

ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

YVES SUREAU

Hypergroupes opérant transitivement sur un ensemble

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 68, série *Mathématiques*, n° 18 (1979), p. 83-96

<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__68_18_83_0>

© Université de Clermont-Ferrand 2, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2* » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

HYPERGROUPES OPERANT TRANSITIVEMENT SUR UN ENSEMBLE

Yves SUREAU

Université de Clermont II

Ce travail fait suite à une thèse de troisième cycle [2], que l'on désignera en abrégé par [HM], où l'on étudiait les hypergroupes de multitransformations transitifs ; cette notion généralise aux hypergroupes une théorie originale des groupes de permutations présentée par M. Krasner (cf. [1]).

Soit M un ensemble et H un hypergroupe noté multiplicativement ; si ψ est une application de $H \times M$ dans $\mathcal{P}(M) - \{\emptyset\}$, (l'ensemble des parties non vides de M), pour tout couple $(\alpha, m) \in H \times M$ on note $\alpha.m = \psi((\alpha, m))$ et pour tout sous-ensemble de $H \times M$ de la forme $K \times P$, on note $\psi((K,P)) = K.P = \bigcup_{(\alpha, m) \in K \times P} \alpha.m$. On dit que H opère sur M si on a une

telle application vérifiant, pour tout couple $(\alpha, \beta) \in H \times H$ et tout $m \in M$, $(\alpha\beta).m = \alpha.(\beta.m)$ (on notera souvent $\alpha\beta.m$ au lieu de $(\alpha\beta).m$). Un hypergroupe H opérant sur M est appelé un hypergroupe de multitransformations dans M , et l'on note (H, M) . Enfin, (H, M) est dit transitif si et seulement si, pour tout $m \in M$, on a $H.m = M$ (on a alors, pour tout $\alpha \in H$, $\alpha.M = \alpha.(H.M) = (\alpha H).M = H.M = M$). On ne s'intéresse ici qu'au cas où (H, M) est transitif.

L'essentiel de l'étude de (H, M) est de trouver des relations entre des sous-ensembles de M et des sous-hypergroupes de H et de donner des propriétés sur ces sous-ensembles, ces sous-hypergroupes et sur les relations qu'ils ont entre eux.

Un sous-ensemble non-vide M' de M est dit *clos dans M pour H* si $h' = \{ \alpha \in H ; \alpha.M' = M' \}$ est non vide et si pour tout couple $(\alpha, \beta) \in h' \times H$ tel que $M' \subset \alpha.(\beta.M')$ et $M-M' \subset \alpha.(\beta.(M-M'))$ ($M-M'$ désigne le complémentaire de M' dans M), on a $\alpha\beta.M' \cap \alpha\beta.(M-M') = \emptyset$ (soit $M' = \alpha\beta.M'$ et $\alpha\beta.(M-M') = M-M'$ puisque (H, M) est transitif).

On démontre dans [HM] que h' est sous-hypergroupe clos de H et l'on dit que h' est le sous-hypergroupe de stabilité de M' . Puis on introduit une notion plus maniable : un sous-ensemble M' clos dans M pour H est dit *pré-conservatif dans M pour H* s'il vérifie pour tout $\alpha \in H$,

$\alpha.M' \cap M' \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha.M' = M'$. Ces sous-ensembles sont étudiés dans [HM]. On donne tout de même ici dans un premier paragraphe, une nouvelle caractérisation de ces sous-ensembles intéressante pour la suite de ce travail.

Dans un deuxième paragraphe, on développe l'étude, esquissée dans [HM], des sous-ensembles *conservatifs dans M pour H* : ce sont des sous-ensembles M' clos dans M pour H tels que pour tout couple $(\alpha, \beta) \in H \times H$, on ait $\alpha.M' \cap \beta.M' \neq \emptyset$ si et seulement si $\alpha h' = \beta h'$ (où h' est le sous-hypergroupe de stabilité de M'). On démontre dans [HM] que dans ce cas, h' est un sous-hypergroupe inversible à droite dans H , et l'on donne ici les principales propriétés de ces sous-ensembles et de leurs sous-hypergroupes de stabilité.

L'étude des sous-ensembles conservatifs, M' , partout clos dans M pour H , c'est-à-dire qui vérifient pour tout $\alpha \in H$, $\alpha.M' \cap \alpha.(M-M') = \emptyset$, constitue une des parties essentielles de [HM]. On les appelle ici *ultra-clos dans M pour H car leurs sous-hypergroupes de stabilité sont ultra-clos à droite dans H* (cf. [3]). On sait (cf. [HM]) qu'ils sont caractérisés par les deux propriétés suivantes :

- 1) pour tout $\alpha \in H$, $\alpha.M' \cap \alpha.(M-M') = \emptyset$
- 2) pour tout $\alpha \in H$, $\alpha.M' \cap M' \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha.M' = M'$.

On renvoie à [HM] pour toutes les propriétés de ce type de sous-ensemble.

Enfin, dans le dernier paragraphe, on introduit d'une part une notion de *sous-ensemble ultra-conservatif, par rapport à un sous-hypergroupe h de H , dont le sous-hypergroupe de stabilité est h -conjugable* (cf. [4]), et, d'autre part, une notion de similitude (c'est-à-dire d'une bijection ψ entre deux supports M et N vérifiant certaines conditions de compatibilités avec les hypergroupes de multitransformations opérant sur eux) qui permettent d'aboutir à la démonstration de «bons théorèmes d'isomorphismes» .

§ 1 - Une caractérisation des sous-ensembles préconservatifs.

Si (H, M) est un hypergroupe de multitransformations dans M transitif, M' un sous-ensemble non vide de M , alors :

Théorème 1. 1. *Il y a équivalence entre :*

- i) M' est pré-conservatif dans M pour H
- ii) pour tout $\alpha \in H$, $\alpha.M' \cap M' \neq \emptyset$ si et seulement si $\alpha.M' = M'$ et $\alpha.(M-M') = M-M'$.

i) \Rightarrow ii).

Soit $\alpha \in H$ tel que $\alpha.M' \cap M' \neq \emptyset$ (un tel α existe car $H.M' = M$) ; par hypothèse on a donc $M' = \alpha.M'$ et, puisque (H, M) est transitif, $M-M' \subset \alpha.(M-M')$. Il s'ensuit donc $M-M' \subset \alpha.(M-M') \subset \alpha.(\alpha.(M-M'))$ et $M' = \alpha.M' = \alpha.(\alpha.M')$, et comme M' est clos dans M pour H , on déduit $\alpha\alpha.(M-M') = M-M'$ et l'on conclut les égalités $\alpha.M' = M'$ et $\alpha.(M-M') = M-M'$.

c.q.f.d.

i) \Rightarrow ii).

M' étant non vide, la condition $\alpha.M' \cap M' \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha.M' = M'$ permet d'écrire $h' = \{\alpha \in H ; \alpha.M' = M'\} = \{\alpha \in H ; \alpha.M' \cap M' \neq \emptyset\}$ et, (H, M) étant transitif, il s'ensuit

$h' \neq \emptyset$.

