D$, il est $\underline{\underline{F}}_{z_o} \otimes \underline{\underline{D}}$-mesurable avec $\underline{\underline{D}}$ la tribu borélienne de D (resp. il est $\underline{\underline{F}}$-mesurable et pour tout z de D, X_z est une v.a. $\underline{\underline{F}}_z$-mesurable).

2° - Construction du modèle.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$, on considère un mouvement Brownien B et une mesure aléatoire de Poisson Y, indexés sur D, d'intensité Λ, la mesure de Lebesgue sur D, mutuellement indépendants. A toute mesure aléatoire M sur D on peut associer un processus $M = (M_z z\varepsilon D)$ en posant $M_z = M(A_z^o)$. On note $\underline{\underline{F}}$ (resp. $\underline{\underline{G}}$) la filtration naturelle de (Y, B) (resp. Y) complétée par les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\underline{\underline{A}}$. Il est facile de vérifier [13] que ces filtrations possèdent les propriétés F_1 à F_4 sans lesquelles le calcul stochastique associé n'a pas encore été défini.

On obtient les équations du filtrage dans [13] en supposant uniquement que le processus signal X est une semi-martingale du mouvement Brownien B au sens de WONG et ZAKAI [28].

$$(1)\quad X_z = X_o + \int_{A_z^o} \{\theta_y dy + \phi_y B(dy)\} + \int_{A_z^o x A_z^o} \{f_{x,y} dx B(dy) + g_{x,y} B(dx) dy + \psi_{x,y} B(dx) B(dy)\}$$

où les processus θ, ϕ, f, g, ψ sont tels que les intégrales sont bien définies (voir [28]).

Cependant, comme dans le cas à un indice, il paraît utile de particulariser la forme du signal. On suppose donc que celui-ci est donné comme solution d'un système d'équations différentielles stochastiques dont l'étude fera l'objet d'un futur papier. Plus précisément, on dit que X est une diffusion bidirectionnelle s'il est défini de façon unique par le système :

$$(2)\quad X_{st} = X_o + \int_o^t h(u,t;X_{ut}) du + \int_o^s \int_o^t g^h(u,t;X_{ut}) G_{uv} B(du\, dv)$$

$$(3)\quad X_{st} = X_o + \int_o^t k(s,v;X_{sv})\,dv + \int_o^t\int_o^s g^k(s,v;X_{sv})G_{uv}B(du\,dv)$$

$$(4)\quad X_{st} = X_o + \int_{A_z^o}\{\theta(uv;X_{uv})\,du\,dv + \phi\,(uv;X_{uv})B(du\,dv)\}$$
$$+ \int_{A_z^o \times A_z^o}\{f(ab,uv;X_{ub})\,da\,db\,B(du\,dv) + g(ab,uv;X_{ub})\,du\,dv B(da\,db)$$
$$+ \psi(ab,uv;X_{ub})B(da\,db)B(du\,dv)\}$$

où G_{st} est une fonction certaine telle que $\int_D G_{st}^2\,ds\,dt < \infty$.

Il est bien évident que trois équations pour définir un seul processus, impliquent des liaisons très fortes entre les différents paramètres. Un exemple de tels processus est donné par les processus Gaussiens Markoviens suivant ([10], LEFORT [12]):

$$(5)\quad X_z = \gamma(z)\int_{A_z^o}\gamma^{-1}(x)G(x)B(dx)$$

où γ est une fonction déterministe continûment différentiable et strictement positive et G est définie comme précédemment. A partir de ces exemples, il est possible d'utiliser différents concepts de propriétés Markoviennes (NUALART et SANZ [17], KOREZLIOGLU [10]) avec des interprétations physiques intéressantes. En particulier, on peut montrer que la solution unique de (3), (4), (5) est un processus de diffusion sur tout chemin croissant de D.

