ANNALES SCIENTIFIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND 2
Série Mathématiques

DAVID NUALART
MARTA SANZ

Caractérisation des martingales à deux paramètres indépendantes du chemin

Annales scientifiques de l'Université de Clermont-Ferrand 2, tome 67, série *Mathématiques*, nº 17 (1979), p. 96-104
<http://www.numdam.org/item?id=ASCFM_1979__67_17_96_0>

CARACTERISATION DES MARTINGALES A DEUX PARAMETRES INDEPENDANTES DU CHEMIN

David NUALART et Marta SANZ
Universitat Politècnica de Barcelona

Le but de ce travail est de développer le rapport entre des différentes notions de martingale pour les processus à deux paramètres, en particulier, les martingales fortes et les martingales indépendantes du chemin.

1. Notations et définitions basiques.

L'ensemble de paramètres sera $D=[0,1]^2$ muni de l'ordre usuel

$$z\leqslant z' \iff x\leqslant x' \text{ et } y\leqslant y', \text{ où } z=(x,y) \text{ et } z'=(x',y').$$

Si $z\leqslant z'$, nous noterons par $(z,z']$ le rectangle $\{(\xi,\eta)/x<\xi\leqslant x', y<\eta\leqslant y'\}$. Nous écrirons aussi $R_z=(0,z]$.

Soit $W=\{W_z, z\in D\}$ un processus de Wiener à deux paramètres, défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega,\mathcal{F},P)$ et, pour tout $z\in D$, soit $\mathcal{F}_z$ la tribu engendrée par $\{W_{z'}, z'\leqslant z\}$ et par les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. On dira qu'un processus est adapté s'il est adapté a la famille $\{\mathcal{F}_z\}_{z\in D}$. Nous poserons $\mathcal{F}_z^1=\bigvee_{y'\geqslant 0}\mathcal{F}_{(x,y')}$, $\mathcal{F}_z^2=\bigvee_{x'\geqslant 0}\mathcal{F}_{(x',y)}$, où $z=(x,y)$. Dorénavant nous supposerons que les processus sont intégrables, adaptés et nuls sur les axes.

On peut donner les suivantes définitions de martingale:

Définition 1.1.- M est martingale si

$$E[M_{z_1}/\mathcal{F}_{z_2}]=M_{z_2}\ ,\ \forall\ z_2\leqslant z_1.$$

Si $z\leqslant z'$, on indiquera par $M(z,z']$ l'accroissement du processus M sur le rectangle $(z,z']$, c'est à dire, la variable $M_{z'}-M_{(x',y)}-M_{(x,y')}+M_z$, où $z=(x,y)$, $z'=(x',y')$.

Définition 1.2.- M est une i-martingale $(i=1,2) \iff E\{M(z,z']/\mathcal{F}_z^i\}=0$, pour tout $z\leqslant z'$.

Cette définition correspond à la propiété de martingale en chaque coordonnée et l'on sait que M est martingale si et seulement si M es à la fois 1 et 2-martingale.

Pour caractériser les martingales qui se représentent comme des intégrales stochastiques par rapport à W il est intéressant de donner des conditions plus fortes de martingale.

Définition 1.3.- M est une martingale forte $\Leftrightarrow$ $E\{M(z,z'] / \overset{1}{F}_z \vee \overset{2}{F}_z\} = 0$, pour tout $z \leqslant z'$.