Soit $\alpha \in h'$ et soit $\beta \in H$ tels que l'on ait $M' \subset \alpha.(\beta.M')$ et $M-M' \subset \alpha.(\beta.M-M')$; α étant dans h' , on a $\alpha.M' = M'$ et $\alpha.(M-M') = M-M'$ (par hypothèse), il s'ensuit nécessairement $\beta.M' \cap M' \neq \emptyset$ soit $\beta.M' = M'$ et $\beta.(M-M') = M-M'$. Ainsi on déduit $M' = \alpha.M' = \alpha.(\beta.M')$ et $M-M' = \alpha.(M-M') = \alpha.(\beta.(M-M'))$; donc M' est clos dans M pour H , et, comme par hypothèse, pour tout $\alpha \in H$, on a $\alpha.M' \cap M' \neq \emptyset$ si et seulement si $\alpha.M' = M'$, on conclut que M' est pré-conservatif dans M par rapport à H .

c.q.f.d.

Enfin, remarquons que si M' est pré-conservatif dans M par rapport à H , on a les propriétés suivantes :

- 1) $h'.M' = M'$ et, pour tout $\alpha \in h'$, $\alpha.M' = M'$
- 2) $h'.(M-M') = M-M'$ et pour tout $\alpha \in h'$, $\alpha.(M-M') = M-M'$
- 3) $(H-h').M' = M-M'$
- 4) pour tout $m \in M'$, $h'.m = M'$ et $(H-h').m = M-M'$.

§ 2 - Sous-ensembles conservatifs.

Dans ce paragraphe, (H, M) est un hypergroupe de multitransformations dans M transitif ; $M', M'', M''' \dots$ sont des sous-ensembles de M et, s'ils sont au moins clos, $h', h'', h''' \dots$ désignent les sous-hypergroupes (de H) de stabilité de $M', M'', M''' \dots$ respectivement.

Si M' est pré-conservatif dans M par rapport à H et si M'' est tel que $\emptyset \neq M'' \subset M'$, alors, pour tout α de H tel que $\alpha.M'' \cap M' \neq \emptyset$, on a $\alpha \in h'$. En effet, $M'' \subset M'$ implique $\alpha.M'' \subset \alpha.M'$, donc $\alpha.M'' \cap M' \neq \emptyset$ et, M' étant pré-conservatif dans M par rapport à H , on a $\alpha.M' = M'$; soit $\alpha \in h'$. On conclut aussi à $\alpha.M'' \subset M'$.

Si $\{\alpha.M''\}_{\alpha \in h'}$ forme une partition de M' , on dit que $\alpha.M''$ ($\alpha \in h'$) est une classe de M' modulo M'' et la partition induite sur M' par M'' est notée M'/M'' . On considère alors la relation R sur h' définie par :

« $\alpha R \beta$ si et seulement si $\alpha.M'' = \beta.M''$ » ($(\alpha, \beta) \in h' \times h'$). Il est trivial que cette relation est d'équivalence sur h' et qu'il existe une bijection canonique entre M'/M'' et h'/R (à $(\alpha.M''/M''$ on fait correspondre la classe de α modulo R).

Si $h'' = \{\alpha \in H ; \alpha.M'' = M''\}$ est un sous-hypergroupe inversible à droite de H (et donc de h') on peut considérer h'/h'' et définir dessus une relation d'équivalence \sim par « $\alpha h''/h'' \sim \beta h''/h''$ si et seulement si $\alpha.M'' = \beta.M''$ » ; on a alors une bijection canonique entre $(h'/h'')/\sim$ et h'/R . Un cas particulier intéressant de ce genre de situation est le cas où la relation \sim est l'identité. On est donc amené à poser la définition suivante :

Définition 2.1. M' est dit conservatif dans M par rapport à H si et seulement si

1) M' est clos dans M pour H

2) $(\forall \alpha \in H) (\forall \beta \in H) [\alpha.M' \cap \beta.M' \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha h' = \beta h']$

s'il n'a pas de confusion possible sur M et H , on dit simplement que M' est conservatif.

On peut remplacer la condition 1) par

1') M' est pré-conservatif dans M par rapport à H

l'implication 1') \Rightarrow 1) étant évidente, il suffit de montrer que 1) et 2) impliquent 1'). M' étant clos, h' est non vide et si β est dans h' , on a $\beta h' = h'$, $\beta.M' = M'$ et par la condition 2) :

$\alpha.M' \cap M' \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha h' = h'$; la suite d'implications

$\alpha h' = h' \Rightarrow \alpha.M' = M' \Rightarrow \alpha \in h' \Rightarrow \alpha.M' \cap M' \neq \emptyset$ permet de conclure à l'équivalence $\alpha.M' \cap M' \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha.M' = M'$. D'où le résultat, et, compte tenu du théorème 1 précédent, on a :

Proposition 2.1. *M' est conservatif dans M par rapport à H si et seulement si :*

1) $M' \neq \emptyset$

2) $(\forall \alpha \in H) [(\alpha.M' \cap M' \neq \emptyset) \Leftrightarrow (\alpha.M' = M' \text{ et } \alpha.(M-M') = M-M')]$

3) $(\forall (\alpha, \beta) \in H \times H) [\alpha.M' \cap \beta.M' \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha h' = \beta h']$

La propriété suivante, utile pour la suite, est évidente :

Si M' et M'' sont conservatifs et tels que $M'' \subset M'$, alors on a $h'' \subset h'$ et M'' est conservatif dans M' par rapport à h' .

On trouvera dans [HM] page 13, 14 et 15, les démonstrations des deux théorèmes suivants :

Théorème 2.1. *Si M' est conservatif*

1) $\{\alpha.M'\}_{\alpha \in H}$ est une partition de M

2) h' est inversible à droite dans H .

Théorème 2.2. *Si M' est pré-conservatif (*) dans M par rapport à H , si M'' , tel que $M'' \subset M'$, est conservatif dans M' par rapport à h' ; alors l'application de M'/M'' dans h'/h'' , qui à la classe $\alpha.M''$ ($\alpha \in h'$) fait correspondre la classe de α modulo h'' est une bijection.*

On est ici dans le cas où la relation R précédemment définie est la relation d'équivalence modulo h'' .

Définition 2.2. *Soit M' conservatif, A partir de (H, M) on définit «de façon naturelle» $(H, M/M')$ par :*

$$\alpha.(\beta.M'/M') = (\alpha.(\beta.M'))/M' = ((\alpha\beta).M')/M'$$

pour tout α et β de H .

Proposition 2.2. *Si M'' est conservatif dans M par rapport à H et si M' est une réunion de classes de M modulo M'' telle que $M'' \subset M'$; les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) M'/M'' est conservatif dans M/M'' par rapport à H

2) M' est conservatif dans M par rapport à H .

Démonstration.