De manière à décrire l'évolution du système physique, on munit l'espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$ d'une autre probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, sous laquelle les processus X et Y ont les distributions désirées. On utilise pour ce faire le théorème de changement de probabilité suivant :

Théorème 1. Soit H une fonction réelle continue bornée telle que $H \geq \alpha > 0$ pour α donné. Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$. On considère le processus L défini par :

$$(6)\quad L_z = \exp\left[\int_{A_z^o}\{\mathrm{Log}[H(X_y)]Y(dy) - (H(X_y)-1)\Lambda(dy)\}\right]$$

Alors :

a) L est une martingale strictement positive de toutes puissances p, $1<p<\infty$, intégrables. On en déduit que la formule :

$$(7)\quad \mathbb{Q}(A) = E_{\mathbb{P}}(L_z;A)\quad \forall A\in \underline{\underline{F}}_z \quad \forall z\in D$$

définit une probabilité $\mathbb{Q}$ equivalente à $\mathbb{P}$ sur $\underline{\underline{A}}$.

b) Sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le processus B reste un mouvement Brownien et X a la même loi sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$.
c) Sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le processus Y est un processus de Poisson mélangé d'intensité $\tilde{\Lambda}$ défini par :

(8) $\tilde{\Lambda}(U) = \int_U H(X_z)\Lambda(dz) \quad \forall U \in \underline{\underline{D}}$

La démonstration est analogue à celle donnée dans [26] pour le mouvement Brownien.

Ce théorème montre que les processus X et Y définis sur l'espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{Q})$ représentent bien le modèle décrit dans l'introduction.

III - LES EQUATIONS DU FILTRAGE.

Un des avantages de la méthode de la probabilité de référence est de permettre un calcul facile des équations du filtrage. L'application de cette méthode ne suppose qu'un théorème de changement de probabilité, une formule de Ito et une hypothèse générale sur l'espace de probabilité (voir BREMAUD et YOR [4], GERTNER [8], SZPIRGLAS et MAZZIOTTO [19] pour des exemples dans le cas à un paramètre, WONG [20], KOREZLIOGLU, MAZZIOTTO et SZPIRGLAS [11] dans le cas à deux paramètres).

Avant de poursuivre il est nécessaire de donner une définition plus précise des estimations $\hat{X}$ de X.

1° - Projections d'un processus sur une filtration.

Etant donné un processus X, $\underline{\underline{F}}$-mesurable et intégrable sur l'espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{Q})$, on veut définir un processus $\hat{X}$, $\underline{\underline{G}}$-mesurable qui est une bonne version de l'espérance conditionnelle $\hat{X}_z = E_{\mathbb{Q}}(X_z/\underline{\underline{G}}_z)$. On remarque, par définition de la probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$ que :

$$\hat{X}_z = E_{\mathbb{P}}(L_{z_0} X_z/\underline{\underline{G}}_z)E_{\mathbb{P}}(L_z/\underline{\underline{G}}_z)^{-1}.$$

De plus, une structure particulière de l'espace de probabilité $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$ va permettre d'exprimer ces différentes espérances conditionnelles au moyen d'un noyau très simple.

Dorénavant, on suppose que l'espace $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$ est construit comme un produit tensoriel des espaces canoniques associés à B et Y, c'est-à-dire :

$$\Omega = \Omega^B x \Omega^Y, \ \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^B \otimes \underline{\underline{A}}^Y, \ \mathbb{P}(d\omega^B, d\omega^Y) = \mathbb{P}^B(d\omega^B) \otimes \mathbb{P}^Y(d\omega^Y)$$

On identifie G_{z_0} et A^Y. Soit K le noyau de $(\Omega, \underline{\underline{G}}_{z_0}, \mathbb{P})$ dans $(\Omega, \underline{\underline{F}}_{z_0}, \mathbb{P})$ défini par :

$$K(\omega' ; d\omega^B, d\omega^Y) = \mathbb{P}^B(d\omega^B) \otimes \varepsilon_{\omega'}(d\omega^Y)$$

avec $\varepsilon_{\omega'}$ la mesure de Dirac en ω'.