Nous rappelons les théorèmes de représentation comme des intégrales stochastiques pour ces types de martingales:

Théorème 1.1.- (Wong-Zakai [5]). Soit L_W l'ensemble des processus $\Phi = \{\Phi_z, z \in D\}$ adaptés et mesurables, tels que $\int_D E\Phi_z^2 dz < \infty$, et soit L_{WW} l'ensemble des processus $\Psi = \{\Psi(z,z'), (z,z') \in D \times D\}$ mesurables et tels que (1) $\Psi(z,z')$ est $F_{z \vee z'}$-mesurable, (2) $\Psi(z,z')=0$ sauf si $x \leqslant x'$, $y \geqslant y'$, (3) $\iint_{D \times D} E(\Psi(z,z'))^2 dz dz' < \infty$. Alors, si M est une martingale de L^2, il existe des processus $\Phi \in L_W$ et $\Psi \in L_{WW}$, uniques, tels que pour tout $z \in D$ on a

$$M_z = \int_{R_z} \Phi(\alpha)\, dW_\alpha + \iint_{R_z \times R_z} \Psi(\alpha,\alpha')\, dW_\alpha dW_{\alpha'}\ .$$

(brièvement on écrira $M = \Phi.W + \Psi.WW$).

Théorème 1.2.- (Cairoli-Walsh [1]). Une martingale M de L^2 est forte si et seulement s'il existe un processus $\Phi \in L_W$ tel que $M = \Phi.W$.

Théorème 1.3.- (Cairoli-Walsh [2]). Si M est une 2-martingale de L^2, alors il existe un processus $\alpha = \{\alpha(z;s), z \in D, s \in [0,1]\}$ avec les propiétés:

(i) $\alpha(z;s,\omega)$ est $B(D) \otimes B([0,1]) \otimes F$ -mesurable,

(ii) $\alpha(z;s)$ est $F_{(s,y)}$-mesurable, si $z=(x,y)$ et $x \leqslant s$,

$\alpha(z,s) = 0$ si $x > s$,

(iii) $E\int_D \alpha^2(z;1)dz < \infty$,

tel que

$$M_{st} = \int_{R_{st}} \alpha(z;s)\, dW_z\ , \text{ pour tout } (s,t) \in D.$$

Le processus $\alpha(z;s)$ s'appelle la 2-dérivée de M, et on peut donne un résultat semblable pour les 1-martingales.

2. Martingales indépendantes du chemin.

Nous allons introduire la propiété de variation indépendante du chemin pour les martingales.

Soit γ l'ensemble des courbes Γ de D, partant de (0,0), croissantes et continues. Etant donnée une courbe Γ de γ et une martingale M de L^2 on peut considérer la martingale restréinte a la courbe, c'est à dire,

$$M^{\Gamma} = \{M_{z(\lambda)}, F_{z(\lambda)}\}_{\lambda\in[0,1]} \quad ,$$

où $\Gamma = \{z(\lambda), \lambda\in [\ 0,1\ ]\}$.

Soit A^{Γ}_{λ} le processus croissant associé à M^{Γ} .

Définition 2.1.- Une martingale M de L^2 est indépendante du chemin (i.d.c.) si $\forall\, z \in D$, la variable A^{Γ}_1 est indépendante de la courbe $\Gamma \in \gamma$ d'extrémité z.

Cette définition équivaut à l'existence d'un processus unique $\{A_z\}_{z\in D}$ intégrable, croissant et continu sur toute courbe $\Gamma\in\gamma$, tel que $M^2_z - A_z$ est une martingale.

Nous avons le résultat suivant:

Proposition 2.1.- (Cairoli-Walsh [1]). Si M est une martingale forte de L^2 alors M est une martingale i.d.c. dont le processus croissant associé est $A_{st} = \int_{R_{st}} \Phi^2(z)dz$, $\forall\, (s,t) \in D$, Φ étant donné par le théorème 1.2.

L'objet de ce travail est de résoudre la reciproque de cette proposition dans certains cas particuliers.

Nous donnon d'abord quelques résultats auxiliaires:

Lemme 2.1.- Soit $M = \{M_z\}_{z\in D}$ une 2-martingale de L^2 , alors

$$M^2_{st} = 2\int_{R_{st}} M_{(s,y)}\alpha(z;s)dW_z + \int_{R_{st}} \alpha^2(z;s)dz. \ \forall\, (s,t) \in D,$$

où z = (x,y), et $\alpha(z;s)$ est le processus donné par le théorème 1.3.