1) \Rightarrow 2). Pour tout α de H tel que $\alpha.M' \cap M' \neq \emptyset$, on a la suite d'implications suivantes :

$$\alpha.M' \cap M' \neq \emptyset \Rightarrow (\alpha.M')/M'' \cap M'/M'' \neq \emptyset$$

(*) dans [HM] on supposait M' conservatif ; mais la démonstration reste la même avec M' pré-conservatif seulement.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha.(M'/M'') \cap M'/M'' &\neq \emptyset \\ \Rightarrow \alpha.(M'/M'') &= M'/M'' \text{ et } \alpha.(M/M'' - M'/M'') = M/M'' - M'/M'' \\ \Rightarrow (\alpha.M')/M'' &= M'/M'' \text{ et } (\alpha.(M-M'))/M'' = (M-M')/M'' \\ \Rightarrow \alpha.M' &= M' \text{ et } \alpha.(M-M') = M-M'. \end{aligned}$$

Ainsi : $K' = \{ \alpha \in H ; \alpha.(M'/M'') = M'/M'' \} = h'$ et

$$\alpha.M' \cap \beta.M' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha.(M'/M'') \cap \beta.(M'/M'') \neq \emptyset \Rightarrow \alpha K' = \beta K' \Rightarrow \alpha h' = \beta h'.$$

2) \Rightarrow 1). On procède de façon analogue pour tout α de H tel que

$$\begin{aligned} \alpha.(M'/M'') \cap (M'/M'') &\neq \emptyset : \alpha.(M'/M'') \cap M'/M'' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha.M' \cap M' \neq \emptyset \Rightarrow \\ \Rightarrow (\alpha.M' &= M' \text{ et } \alpha.(M-M') = M-M') \Rightarrow ((\alpha.M')/M'' = M'/M'' \text{ et} \\ \alpha.(M-M')/M'' &= (M-M')/M'') \Rightarrow [\alpha.(M'/M'') = M'/M'' \text{ et } \alpha.(M/M'' - M'/M'') = M/M'' - M'/M'']. \end{aligned}$$

Ainsi : $K' = \{ \alpha \in H ; \alpha . [M'/M''] = M'/M'' \} = h'$ et

$$\alpha.(M'/M'') \cap \beta.(M'/M'') \neq \emptyset \Rightarrow \alpha.M' \cap \beta.M' \neq \emptyset \Rightarrow \alpha h' = \beta h' \Rightarrow \alpha K' = \beta K'.$$

Proposition 2.3. Si M', M'' et M''' sont tels que M' est pré-conservatif dans M par rapport à H , M'' et M''' sont conservatifs dans M' par rapport à h' et $M''' \subset M'' \subset M'$, alors :

1) il existe une bijection canonique entre $(M'/M''')/(M''/M''')$ et M'/M''

2) $(h'/h''')/(h''/h''')$ et h'/h'' sont isomorphes

3) $(h', (M'/M'''))/(M''/M''')$ et $(h', M'/M'')$ sont isomorphes (cf. définition 3.3).

En effet :

1) est évident si l'on remarque que M''' est conservatif dans M'' par rapport à h''

($\beta.M''' \cap M'' \neq \emptyset \Rightarrow \beta.M'' \cap M'' \neq \emptyset \Rightarrow \beta.M'' = M''$; donc $\beta.M''' \subset M'' \dots$)

2) est un résultat bien connu et 3) est évident compte tenu de 1) et 2).

Proposition 2.4. Soit $\{M^i\}_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles conservatifs dans M par rapport à H telle que $M' = \bigcap_{i \in I} M^i$ soit non vide. Alors, M' est pré-conservatif dans M par rapport à H et est conservatif dans M^i par rapport à h^i ($\forall i \in I$) et l'on a $h' = \bigcap_{i \in I} h^i$.

La proposition -I de [HM] démontre que M' est pré-conservatif dans M par rapport à H et que $h' = \bigcap_{i \in I} h^i$. Soit $i \in I$ et $(\alpha, \beta) \in h^i \times h^i$; $\alpha.(\bigcap_{j \in I} M^j) \cap \beta.(\bigcap_{j \in I} M^j) \neq \emptyset$ implique $(\bigcap_{j \in I} \alpha.M^j) \cap (\bigcap_{j \in I} \beta.M^j) \neq \emptyset$, d'où $\alpha h^j = \beta h^j$ ($\forall j \in I$) et, h^j étant clos dans

$$H(\forall j \in I), \text{ il s'ensuit } \alpha \left(\bigcap_{j \in I} h^j \right) = h^i \cap \left(\bigcap_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \alpha h^j \right) = h^i \cap \left(\bigcap_{\substack{j \subset I \\ j \neq i}} \beta h^j \right) = \beta \left(\bigcap_{j \subset I} h^j \right)$$

et la proposition 2.1 achève la démonstration.

Proposition 2.5. *Soit h un sous-hypergroupe inversible à droite et clos de H . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un sous-ensemble M' de M conservatif dans M par rapport à H tel que $h' = h$ est qu'il existe un élément m de M tel que :*

$$1) m \in h.m$$

$$2) (\forall \alpha \in H) (\forall \beta \in H) [\alpha h.m \cap \beta h.m \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha h \cap \beta h \neq \emptyset]$$

On a alors $M' = h.m$.

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de montrer d'après la proposition 2.1, que $M' = h.m$ est pré-conservatif ; car la condition

$\alpha h.m \cap \beta h.m \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha h \cap \beta h \neq \emptyset$ implique, puisque h est inversible à droite dans H , l'équivalence $\alpha.M' \cap \beta.M' \neq \emptyset \Leftrightarrow \alpha h = \beta h$. Les conditions imposées sur m et h permettent d'écrire que l'on a $(H.h).m \cap h.m = \emptyset$ et la proposition -2 de [HM] permet de conclure.

Si M' et M'' sont conservatifs, on désigne (quand il existe) par $[M', M'']$ le plus petit sous-ensemble conservatif dans M par rapport à H contenant M' et M'' et par $[h', h'']$ le sous-hypergroupe engendré par h' et h'' (on sait qu'il existe, car ici h' et h'' sont inversibles à droite et clos dans H . cf. [3]); et on a :

Théorème 2.3. *Si M' et M'' sont conservatifs dans M par rapport à H et tels que $M' \cap M'' \neq \emptyset$, pour tout m de $M' \cap M''$ on a $[M', M''] = [h', h''].m$.*