Si U est une v.a. $\underline{\underline{F}}_{z_0}$-mesurable,

$$K(U)(\omega^Y) = \int_{\Omega^B} U(\omega^B, \omega^Y) \, \mathbb{P}^B(d\omega^B).$$

<u>*Théorème 2*</u>. *Soit U une v.a. $\underline{\underline{F}}_{z_0}$-mesurable intégrable sur $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$. Alors :*

a) $E_{\mathbb{P}}(U/\underline{\underline{G}}_{z_0}) = K(U)$ $\mathbb{P}$-p.s.

b) Si U est $\underline{\underline{F}}_z$-mesurable, $K(U)$ est $\underline{\underline{G}}_z$-mesurable.

La démonstration est une conséquence directe du théorème de Fubini sur $(\Omega, \underline{\underline{A}}, \mathbb{P})$.

Le résultat suivant montre que l'opérateur K de $\underline{\underline{G}}$-projection préserve la régularité des processus. Pour $p \geq 1$ on définit $H^p(\mathbb{P})$ comme l'espace des processus séparables X $\underline{\underline{F}}$-mesurables tels que : $E_{\mathbb{P}}(\sup_D |X_z|^p) < \infty$.

<u>*Théorème 3*</u>. *Si X est un processus $\underline{\underline{F}}$-mesurable de $H^1(\mathbb{P})$ (resp. c.à d.-l.à g.), $K(X)$ est un processus $\underline{\underline{G}}$-mesurable de $H^1(\mathbb{P})$ (resp. c.à d. l.à g.. On a de plus $K(X)_- = K(X_-)$).*

<u>Démonstration</u> : Grâce au théorème de Fubini, il existe un ensemble Ω'^Y, tel que $\mathbb{P}^Y(\Omega'^Y) = 1$, sur lequel $\sup_D |X_z|$ est $\mathbb{P}^B$-intégrable. On en déduit que

$$K(X)_z(\omega^Y) = K(X_z)(\omega^Y) \text{ si } \omega^Y \in \Omega'^Y$$
$$= 0 \qquad \text{sinon}$$

définit un processus $\underline{\underline{G}}$-mesurable de $H^1(\mathbb{P})$.

De même, si X est c.à d. l.à g. et z_n une suite croissante de D vers z, les v.a. X_{z_n}, sur Ω'^Y, sont dominées par $\sup|X_z|$ et convergent p.s. vers X_z^-. Le théorème de Lebesgue entraîne alors que les $K(X_{z_n})$ convergent vers $K(X_z^-) = K(X)_z^-$.

Remarque. Grâce aux inégalités maximales de CAIROLI-DOOB [5], ce théorème s'applique aux martingales L, c.à d.-l.à g. de carré intégrable.

Les estimations $\hat{X}^i$, $i = 0,1,2$, définies dans l'introduction peuvent alors s'exprimer en fonction de la martingale L et de l'opérateur K dans une formule du type"KALLIANPUR-STRIEBEL" [9]. Pour un processus X, $\underline{\underline{F}}$-adapté, intégrable, on définit :

(9) $E_Q(X_{st}/\underline{\underline{G}}_{st}) = \hat{X}^0_{st} = K(L_{st}X_{st})K(L_{st})^{-1}$ noté $\hat{X}(st/st)$

(10) $E_Q(X_{st}/\underline{\underline{G}}_{st_o}) = \hat{X}^1_{st} = K(L_{st_o}X_{st})K(L_{st_o})^{-1}$ noté $\hat{X}(st/st_o)$

(11) $E_Q(X_{st}/\underline{\underline{G}}_{s_ot}) = \hat{X}^2_{st} = K(L_{s_ot}X_{st})K(L_{s_ot})^{-1}$ noté $\hat{X}(st/s_ot)$.