Ce lemme n'est qu'une version de la formule d'Itô.

<u>Lemme 2.2</u>.- Soit M une martingale de L^2 i.d.c. Le processus $A=\{A_z\}_{z\in D}$ tel que $M^2 - A$ est une martingale vaut

$$A_{st} = \int_{R_{st}} [\,\Phi^2(z) + \int_{R_z} \Psi^2(x',y;x,y')dz'\,]\,dz.$$

(En conséquence, A est croissant et continu sur D).

<u>Démonstration</u>: Nous posons:

$$M_{st} = \int_{R_{st}} \Phi_z dW_z + \iint_{R_{st}\times R_{st}} \Psi(z,z')dW_z dW_{z'} = \int_{R_{st}} \delta_2(z;s)dW_z = \int_{R_{st}} \delta_1(z,t)dW_z,$$

où

$$\delta_1(z;t) = \Phi(z) + \int_{R_{xt}} \Psi(z',z)dW_{z'},$$

$$\delta_2(z;s) = \Phi(z) + \int_{R_{sy}} \Psi(z,z')dW_{z'}\,.$$

Soit

$$A_1(s,t) = \int_{R_{st}} \delta_1^2(z;t)dz,$$

$$A_2(s,t) = \int_{R_{st}} \delta_2^2(z;s)dz.$$

Du lemme 2.1 on en déduit que $M^2 - A_1$ est une <u>1-martingale</u> et $M^2 - A_2$ une <u>2-martingale</u>.

La propiété d'indépendance du chemin de M entraîne alors que $A_1 = A_2 = A$, donc

$$A_{st} = \int_{R_{st}} \delta_1^2(z;t)dz = \int_{R_{st}} \delta_2^2(z;s)dz.$$

Si on développe ces intégrales et on applique le Lemme 2.1 on obtient:

$$A_{st} = \int_{R_{st}} [\,\Phi^2(z) + \int_{R_z} \Psi^2(x',y;x,y')dz'\,]\,dz + 2\int_{R_{st}} [\,\int_{R_{xt}} \delta_1(z,y')\Psi(z',z)dW_{z'}\,]\,dz$$

$$= \int_{R_{st}} [\,\Phi^2(z) + \int_{R_z} \Psi^2(x',y;x,y')dz'\,]\,dz + 2\int_{R_{st}} [\int_{R_{sy}} \delta_2(z,x')\Psi(z,z')dW_{z'}\,]\,dz.$$

Notons par

$$(1) = \int_{R_{st}} [\int_{R_{xt}} \delta_1(z,y')\Psi(z',z)dW_{z'}\,]\,dz,$$

$$(2) = \int_{R_{st}} [\int_{R_{sy}} \delta_2 (z,x')\Psi(z,z')dW_{z'}]dz.$$

Nous avons (1) = (2) = 0. En effet, le terme (1) est une 2-martingale (il suffit d'appliquer Fubini), et pour t fixé ses trajectoires sont à variation totale bornée par rapport à s p.s. Quant à (2), 1 est une 1-martingale et pour s fixé ses trajectoires sont à variation totale bornée par rapport à t p.s. En conséquence, puisque (1) = (2), ce terme est une martingale dont les trajectoires sont à variation totale bornée par rapport à chaque coordonnée, donc (1) = (2) = 0.

<u>Proposition 2.2</u>.- Soit M une martingale de L^2. M est i.d.c. si et seulement si les processus $\Phi(z)$ et $\Psi(z,z')$ donnés par le théorème 1.1, vérifient les équations intégrales suivantes:

$$(a) \int_0^{y'} \delta_1 (z,y')\Psi(z',z)dy = 0, \text{ p.s.}, \forall x'\in[0,x] \text{ , } z' \in D \text{ p.p.}$$

$$(b) \int_0^{x'} \delta_2 (z,x')\Psi(z,z')dx = 0, \text{ p.s.}, \forall y'\in[o,y] \text{ , } z' \in D \text{ p.p.}$$

<u>Démonstration:</u> D'après la démonstration du Lemme 2.2, M est i.d.c. si et seulement si (1) = (2) = 0. Il suffit donc de montrer que (1) = 0 équivaut à la condition (a) et (2) = 0 équivaut à la condition (b).