Si $M''' = [M', M'']$ existe, il est trivial que l'on a $h' \subset h'''$, $h'' \subset h'''$ et donc $[h', h''] \subset h'''$; d'où $M' \cup M'' \subset [h', h''].m \subset [M', M'']$. Il reste à démontrer que $[h', h''].m$ est conservatif dans M par rapport à H . On sait (cf. [3]) que $[h', h'']$ est inversible à droite et clos dans H ; d'autre part, on a trivialement $m \in [h', h''].m$; enfin, on établit la suite d'implications suivante ($(\alpha, \beta) \in H \times H$):

$$\begin{aligned} & \alpha [h', h''].m \cap \beta [h', h''].m \neq \emptyset \\ \Rightarrow & \alpha [h', h'']h'' \cap \beta [h', h'']h'' \neq \emptyset \\ \Rightarrow & \alpha [h', h''].M'' \cap \beta [h', h''].M'' \neq \emptyset \text{ (car } m \in M' \cap M'') \\ \Rightarrow & \alpha [h', h'']h'' \cap \beta [h', h'']h'' \neq \emptyset \text{ (car } M'' \text{ est conservatif)} \\ \Rightarrow & \alpha [h', h''] \cap \beta [h', h''] \neq \emptyset \text{ (car } h'' \subset [h', h'']) \end{aligned}$$

et la proposition 2.5 conduit au résultat

Définition 2.3. *Soit M' conservatif et soit A un sous-ensemble non vide de M et $K = \{\alpha \in H; \alpha.M' \cap A \neq \emptyset\}$. On pose $AM' = \{m \in M; (\exists \alpha \in K) [m \in \alpha.M']\}$; en d'autres termes, on pose $AM' = \bigcup_{\alpha \in K} \alpha.M'$.*

On remarque que l'on a $M' = M'M'$.

Théorème 2.4. Soient M' et M'' conservatifs tels que $M' \cap M'' \neq \emptyset$; les applications $M'M''/M'' \longrightarrow h'h''/h'' \longrightarrow h'/h' \cap h'' \longrightarrow M'/M' \cap M''$ définies par $a'M''/M'' \rightsquigarrow \alpha_a h''/h'' \rightsquigarrow \alpha_a (h' \cap h'')/h' \cap h'' \rightsquigarrow a'(M' \cap M'')/M' \cap M''$ où α_a est un élément de h' tel que $a' \in \alpha_a \cdot M''$, sont des bijections.

On définit de même des bijections entre

$M''M'/M'$, $h''h'/h'$, $h''/h' \cap h''$ et $M''/M' \cap M''$

On renvoie à [HM] théorème -6.

Lemme 2.1. Si M' et M'' sont conservatifs et tels que $M' \cap M'' \neq \emptyset$ on a $(i,j) \in \{', ''\}$

- 1) $M' \cup M'' \subset M^i M^j$
- 2) $M^i M^j = h^i h^j \cdot (M' \cap M'') = h^i \cdot M^j$
- 3) $M^i M^j = h^i h^j \cdot m$ pour tout $m \in M^j$.

Démonstration :

1) est trivial puisque $M' \cap M'' \neq \emptyset$.

2) l'inclusion $h^i h^j \cdot (M' \cap M'') = h^i \cdot M^j \subset M^i M^j$ est évidente. Montrons l'inclusion inverse :

Pour tout α de H tel que $\alpha \cdot M^j \cap M^i \neq \emptyset$ on a :

$\alpha h^j \cdot (M' \cap M'') \cap h^i \cdot (M' \cap M'') \neq \emptyset$; il s'en suit $\alpha h^j \cdot M^i \cap h^i \cdot M^i \neq \emptyset$; donc il existe β de αh^j et β^i de h^i tels que $\beta \cdot M^i \cap \beta^i \cdot M^i \neq \emptyset$; d'où $\beta h^i = \beta^i h^i = h^i$, soit $\beta \in h^i$. Or on a $\beta h^j = \alpha h^j$ (car h^j est inversible à droite) ; on déduit $\alpha h^j \subset h^i h^j$, soit

$\alpha \cdot M^j = \alpha h^j \cdot (M' \cap M'') \subset h^i h^j \cdot (M' \cap M'')$. Ainsi on conclut à $M^i M^j \subset h^i h^j \cdot (M' \cap M'')$.

3) d'après 2) on a $M^i M^j = h^i h^j \cdot (M' \cap M'')$; on peut donc écrire

$M^i M^j = h^i (h^j h^j) \cdot (M' \cap M'') = h^i h^j \cdot (h^j \cdot (M' \cap M'')) = h^i h^j \cdot M^j = h^i h^j \cdot (h^j \cdot m) = h^i h^j h^j \cdot m = h^i h^j \cdot m$ ($\forall m \in M^j$).

N. B. : En faisant $i = j$, on a $M' = h' \cdot M' = h' \cdot m$ pour tout m de M' .

Lemme 2.2. Si M' et M'' sont conservatifs, alors on a

$M'M'' \subset [M', M'']$ et $M''M' \subset [M', M'']$ lorsque $[M', M'']$ existe.

En effet, pour tout α de H tel que $\alpha \cdot M'' \cap M' \neq \emptyset$ on a

$\alpha \cdot [M', M''] \cap [M', M''] \neq \emptyset$ soit $\alpha \cdot [M', M''] = [M', M'']$ d'où

$\alpha \cdot M'' \subset [M', M'']$. Ainsi on a $M'M'' \subset [M', M'']$. Une démonstration analogue conclut à $M''M' \subset [M', M'']$.

Théorème 2.5. Soit M' et M'' deux sous-ensembles conservatifs dans M par rapport à H . On pose

$h^{1,2} = \{\alpha \in H ; \alpha \cdot M'M'' = M'M''\}$ et $h^{2,1} = \{\alpha \in H ; \alpha \cdot M''M' = M''M'\}$.

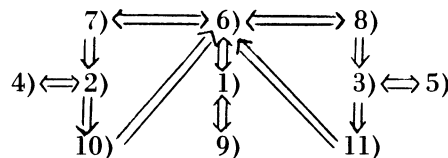
Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) $M'M'' = M''M'$
- 2) $[M', M''] = M'M''$
- 3) $[M', M''] = M''M'$
- 4) $M'M''$ est conservatif dans M par rapport à H et $M' \cap M'' \neq \emptyset$
- 5) $M''M'$ est conservatif dans M par rapport à H et $M' \cap M'' \neq \emptyset$
- 6) $h'h'' = h'h''$ et $M' \cap M'' \neq \emptyset$
- 7) $[h', h''] = h'h''$ et $M' \cap M'' \neq \emptyset$
- 8) $[h', h''] = h'h''$ et $M' \cap M'' \neq \emptyset$
- 9) $h^{1,2} = h^{2,1}$ et $M' \cap M'' \neq \emptyset$ ($h^{1,2}$ et $h^{2,1}$ sont non vides)
- 10) $h^{1,2} = h'h''$ et $M' \cap M'' \neq \emptyset$
- 11) $h^{2,1} = h'h''$ et $M' \cap M'' \neq \emptyset$.

Démonstration :

Les équivalences 6) \Leftrightarrow 7) \Leftrightarrow 8) sont connues (cf. [3]), le théorème 2.3 et le lemme 2.1 donnent les implications 8) \Rightarrow 3), 7) \Rightarrow 2) et 6) \Rightarrow 1). Enfin, les implications 1) \Rightarrow 9), 2) \Rightarrow 4) et 3) \Rightarrow 5) sont triviales. L'implication 4) \Rightarrow 2) est évidente car, $M'M''$ conservatif et $M' \cap M'' \neq \emptyset$ impliquent $M' \subset M'M''$ et $M'' \subset M'M''$ d'où (cf. lemme 2.2) l'égalité $M'M'' = [M', M'']$. De façon analogue, on a 5) \Rightarrow 3).