Etant donnés deux processus U et V, $\underline{\underline{F}}$-adaptés et intégrables de produit UV intégrable, la covariance conditionnelle de U,V est définie par :

(12) $\rho_{st}(U_{ab},V_{uv}) = K(L_{st}U_{ab}V_{uv})K(L_{st})^{-1} - K(L_{st}U_{ab})K(L_{st}V_{uv})K(L_{st})^{-2}$

où (a,b) et (u,v) sont dans A^o_{st}. On utilisera souvent :

(13) $R_{st}(U_{ab},V_{uv}) = \rho_{st}(U_{ab},V_{uv})V^{-1}(uv/st)$.

Les équations du filtrage sont obtenues en exprimant les processus LX et L sous forme intégrale, puis leur projection par l'opérateur K et enfin en utilisant les formules (9), (10) et (11). On a donc besoin d'un résultat de projection d'intégrales stochastiques analogue à celui de BREMAUD et YOR [4].

Théorème 4. Soient Y et B les processus déjà définis sur l'espace $(\Omega, A, \mathbb{P})$.

a) Pour un processus ϕ, $\underline{\underline{F}}$-mesurable tel que $E(|\phi|.Y)_{z_0} < \infty$, on a : $K(\phi.Y) = K(\phi).Y$.

b) Pour un processus ϕ, $\underline{\underline{F}}$-mesurable tel que l'intégrale $\phi.B$ soit une martingale, $K(\phi.B) = 0$.

Démonstration : a) se déduit par application du théorème de Fubini à la mesure $\mu(dz,d\omega^B, d\omega^Y) = Y(\omega^Y,dz)\mathbb{P}^Y(d\omega^Y)\mathbb{P}^B(d\omega^B)$;

b) est démontré dans [13] pour des fonctions élémentaires et par densité pour des martingales de carré intégrable. Le résultat est finalement obtenu par un passage à la limite.

2° - Les équations latérales du filtrage.

La distribution Y est observée par une exploration horizontale (resp. verticale) du rectangle D. Les notions associées de temps, causalité et récursivité [21] sont représentées dans la figure 1 (resp. figure 2). Comme dans [21], [10], [11], on peut remarquer que les formules obtenues sont en fait des formules de filtrage à un paramètre. Ici, Y évolue comme un processus ponctuel marqué, dont les équations associées du filtrage sont bien connues (BREMAUD [3]).

Pour plus de simplicité, on introduit les notations suivantes : si μ est une mesure donnée et $U_{st} = \int_{A^o_{st}} \alpha_{uv}\mu(du,dv)$

$$d_sU_{st} = \int_o^t \alpha_{sv}\mu(ds,dv), d_tU_{st} = \int_o^s \alpha_{ut}\mu(du,dt), d_sd_tU_{st} = \alpha_{st}\mu(ds,dt)$$

Théorème 5. Les équations horizontales du filtrage.

Soit X un processus de $H^2(Q)$ défini par la formule (2). Alors le processus $\hat{X}^1$ est solution de l'équation :

(14) $d_s\hat{X}(st/st_o) = h(s,t;X_{st}/st_o)ds + \int_o^{t_o} R^-_{st_o}(X_{st},H_{s\beta})\nu^1_{st_o}(ds,d\beta)$

avec la mesure d'innovation horizontale ν^1 définie par :

(15) $\nu^1_{st_o}(ds,d\beta) = Y(ds,d\beta) - \hat{H}(s\beta/st_o)\Lambda(ds,d\beta)$

H_{st} désigne la fonction $H(X_{st})$ et $R^-_{st_o}$ la limite à gauche en s de R_{st_o}.

Démonstration : La probabilité de référence est utilisée explicitement en exprimant :

$\hat{X}^1_{st} = K(L_{st_o}X_{st})K(L_{st_o})^{-1}$. On écrit, grâce à la formule de Ito, les processus $L_{st_o}X_{st}$ et L_{st_o} sous forme d'intégrales stochastiques relativement à Y et B. Le théorème 4 donne les projections de chacun des termes et la formule de Ito appliquée enfin au rapport définissant $\hat{X}^1$ montre (14).