En effet:

$$(1) = \int_{R_{st}} [\int_{R_{xt}} \delta_1 (z,y')\Psi(z',z)dW_{z'}]dz = \int_{R_{st}} [\int_{R_{sy'}} \delta_1 (z,y')\Psi(z',z)dz]dW_{z'} = 0,$$

d'après Fubini. Cela équivaut à

$$\int_{R_{st}} E(\int_{R_{sy'}} \delta_1 (z,y')\Psi(z',z)dz)^2 \, dz' = 0,$$

donc

$$\int_{R_{sy'}} \delta_1 (z,y')\Psi(z',z)dz = 0, \text{ p.s.}, \forall z'\in R_{st} \text{ p.p.},$$

et en conséquence

$$\int_0^{y'} \delta_1 (z,y')\Psi(z',z)dy = 0, \text{ p.s.}, \forall x \in[x',1] \text{ , } z'\in D, \text{ p.p.}$$

On démontre (b) de façon analogue . □

Théoreme 2.1.- Soit $M = \{M_z\}_{z\in D}$ une martingale de L^2 i.d.c. ($M = \Phi.W + \Psi.WW$). Chacune des conditions suivantes suffit pour que M soit une martingale forte (c'est à dire pour que $\Psi = 0$):

(1) $\Psi(z;z')$ ne dépend pas de x dans $[0,x']$ (ou de y' dans $[0,y]$).

(2) $\Psi(z;z')$ ne dépend pas de x' dans $[x,1]$ (ou de y dans $[y',1]$).

(3) $\Psi(z;z')$ est F_z-mesurable (ou $F_{z'}$-mesurable) et $\Phi = 0$.

(4) $\forall f \in L^2[0,1]$, $\{\int_{R_{st}} f(x)dM_z,\ (s,t)\in D\}$ (ou $\{\int_{R_{st}} f(y)dM_z,\ (s,t)\in D\}$)

est une martingale i.d.c.

Remarques.-

Les conditions (1) et (2) généralisent le résultat de Cairoli-Walsh ([1]) qui suppose que Ψ ne dépend que de x' et y.

La condition (3) donne en particulier que si M = Ψ.WW est i.d.c. et Ψ est déterministe alors M est identiquement nulle.

Démonstration.-

(1) D'après la Proposition 2.2. on sait que

$$\Psi(y;z')\left(\int_0^{x'} \delta_2(z;x')dx\right) = 0, \qquad [2.1]$$

pour tous $z' \in D$, $y' \in [0,y]$ presque partout.

Fixons $y \in [0,1]$ et montrons que $\Psi(y,z') = 0$ p.s. et presque partout $z' \in D$.

Avec une modification convenable du processus $\Psi(x;z')$, on peut supposer que [2.1] est vrai $\forall x' \in [0,1]$, $\forall \omega \in \Omega$, $\forall y' \in [0,y]$. Alors,

$$\int_0^s \delta_2(z;s)dx = \int_0^s \Phi(z)dx + \int_0^s \left[\int_{R_{sy}} \Psi(z;u,v)dW_{uv}\right]dx =$$

$$= \int_0^s \Phi(z)dx + \int_{R_{sy}} u\,\Psi(y;u,v)dW_{uv}.$$

Le processus $N_s \doteq \int_{R_{sy}} u\,\Psi(y;u,v)dW_{uv}$ est une martingale de L^2 par rapport aux tribus $\{F_{sy}\}_{s\in[0,1]}$, dont le processus croissant associé est $\langle N\rangle_s = \int_{R_{sy}} u^2\Psi^2(y;u,v)dudv$.