On va démontrer 2) \Rightarrow 10) \Rightarrow 6) ; et de façon analogue, on aura 3) \Rightarrow 11) \Rightarrow 6). Enfin, les implications 9) \Rightarrow 1) \Rightarrow 6) achèveront la démonstration du théorème. En résumé, on aura le diagramme suivant :



2) \Rightarrow 10). $[M', M''] = M'M''$ implique $M' \cap M'' \neq \emptyset$, donc $[M', M''] = h'h'' \cdot (M' \cap M'')$ et, pour tout $\alpha \in h'h''$, on a $\alpha \cdot (M'M'') \cap M'M'' \neq \emptyset$ et comme $M'M''$ est conservatif, on a $\alpha \in h^{1,2}$; ainsi $h'h'' \subset h^{1,2}$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit $\gamma \in h^{1,2}$, on a $\gamma \cdot (M'M'') = M'M''$; or M'' est inclus dans $M'M''$; d'où $\gamma \cdot M'' \subset M'M''$ et, M'' étant conservatif, on a $\gamma \cdot M'' \cap M' \neq \emptyset$ soit $h'' \cdot (M' \cap M'') \cap h' \cdot (M' \cap M'') \neq \emptyset$; il s'ensuit $\gamma h'' \cdot M'' \cap h' \cdot M'' \neq \emptyset$. Ainsi, il existe $\alpha \in \gamma h''$ et $\beta \in h'$ tels que $\alpha h'' = \beta h''$ et il s'ensuit $\gamma \in \gamma h'' = \alpha h'' = \beta h'' \subset h'h''$, d'où l'inclusion $h^{1,2} \subset h'h''$.

10) \Rightarrow 6). h'' est inversible à droite, donc $h' \subset h'h''$; d'autre part, puisque $M' \cap M''$ est non vide, il en est de même de $h' \cap h''$ (cf. proposition 2.4) et l'on a $h'' = (h' \cap h'')h'' \subset h'h'' = h^{1,2}$; ainsi $h'h'' \subset h^{1,2} = h'h''$. Pour conclure à l'égalité $h'h'' = h'h''$, on va démontrer par l'absurde que $A = h'h'' - h'h''$ est vide.

Supposons donc A non vide ; et soit $\beta \in A$. Si $\beta \cdot M' \cap M'' \neq \emptyset$, alors $\beta h'.(M' \cap M'') \cap h''.(M' \cap M'') \neq \emptyset$, d'où $\beta h'.M'' \cap h''.M' \neq \emptyset$; donc il existe $\gamma \in \beta h'$ tel que $\gamma h'' = h''$ et l'on a $\gamma \in h''$, et donc

$\beta \in \beta h' = \gamma h' \subset h''h'$, ce qui est absurde ; donc $\beta \cdot M' \cap M'' = \emptyset$ et, si $\beta h' \cap h'' \neq \emptyset$, il s'ensuit $\beta h'.(M' \cap M'') \cap h''.(M' \cap M'') \neq \emptyset$, d'où $\beta \cdot M' \cap M'' \neq \emptyset$; ce qui contredit le résultat précédent. Donc on a $\beta h' \cap h'' = \emptyset$.

D'autre part, puisque $M'' \subset M'M''$, on a

$\beta \cdot M'' \subset \beta \cdot M'M'' \subset h^{1,2} \cdot M'M'' = M'M''$, ce qui implique $\beta \cdot M'' \cap M' \neq \emptyset$ et donc $\beta h''.(M' \cap M'') \cap h'.(M' \cap M'') \neq \emptyset$, d'où $\beta h''.M' \cap h'.M' \neq \emptyset$, ce qui entraîne $\beta h''h' \cap h' \neq \emptyset$, et, h' étant clos dans H , il est donc nécessaire d'avoir $\beta h'' \cap h' \neq \emptyset$.

Les résultats précédents conduisent à l'inclusion $\beta h' \subset H - h''$.

Or $h''h' \subset h'h''$ implique $\beta h''h' \subset \beta h'h''$, on a donc

$\beta h''h' \subset \beta h'h'' \subset (H-h'')h'' = H-h''$ (la dernière égalité résultant de la clôture de h'').

Mais, $\beta h'' \cap h' \neq \emptyset$ donne l'inclusion $h' \subset \beta h''h'$; il s'ensuit $h' \subset H-h''$; ce qui contredit $h' \cap h'' \neq \emptyset$. Il en résulte $A = \emptyset$, et donc $h'h'' = h''h'$.

9) \Rightarrow 1). D'après le lemme 2.1 on a $M'M'' = h'h''.(M' \cap M'')$ et $M''M' = h''h'.(M' \cap M'')$; il s'ensuit $h' \subset h^{1,2}$ et $h'' \subset h^{2,1}$ et, comme $h^{1,2} = h^{2,1}$, il en résulte

a) $h'h''.(M' \cap M'') = h''h'h''.(M' \cap M'')$ et, h'' étant inversible à droite, $h''h'.(M' \cap M'') \subset h''h'h''.(M' \cap M'') = h'h''.(M' \cap M'')$

b) $h''h'.(M' \cap M'') = h'h''h'.(M' \cap M'')$ et, $h'h''.(M' \cap M'') \subset h'h''h'.(M' \cap M'') = h''h'.(M' \cap M'')$.

Ainsi a) et b) conduisent au résultat :

$$M'M'' = h'h''.(M' \cap M'') = h''h'.(M' \cap M'') = M''M'.$$

1) \Rightarrow 6). On a vu que $M'M'' = M''M'$ implique $M' \cap M'' \neq \emptyset$; le lemme 2.1 permet d'écrire $h'h''.(M' \cap M'') = M'M'' = M''M' = h''h'.(M' \cap M'')$; ainsi, quel que soit $\alpha \in h'h''$, il existe $\beta \in h''h'$ tel que $\alpha \cdot (M' \cap M'') \cap \beta \cdot (M' \cap M'') \neq \emptyset$; il s'ensuit $\alpha \cdot M' \cap \beta \cdot M' \neq \emptyset$ d'où $\alpha h' = \beta h'$ et donc $\alpha \in \alpha h' = \beta h' \subset h''h'h' = h''h'$; il en résulte l'inclusion $h'h'' \subset h''h'$. De façon analogue, on démontre l'inclusion inverse $h''h' \subset h'h''$; d'où le résultat $h'h'' = h''h'$.

§ 3 - Sous-ensembles ultra-conservatifs .

Dans ce paragraphe, on se donne (H, M) un hypergroupe de multitransformations dans M transitif. $M', M'' \dots$ et $N', N'' \dots$ sont des sous-ensembles de M , et s'ils sont au moins clos, $h', h'' \dots$ et $k', k'' \dots$ désignent les sous-hypergroupes (de H) de stabilité de $M', M'' \dots$ et $N', N'' \dots$ respectivement.