Cette équation montre que tout calcul récursif de $\hat{X}^i$ fait intervenir le vecteur $\underline{\underline{X}}$ indexé sur $[o,s_o]$, à valeurs dans l'espace des fonctions c.àd. l.à g. sur $[o,t_o]$, définie par $\underline{\underline{X}}_s = X_{st}, t \in [o,t_o]$. Ceci confirme le point de vue de WONG [21] et KOREZLIOGLU [10]. Dans ce dernier papier, l'équation du filtrage linéaire pour un processus à deux paramètres était obtenue en utilisant les résultats sur le filtrage linéaire des processus à valeurs dans un espace de Hilbert. L'équation verticale du filtrage est analogue.

3° - Les équations diagonales du filtrage.

On suppose maintenant que D est exploré suivant les deux directions à la fois comme il est montré dans la figure 3. On obtient par une démonstration analogue à celle du théorème 5, l'équation que vérifie le processus $\hat{X}^{o}_{st}$. Cette équation générale que l'on peut trouver dans [13] est assez lourde. Cependant, sous les hypothèses de ce papier, ou si plus généralement le processus H_{st} est aussi une semi-martingale du mouvement Brownien B, l'équation se simplifie, faisant intervenir les mesures d'innovation et celles engendrées par les covariances conditionnelles. Plus précisément :

Théorème 6. Le processus $R_{st}(X_{st},H_{s't})$ est une 1-semi-martingale et vérifie l'équation (16) :

$$(16)\quad d_s R_{st}(X_{st},H_{s't}) = \{R^-_{st}(h(s,t;X_{st}),H_{s't}) + \int_0^t R^-_{st}(H_{sv};H_{s't})(R^-_{st}(X_{st},H_{s't})-R^-_{st}(X_{st};H_{s't}H_{sv}))dv\}ds$$

$$+\int_0^t [R^-_{st}(X_{st};H_{sv}H_{s't})-R^-_{st}(X_{st};H_{sv})-R^-_{st}(X_{st};H_{s't})]\nu^1_{st}(ds,dv).$$

La démonstration repose sur l'application du théorème 5 aux processus $X_{st}H_{s't}$, X_{st} et $H_{s't}$.

On a alors le résultat fondamental :

Théorème 7. L'équation diagonale du filtrage.

Soit X un processus de $H^2(Q)$ défini par les formules (2), (3) et (4). Alors le processus $\hat{X}^{o}_{st}$ satisfait l'équation suivante :

$$(17)\quad d_s d_t \hat{X}(st/st) = \hat{\Theta}(st/st)dsdt + R^-_{st}(X_{st},H_{st})\nu^0_{st}(ds,dt)$$

$$+\int_0^s d_s R^-_{st}(X_{st};H_{ut})\nu^2_{st}(du,dt) + \int_0^t d_t R^-_{st}(X_{st};H_{sv})\nu^1_{st}(ds,dv)$$

$$+\int_0^s\int_0^t \{R^-_{st}(X_{st};H_{sv}) + R^-_{st}(X_{st};H_{ut}) - R^-_{st}(X_{st};H_{sv}H_{ut})\}$$

$$\{\nu^1_{st}(ds,dv)\nu^2_{st}(du,dt) + \rho^-_{st}(H_{ut},H_{sv})dudvdsdt\}$$

avec les innovations respectivement, diagonale, horizontale et verticale, définies par :

(18) $\quad \nu^0_{st}(ds,dt) = Y(ds,dt) - \hat{H}(st/st)\Lambda(ds,dt)$

(19) $\quad \nu^1_{st}(ds,dv) = Y(ds,dv) - \hat{H}(sv/st)\Lambda(ds,dv)$

(20) $\quad \nu^2_{st}(du,dt) = Y(du,dt) - \hat{H}(ut/st)\Lambda(du,dt)$

et R^- *et* ρ^- *désignent respectivement les limites à gauche de* R *et* ρ.