Pour achever la démonstration il suffit de voir que la martingale N_s a ses trajectoires à variation bornée dans $[0,1]$, ce qui entraîne $\Psi = 0$. En effet, la variation de cette martingale coïncide avec la variation de la martingale restreinte à l'ensemble $A = \{s\in[0,1] \ / \quad y', \Psi(y;s,y';\omega) \neq 0\}$, et $\forall s \in A$, nous avons $N_s = -\int_0^s \Phi(z,\omega)dx$.

(3) Dans ce cas la Proposition 2.2 donne lieu à:

$$\int_0^{x'} [\int_{R_{x'y}} \Psi(z;u,v)dW_{uv}]\ \Psi(z;z')dx = 0,\ \forall\ z'\in D,\ \forall y\in[0,1] \text{ p.p. et p.s.,}$$

$\Psi(z;z')$ étant F_z-mesurable on peut appliquer Fubini:

$$\int_{R_{x'y}} [\int_0^u \Psi(z;u,v)\ \Psi(z;z')dx]\ dW_{uv} = 0, \text{ et en conséquence,}$$

$$\int_0^u \Psi(z;,u,v)\ \Psi(z;,z')dx = 0,\ \forall y\in[0,1]\ ,\ \forall(u,v),\ z'\in D \text{ p.p. et p.s. .}$$

C'est à dire, on peut fixer $y\in[0,1]$ et $\omega\in\Omega$ de telle façon que

$$\int_0^1 \Psi(z;z_1)\ \Psi(z;z_2)dx = 0,\ \forall z_1,\ z_2 \in D \text{ p.p.}$$

Notons $\Psi_{z_1}(x) = \Psi(z;z_1)$, $\Psi_{z_2}(x) = \Psi(z;z_2)$. On peut toujours supposer $\Psi_{z_1}, \Psi_{z_2} \in L^2[0,1]$.

Soit l'espace vectoriel fermé $H = \overline{\langle \Psi_{z_1} \ / \ \langle\Psi_{z_1}, \Psi_{z_2}\rangle = 0, \forall z_2\in D \text{ p.p}\rangle}$ $\subset L^2[0,1]$. H est un espace de <u>Hilbert séparable</u> tel que ses générateurs sont orthogonaux deux à deux: $\langle\Psi_{z_1}, \Psi_{z_2}\rangle = 0$, pour tout z_1, $z_2 \in D$ p.p. Cela entraîne que $\Psi_{z_1}(x) = 0$, $\forall z_1\in D$ p.p.

(2) Dans ce cas la Proposition 2.2 donne

$$\int_0^{x'} \Phi(z)\ \Psi(z;y')dx = -\int_0^{x'} [\int_{R_{x'y}} \Psi(z;v)dW_{uv}]\ \Psi(z;y')dx =$$

$$= -\int_{R_{x'y}} [\int_0^u \Psi(z;v)\ \Psi(z;y')dx]\ dW_{uv}\ .$$

Le premier terme est un processus à variation totale bornée par rapport à x', tandis que le dernier est une martingale par rapport à x', donc

$$\int_{R_{x'y}} [\int_0^u \Psi(z;v)\ \Psi(z;y')dx\ ]dW_{uv} = 0.$$

D'où

$$\int_0^u \Psi(z;v)\ \Psi(z;y')dx = 0,\ \forall u,v,y'\in[0,1] \text{ p.p. ,}$$

et on peut se ramener au cas antérieur.