Définition 3.1. Soit M' ultra-clos et h un sous-hypergroupe de H . Si, pour tout $\alpha \in h$, $\alpha \cdot M'$ est un sous-ensemble ultra-clos dans M pour H , on dit que M' est ultra-conservatif pour h par rapport à (H, M) , ou, si aucune confusion n'est possible sur (H, M) que M' est ultra-conservatif pour h .

Si h est le sous-hypergroupe de stabilité d'un sous-ensemble N de M , on dit alors que M' est ultra-conservatif pour N par rapport à (H, M) ou simplement pour N (s'il n'y a pas d'ambiguïté sur (H, M)). M' étant ultra-clos, on rappelle que h' est ultra-clos à droite dans H .

Théorème 3.1. Si M' est ultra-clos et si h est un sous-hypergroupe de H tel que $h' \cap h \neq \emptyset$, il y a équivalence entre :

- i) M' est ultra-conservatif pour h
- ii) h' est h -conjugable(*)

i) \Rightarrow ii). Par hypothèse, pour tout $\alpha \in h$, $\alpha.M'$ est ultra-clos ; donc pour tout $\beta \in h$, on a $\beta.(\alpha.M') \cap \beta.(M - \alpha.M') = \emptyset$ et, M' étant ultra-clos, on a aussi $\alpha.M' \cap \alpha.(M - M') = \emptyset$ et $M - \alpha.M' = \alpha.(M - M')$; on en déduit $\beta \alpha.M' \cap \beta \alpha.(M - M') = \emptyset$.

D'autre part, pour tout $\alpha \in h$, et tout $\gamma \in h$ tel que $\gamma \alpha \cap h' \neq \emptyset$ (un tel γ existe car h' et h sont non disjoints), on a les inclusions $M' \subset \gamma \alpha.M'$ et $M - M' \subset \gamma \alpha.(M - M')$; le résultat précédent permet de conclure à l'égalité $M' = \gamma \alpha.M'$, d'où l'on déduit $\gamma \alpha \subset h'$ et donc $\gamma \alpha \subset h' \cap h$; ainsi, pour tout α et tout γ de h , on a, soit $\gamma \alpha \subset h' \cap h$, soit $\gamma \alpha \subset h - (h \cap h')$.

ii) \Rightarrow i). h' est h -conjugable ; pour tout $\alpha \in h$, il existe donc un $\bar{\alpha} \in h$ tel que $\bar{\alpha} \alpha \subset h' \cap h$, et h' étant ultra-clos à droite dans H , on sait (cf. [4]) que $\alpha h' \bar{\alpha}$ est aussi un sous-hypergroupe ultra-clos à droite dans H (et donc, cf. [3], inversible à droite et clos dans H).

D'autre part, on vérifie pour tout $n \in \alpha.M'$:

- 1) $n \in \alpha h' \bar{\alpha} . n$ (car $\alpha h' \bar{\alpha} . n \subset \alpha.M'$ et $(H - \alpha h' \bar{\alpha}).n \subset M - \alpha.M'$).
- 2) pour tout $\beta \in H$ et tout $\gamma \in H$, on a la suite d'équivalences $\gamma \alpha h' \bar{\alpha} . n \cap \beta \alpha h' \bar{\alpha} . n \neq \emptyset \Leftrightarrow \gamma \alpha h' \bar{\alpha} . (\alpha.M') \cap \beta \alpha h' \bar{\alpha} . (\alpha.M') \neq \emptyset \Leftrightarrow \gamma \alpha . M' \cap \beta \alpha . M' \neq \emptyset \Leftrightarrow \gamma \alpha \cap \beta \alpha \neq \emptyset$ (car M' est ultra-clos) $\Leftrightarrow \gamma \alpha h' \bar{\alpha} \cap \beta \alpha h' \bar{\alpha} \neq \emptyset$.

Ainsi, d'après la proposition 6, page 24 de [HM], $\alpha.M'$ est ultra-clos dans M par rapport à H . (c.q.f.d.). Et l'on a le

Corollaire : Si h est un sous-hypergroupe de H tel que M' soit ultra-conservatif pour h et $h \cap h' \neq \emptyset$, alors, pour tout $\alpha \in h$, le sous-hypergroupe de stabilité h'_α de $\alpha.M'$ est égale à $\alpha h' \bar{\alpha}$. i.e. : $h'_\alpha = \{\beta \in H ; \beta.(\alpha.M') = \alpha.M'\} = \alpha h' \bar{\alpha}$.

Définition 3.2. Soit (K, N) un hypergroupe de multitransformations dans N transitif. Une application bijective $\psi : M \rightarrow N$ s'appelle une similitude de (H, M) dans (K, N) s'il existe une application $\theta : H \rightarrow K$ telle que :

- 1) pour tout $m \in M$ et tout $\alpha \in H$, on a $\psi(\alpha.m) = \theta(\alpha).(\psi(m))$

(*) pour la notion de conjugaison voir [4]. On rappelle seulement que h' est h -conjugable si et seulement si on a l'une des trois conditions équivalentes suivantes (h' est clos et $h \cap h' \neq \emptyset$).

- 1) pour tout x de h il existe $\bar{x} \in h$ tel que $\bar{x} x \subset h \cap h'$
- 2) pour tout x et y de h , on a soit $xy \subset h \cap h'$, soit $xy \subset h - (h \cap h')$
- 3) pour tout x de h , il existe \bar{x} de h tel que $x\bar{x} \subset h \cap h'$.

2) pour tout $\alpha' \in K$ il existe $\alpha \in H$ tel que pour tout $m \in M$, on a $\alpha' \cdot (\psi(m)) = \theta(\alpha) \cdot (\psi(m)) = \psi(\alpha \cdot m)$.

La première condition impose une «compatibilité» entre θ et ψ . Quant à la seconde, si R est la relation d'équivalence définie sur (H, M) par « $\alpha R \beta$ si et seulement si pour tout $m \in M$, $\alpha \cdot m = \beta \cdot m$ » et si T est la relation définie de la même façon sur (K, N) , elle exprime que θ induit une bijection entre H/R et K/T . Remarquons que la bijection inverse ψ^{-1} est une similitude de (K, N) dans (H, M) ; en effet, si $\bar{\theta}$ est la bijection induite par θ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{\theta} & K \\
 r \downarrow & & \downarrow t \\
 H/R & \xrightarrow{\bar{\theta}} & K/T
 \end{array}
 \quad (\text{où } r \text{ et } t \text{ sont les surjections canoniques})$$

commute, on peut définir une application $\theta' : K \rightarrow H$, vérifiant les conditions 1) et 2) de la définition 3.2, de la façon suivante : pour chaque classe de H modulo R , on choisit un représentant et pour tout $\alpha' \in K$, on prend $\theta'(\alpha')$ égale au représentant choisi pour la classe définie par $(\bar{\theta}^{-1} \circ t)(\alpha')$. (L'application θ' dépend bien évidemment du choix des représentants des classes de H modulo R et n'est généralement pas unique). Enfin, il est utile de noter que $\theta(\alpha) T \theta(\beta)$ équivaut à $\alpha R \beta$, et que le composé de deux similitudes est une similitude. On notera quelquefois dans la suite (ψ, θ) la donnée d'une similitude ψ à laquelle est associée l'application θ .