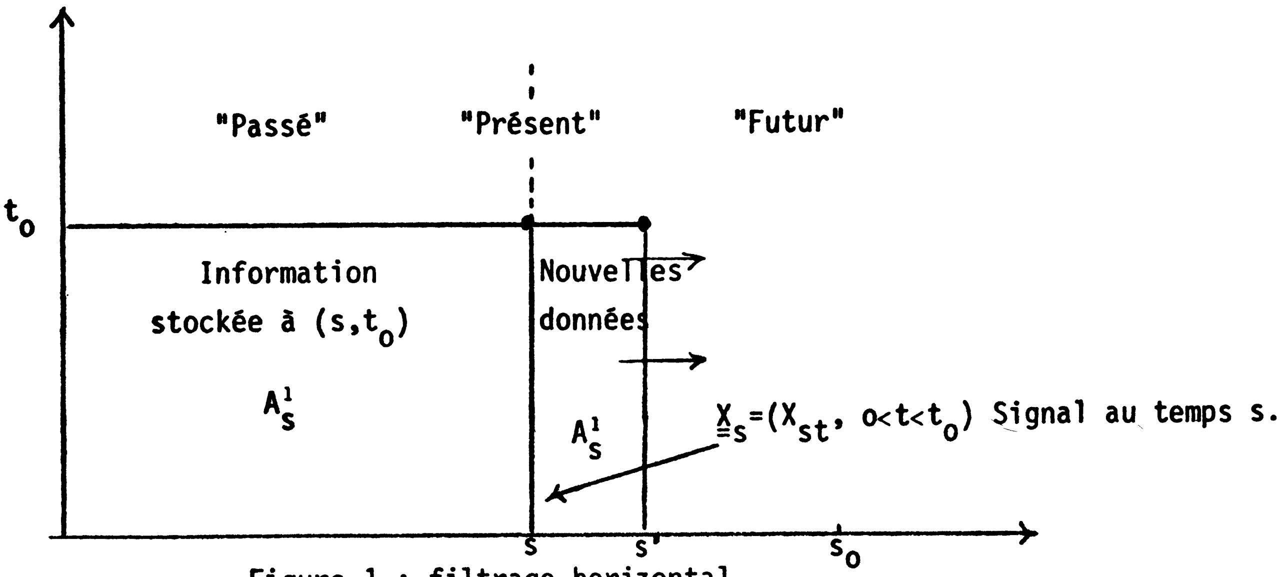

Figure 1 : filtrage horizontal.