(4) On sait que $N_{st} = \int_{R_{st}} f(x)dM_z$ est une martingale de L^2 i.d.c. D'autre part

$$N_{st} = \int_{R_{st}} f(x)\ \delta_1(z;t)dW_z = \int_{R_{st}} f(x)\ \delta_2(z;s)dW_z.$$

De la propiété i.d.c. s'en déduit

$$\int_{R_{st}} f^2(x)\delta_1^2(z;t)dz = \int_{R_{st}} f^2(x)\delta_2^2(z;s)dz,\quad \forall f\in L^2[0,1]\ ,$$

et en conséquence

$$\int_0^t \delta_1^2(z;t)dy = \int_0^t \delta_2^2(z;s)dy,\quad \forall x\in[0,1]\ \text{p.p.}\ .$$

Notons par $\delta(z)$ le processus $\delta^2(z) = \Phi^2(z) + \int_{R_z} \Psi^2(x',y;x,y')dz.$

On sait que le processus croissant associé à M est (voir Lemme 2.2)

$$A_{st} = \int_{R_{st}} \delta^2(z)dz = \int_{R_{st}} \delta_1^2(z;t)dz,$$

d'où

$$\int_0^t \delta^2(z)dy = \int_0^t \delta_1^2(z;t)dy,\quad \forall x\in[0,1]\ \text{p.p.}\ .$$

Nous avons donc

$$\int_0^t \delta^2(z)dy = \int_0^t \delta_2^2(z;s)dy,\ \text{et}\ \ \delta(z) = \delta_2(z;s)\ \text{p.p.}\ .$$

Ceci montre que M_{st} est une martingale forte . □

3. Applications.

Nous appliquerons finalement le Théorème 2.1 à la caractérisation du processus de Wiener à deux paramètres.

On connait le résultat suivant:

Théoreme 3.1.- Si M_{st} est une martingale forte et M_{st}^2 - st est une martingale, alors M_{st} est un processus de Wiener à deux paramètres.

Remarquons que si M_{st}^2 - st et M_{st} sont des martingales, alors M_{st} est une martingale i.d.c. avec processus croissant A_{st} = st.

On se pose le probleme suivant: Si M_{st} et M_{st}^2 - st sont des martingales, peut-on déduire que M_{st} est un processus de Wiener à deux paramètres?

En utilisant le Théorème 2.1 nous pouvons résoudre cette question dans certains cas particuliers, le cas général restant ouvert.

Théorème 3.2.- Soient M_{st}, $M^2_{st} - st$ des martingales, avec $M = \Phi.W + \Psi.WW$. Si le processus Ψ vérifie les conditions (1) ou (2) du Théorème 2.1, alors M_{st} est un processus de Wiener à deux paramètres.

Théorème 3.3.- Soit M_{st} une martingale; si $\forall f \in L^2\,[0,1]$, $(\int_{R_{st}} f(x)dM_z)^2 - t\int_0^s f^2(x)dx$ (ou $(\int_{R_{st}} f(y)dM_z)^2 - s\int_0^t f^2(y)dy$), est une martingale, alors M_{st} est un processus de Wiener à deux paramètres.

Bibliographie.

[1] Cairoli, R. et Walsh, J.B. "Stochastic Integrals in the Plane". Acta Mathematica (1975), 134, pp. 111-183.

[2] Cairoli, R. et Walsh, J.B. "Martingale Representation and Holomorphic Processes" Ann. of Prob. (1977), vol. 5, n°4, pp. 511-521.

[3] Guyon, X. et Prum, B. "Différents Types de Variations Produit pour une Semimartingale Représentable de R_+. Martingales Faibles Indépendantes du chemin" (1978). Préprint ORSAY.

[4] Nualart. D. et Sanz. M. "Intégrales Stochastiques par rapport au Processus de Wiener à deux paramètres" Ann. Sc. Univ. Clermont (1976), pp. 89-99.

[5] Wong, E. et Zakai, M. "Martingale and Stochastic Integrals for Processes with a Multidimensional Parameter" ZfW. 29, (1974), pp. 109-122.

David Nualart et Marta Sanz

Dep. de Matemàtiques

Escola Tècnica Sup. d'Arquitectura

Universitat Politècnica de Barcelona.