Définition 3.3. Une similitude (ψ, θ) de (H, M) dans (K, N) est appelée un isomorphisme si θ est un isomorphisme d'hypergroupes de H dans K .

On a besoin pour la suite du lemme technique suivant :

Lemme 3.1. Si $\{h_i\}_{i \in I}$ est une famille de sous-hypergroupes ultra-clos à droite d'un hypergroupe H , alors on a $\bigcap_{i \in I} h_i \neq \emptyset$.

En effet, pour tout $\alpha \in H$ et tout $i \in I$, on a $\alpha(H \cdot h_i) = H \cdot \alpha h_i$; d'autre part, h_i étant ultra-clos à droite dans H , est inversible à droite dans H (cf [3]), il s'ensuit

$$\begin{aligned}
 & \alpha \in \alpha h_i \quad (\forall i \in I); \text{ et l'on déduit } \alpha \notin H \cdot \left[\bigcap_{i \in I} \alpha h_i \right] = \bigcup_{i \in I} (H \cdot \alpha h_i) = \\
 & = \bigcup_{i \in I} \alpha (H \cdot h_i) = \alpha \left(\bigcup_{i \in I} (H \cdot h_i) \right) = \alpha \left(H \cdot \bigcap_{i \in I} h_i \right).
 \end{aligned}$$

Si $\bigcap_{i \in I} h_i$ est vide, alors $\alpha (H \cdot \bigcap_{i \in I} h_i) = \alpha H = H$, et donc $\alpha \notin H$, ce qui est absurde ;

donc $\bigcap_{i \in I} h_i \neq \emptyset$.

Théorème 3.2. Soient M' et M'' conservatifs dans M par rapport à H tels que M'' soit ultra-conservatif pour M' par rapport à (H, M) et $M'M'' = M''M'$. Il y a équivalence de

i) la bijection $\psi: M'M''/M'' \rightarrow M'/M' \cap M''$ définie par

$$\psi(mM''/M'') = m(M' \cap M'')/M' \cap M'' \quad (\forall m \in M')$$

($h'h'', M'M''/M''$) dans ($h', M'/M' \cap M''$)

ii) $h'h'' = h'(h'')^*_h$, en posant $(h'')^*_h = \bigcap_{\tau \in h'} \tau h'' \bar{\tau}$

où $\bar{\tau} \in h'$ est tel que $\bar{\tau} \tau \subset h' \cap h''$ (*)

Remarquons que $M'M'' = M''M'$ implique $M' \cap M'' \neq \emptyset$ et $h'h'' = h''h'$ (cf. théorème 2.5).

D'autre part M'' étant ultra-conservatif pour M' par rapport à (H, M) , h'' est h' -conjugable, M'' est ultra-clos et donc h'' est ultra-clos à droite dans H . Il s'ensuit que pour tout τ de h' , $\tau h'' \bar{\tau}$ est ultra-clos à droite dans H (cf. [4]) et donc (cf. lemme 3.1 et [4]) $(h'')^*_h$ est non vide et est un sous-hypergroupe ultra-clos à droite dans H ; dans la suite de cette démonstration, on note $(h'')^* = (h'')^*_h$.

Si R désigne la relation d'équivalence sur $(h'h'', M'M''/M'')$ définie par $\alpha R \beta$ si et seulement si pour tout $m \in M'M''/M''$, $\alpha.m = \beta.m$, on a $\alpha R \beta$ si et seulement si pour tout τ de h' , $\alpha.(\tau.M'') = \beta.(\tau.M'')$, soit encore $\alpha \tau h'' \bar{\tau}.(\tau.M'') = \beta \tau h'' \bar{\tau}.(\tau.M'')$ et, comme M'' est ultra-conservatif pour M' , on déduit l'équivalence : $\alpha R \beta \Leftrightarrow (\forall \tau \subset h') (\alpha \tau h'' \bar{\tau} = \beta \tau h'' \bar{\tau})$. Or $\tau h'' \bar{\tau}$ et $(h'')^*$ sont ultra-clos à droite dans H , ce qui implique d'une part

$$\alpha(H-(h'')^*) = H - \bigcap_{\tau \in h'} \alpha \tau h'' \bar{\tau} \quad \text{et d'autre part} \quad \alpha(H-(h'')^*) = H - \alpha(h'')^* ;$$

ce qui démontre l'égalité $\alpha(h'')^* = \bigcap_{\tau \in h'} \alpha \tau h'' \bar{\tau}$, on conclut donc aux implications suivantes :

$$\alpha R \beta \Rightarrow \bigcap_{\tau \in h'} \alpha \tau h'' \bar{\tau} = \bigcap_{\tau \in h'} \beta \tau h'' \bar{\tau} \Rightarrow \alpha(h'')^* = \beta(h'')^*$$

$$\Rightarrow (\forall \tau \in h') (\alpha \tau h'' \bar{\tau} = \beta \tau h'' \bar{\tau}) \Rightarrow (\forall \tau \subset h')$$

$$(\alpha \tau h'' \bar{\tau} = \beta \tau h'' \bar{\tau}) \Rightarrow \alpha R \beta . \text{ Ainsi, sur } (h'h'', M'M''/M'') \text{ on a établi l'équivalence}$$

$$\alpha R \beta \Leftrightarrow \alpha(h'')^* = \beta(h'')^* .$$

R induit donc sur $h'h''$ la relation d'équivalence modulo le sous-hypergroupe $(h'')^*$ (qui est inversible à droite dans $h'h''$).

Enfin, comme M'' est ultra-conservatif pour M' par rapport à (H, M) , h'' est h' -conjugable ; donc $h' \cap h''$ est h' -conjugable et il s'ensuit que $M' \cap M''$ est ultra-conservatif pour M' par rapport à (h', M') . En effet, $M' \cap M''$ est conservatif dans M' par rapport à h' (cf. proposition 2.4) et, pour tout $\alpha \subset h'$, l'intersection $\alpha.(M' \cap M'') \cap \alpha.(M' - (M' \cap M''))$ est vide, ainsi $M' \cap M''$ est ultra-clos dans M' pour h' et le théorème 3.1 permet de conclure. De plus $h' \cap h''$ est ultra-clos à droite dans h' . Par un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus, si T est la relation d'équivalence

(*) On sait (cf. [4]) que pour tout $\tau \in h'$ donné, l'ensemble des $\tau' \in h'$ tels que $\tau'\tau \subset h' \cap h''$ constitue une classe $(h' \cap h'')\bar{\tau}$; donc le sous-hypergroupe $\tau h'' \bar{\tau} = \tau h''(h' \cap h'')\bar{\tau}$ est indépendant du choix de $\bar{\tau}$ tel que $\bar{\tau} \tau \subset h' \cap h''$.

sur $(h', M'/M' \cap M'')$ définie comme l'est R sur $(h'h'', M'M''/M'')$, et si l'on pose $(h' \cap h'')^*_{h'} = (h' \cap h'')^*$, on a $\alpha T \beta \Leftrightarrow \alpha (h' \cap h'')^* = \beta (h' \cap h'')^*$.