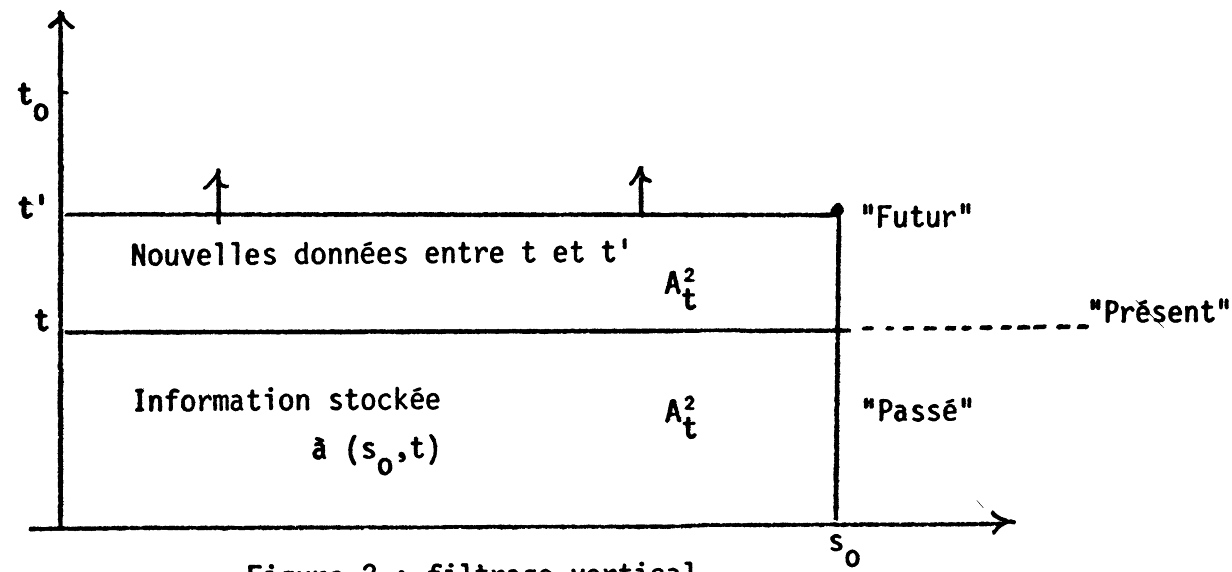

Figure 2 : filtrage vertical.

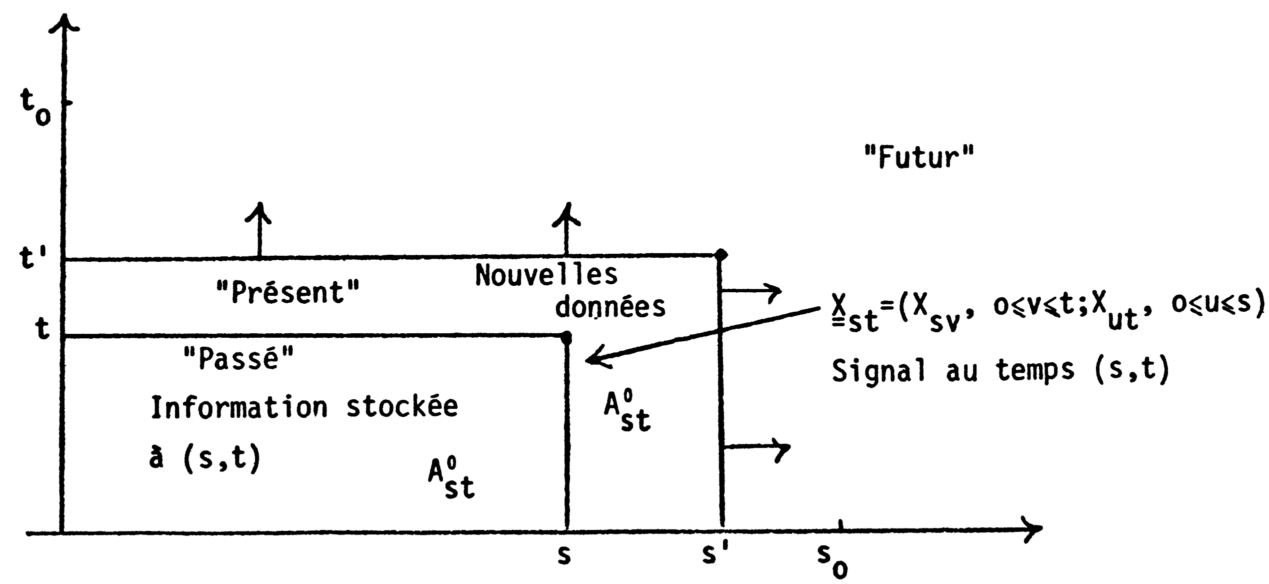

Figure 3 : filtrage diagonal.

REFERENCES :

[1] M.S. BARTLETT : The Statistical Analysis of Spatial Pattern. Adv. Appl. Prob., 6 (1974).

[2] R. BOEL, P. VARAYA et E. WONG : Martingales of Jump Processes. Siam J. Cont., 13, N° 5 (1975).

[3] P. BREMAUD : La méthode des semi-martingales en filtrage quand l'observation est un processus ponctuel marqué. Séminaire de Probabilité X. Lect. Notes N° 511 (1976), Springer Verlag.

[4] P. BREMAUD et M. YOR : Changes of Filtration and Probability Measures. Z. Wahr. V. Geb., 45 (1978).

[5] R. CAIROLI et J.B. WALSH : Stochastic Integrals in the Plane. Acta Math., 134 (1975).