Mais, pour tout $\tau \in h'$, $\tau h'' \bar{\tau}$ peut s'écrire

$\tau (h' \cap h'') \bar{\tau} \cup \tau (h'' - (h' \cap h'')) \bar{\tau}$ et, comme h' est clos dans M , on a $\tau (h'' - (h' \cap h'')) \bar{\tau} \subset h'(H-h') = H-h'$ puis $\tau (h'' - (h' \cap h'')) \bar{\tau} \subset (H-h') \bar{\tau} \subset (H-h')h' = H-h'$, on déduit donc : $\tau (h' \cap h'') \bar{\tau} = h' \cap \tau (h' \cap h'') \bar{\tau} = h' \cap \tau h'' \bar{\tau}$ et l'on conclut à $(h' \cap h'')^* = \bigcap_{\tau \in h'} (h' \cap \tau h'' \bar{\tau}) = h' \cap (h'')^*$. Ainsi, sur $(h', M'/(M' \cap M''))$

on a démontré l'équivalence $\alpha T \beta \Leftrightarrow \alpha (h' \cap (h'')^*) = \beta (h' \cap (h'')^*)$ et T induit donc sur h' la relation d'équivalence modulo le sous-hypergroupe $h' \cap (h'')^*$ (qui est inversible à droite dans h').

i) \Rightarrow ii). Soit $\alpha \in h'h''$; ψ étant une similitude, il existe une application $\theta : h'h'' \rightarrow h'$ telle que pour tout $\tau \in h'$, $\theta(\alpha) \cdot \psi(\tau.M''/M'') = \psi(\alpha \cdot (\tau.M''/M''))$. D'autre part, $\theta(\alpha)$ étant un élément de h' est aussi un élément de $h'h''$ et donc $\theta(\theta(\alpha))$ est défini, et pour tout τ de h' on a $\theta(\theta(\alpha)) \cdot (\tau \cdot (M' \cap M'')/M' \cap M'') = \theta(\theta(\alpha)) \cdot (\psi(\tau.M''/M'')) = \psi(\theta(\alpha) \cdot (\tau.M''/M'')) = \psi((\theta(\alpha) \tau) \cdot M''/M'') = (\theta(\alpha) \tau) \cdot (M' \cap M'')/M' \cap M'' = \theta(\alpha) \cdot (\tau \cdot (M' \cap M'')/M' \cap M'')$; ce qui démontre la relation $\theta(\theta(\alpha)) T \theta(\alpha)$, soit $\theta(\alpha) R \alpha$ (cf. remarques suivant la définition 3.2) et donc $\alpha (h'')^* = \theta(\alpha) (h'')^*$. Ainsi, pour tout $\alpha \in h'h''$, il existe $\theta(\alpha) \in h'$ tel que $\alpha (h'')^* = \theta(\alpha) (h'')^*$ et, puisque $(h'')^*$ est inclus dans h'' , on déduit $h'h'' = h'h''(h'')^* \subset h'(h'')^* \subset h'h''$, soit $h'h'' = h'(h'')^*$.

ii) \Rightarrow i). Par hypothèse, $h'h'' = h'(h'')^*$; si pour chaque classe de $h'h''$ modulo $(h'')^*$ on se donne un représentant $\alpha' \in h'$, l'application $\theta : h'h'' \rightarrow h'$ qui à tout élément $\alpha \in h'h''$ fait correspondre le représentant $\alpha' \in h'$ choisit pour la classe de α modulo $(h'')^*$ vérifie les conditions 1) et 2) de la définition 3.2. En effet, quel que soit $\tau \in h'$, et pour tout $\alpha \in h'h''$, on a $\alpha \cdot (\tau.M''/M'') = [\alpha (h'')^*] \cdot (\tau.M''/M'') = [\alpha' (h'')^*] \cdot (\tau.M''/M'') = \alpha' \cdot (\tau.M''/M'')$ d'où les égalités $\psi(\alpha \cdot (\tau.M''/M'')) = \psi(\alpha' \cdot (\tau.M''/M'')) = \alpha' \cdot (\tau \cdot (M' \cap M'')/M' \cap M'') = \theta(\alpha) \cdot (\tau \cdot (M' \cap M'')/M' \cap M'') = \theta(\alpha) \cdot (\psi(\tau.M''/M''))$, ce qui assure la condition 1).

Pour assurer la condition 2), il suffit de remarquer que pour tout $\beta \in h'h''$, l'égalité $\theta(\theta(\beta)) = \theta(\beta)$ est vérifiée et en particulier pour $\beta' \in h'$ on a $\theta(\theta(\beta')) = \theta(\beta')$, d'où $\theta(\beta') T \theta(\theta(\beta'))$, soit $\beta' R \theta(\beta')$ et il s'ensuit $\beta' \cdot \psi(\tau.M''/M'') = \theta(\beta') \cdot \psi(\tau.M''/M'') = \psi(\beta' \cdot (\tau.M''/M''))$.

N.B. (1) h' et h'' étant clos dans H , et, $(h'')^*$ étant inclus dans h'' , $h'h'' = h'(h'')^*$ équivaut à $h'' = (h' \cap h'')(h'')^*$.

(2) Si $\bar{\theta}$ est l'isomorphisme d'hypergroupes défini entre $h'(h'')^*/(h'')^*$ et $h'/h' \cap (h'')^*$ par $\alpha'(h'')^*/(h'')^* \mapsto \alpha'(h' \cap (h'')^*)/h' \cap (h'')^*$, $(\psi, \bar{\theta})$ est un isomorphisme entre $(h'(h'')^*)/(h'')^*$, $M'M''/M''$ et $(h'/h' \cap (h'')^*) \cdot M'/M' \cap M''$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. KRASNER - Une nouvelle présentation de la théorie des groupes de permutations et ses applications à la théorie de Galois et de produit d'entrelacement («wreath product») de Groupes.
Mathematica Balkanica 3 (1973) 229-280.
- [2] Y. SUREAU - Thèse de doctorat de troisième cycle.
«Etude des hypergroupes de multitransformation»
Clermont-Ferrand.
- [3] Y. SUREAU - Sous-hypergroupe engendré par deux sous-hypergroupes et sous-hypergroupe ultra-clos d'un hypergroupe. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 284 , 1977.
- [4] Y. SUREAU - Une notion de conjugaison dans les hypergroupes et hypergroupes homomorphes à un groupe , C.R. Acad. Sc. Paris , t. 284 , 1977.