[6] D.R. COX et P.A.W. LEWIS : The Statistical Analysis of Series of Events. London, Methuen (1966).

[7] P. FISHMAN et D. SNYDER : The Statistical Analysis of Space-Time Point Processes. IEEE Trans., IT-22 (1976).

[8] I. GERTNER : An Alternative Approach to Non-Linear Filtering. Stoch. Proc and Appl. 7 (1978).

[9] G. KALLIANPUR et C. STRIEBEL : Estimation of Stochastic Systems. Ann. Math. Stat. 39 (1968).

[10] H. KOREZLIOGLU : Two-Parameter Gaussian Markov Processes and their recursive Linear Filtering. Ann. Sc. Clermont (1978).

[11] H. KOREZLIOGLU, G. MAZZIOTTO et J. SZPIRGLAS : Equation du filtrage non linéaire pour des processus à deux indices. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 287, Série A (1978), p. 891.

[12] P. LEFORT : Processus de Markov et diffusion à deux indices. 7ème Coll. GRETSI. Nice, 28/5-2/6/1978.

[13] G. MAZZIOTTO et J. SZPIRGLAS : Calcul stochastique pour des semi-martingales de Poisson à deux paramètres. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 288 (28 mai 1979), Série A, 953-956.

[14] P.A.MEYER : Sur un problème de filtration. Séminaire de Probabilités VII. Lect. Notes N° 321 (1973), Springer Verlag.

[15] P.A. MEYER : Une remarque sur le calcul stochastique dépendant d'un paramètre. Séminaire de Probabilité XIII. Lect. Notes N° 721 (1979), Springer Verlag.

[16] J. NEVEU : Processus ponctuels : Ecole d'Eté de Saint-Flour. Lecture Notes N° 598 (1976), Springer Verlag.

[17] D. NUALART et M. SANZ : Random Gaussian Markov Fields. Stochastica. (A paraître).

[18] D.L. SNYDER : Filtering and Detection for Doubly Stochastic Poisson Process. IEEE Trans. IT-18, N° 1 (Jan. 1972).

[19] J. SZPIRGLAS et G. MAZZIOTTO : Modèle général de filtrage non linéaire et équations différentielles stochastiques associées. Ann. Inst. H. Poincarré. Série B, 15, N° 2 (1979).

[20] E. WONG : Recursive Filtering for Two-Dimensional Random Fields. IEEE Trans. IT-21 (Jan. 1975).

[21] E. WONG : Recursive Causal Linear Filtering for Two-Dimensional Random Fields. IEEE Trans; IT-24, N° 1 (Jan. 1978).

[22] E. WONG et E.T. TSUI : One-Sided Recursive Filters for Two-Dimensional Random Fields. IEEE Trans. IT-23, N° 5 (Sept. 1977).

[23] E. WONG et M. ZAKAI : Martingales and Stochastic Integrals for Processes with a Multidimensional Parameter. Z. Wahr. V. Geb., 29, (1974).

[24] E. WONG et M. KAKAI : Weak Martingales and Stochastic Integrals in the Plane. Ann. Prob. Vol 4, N° 4, (1976).

[25] E. WONG et M. ZAKAI : The Sample Function Continuity of Stochastic Integrals in the Plane. Ann. Prob., Vol. 5, N° 6 (1977).

[26] E. WONG et M. ZAKAI : Likelihood Ratios and Transformation of Probability Associated with Two-Parameter Wiener Processes. Z. Wahr. V. Geb., 40 (1977).

[27] E. WONG et M. ZAKAI : Differentiation Formulas for Stochastic Integrals in the Plane. Stoch. Proc. and Appl., 6 (1978).

[28] E. WONG et M. ZAKAI : An Intrinsic Calculus for Weak Martingales in the Plane. Memorandum UCB/EKL M78/20 (1978).

[29] M. ZAKAI : On the Optimal Filtering of Diffusion Processes. Z. Wahr. V. Geb., 11 (1969).